Poro-Elasticité

● *Poroélasticité* :

Le milieu poreux subit indépendamment une déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ et une variation de porosité ϕ sous l'effet combiné des efforts contrainte totale $\boldsymbol{\sigma}$ et *pression de pore p*. Ces quantités sont reliées par la loi constitutive qui pour le *matériau poroélastique linéaire et isotrope* s'écrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \lambda\, \varepsilon_{vol}\, \boldsymbol{\delta} + 2\mu\, \boldsymbol{\varepsilon} - bp\, \boldsymbol{\delta} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \dfrac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} - \dfrac{\nu}{E}\sigma_{kk}\, \boldsymbol{\delta} + \dfrac{b}{3K} p\boldsymbol{\delta} \\ d\phi = b\varepsilon_{vol} + \dfrac{p}{N} \end{cases}$$

avec $\varepsilon_{vol} = \varepsilon_{kk}$, λ et μ coefficients de Lamé, K module de compressibilité drainé (*i.e.*, à pression constante) , b coefficient de Biot*,* N module de Biot du squelette*,* $d\phi$ la variation de porosité à partir de la porosité ϕ_0 de l'état de référence $\boldsymbol{\sigma} = 0$, $p = 0$.

● *Contrainte effective* : $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + bp\, \boldsymbol{\delta}$

Loi poroélastique écrite en contrainte effective : $\boldsymbol{\sigma}' = \lambda\, \varepsilon_{vol}\, \boldsymbol{\delta} + 2\mu\, \boldsymbol{\varepsilon}$

● Milieu biphasé saturé : l'espace poral est rempli d'un fluide de compressibilité K_f et de densité ρ_f. Les grains formant le squelette ont une un module de compressibilité K_s. Pour ce milieu (isotrope) on :

$$b = 1 - \frac{K}{K_s}, \qquad \frac{1}{N} = \frac{b - \phi_0}{K_s}$$

● Variation de la masse de fluide dans l'unité de volume:

$$\frac{dm_f}{\rho_f} = b\, \varepsilon_{vol} + \frac{p}{M}$$

avec M le *module de Biot* défini par :

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{N} + \frac{\phi}{K_f}$$

● Essai non drainé : $dm_f = 0$, soit $p = -Mb\, \varepsilon_{vol}$. En reportant dans la loi constitutive on trouve :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda^u\, \varepsilon_{vol}\, \boldsymbol{\delta} + 2\mu^u\, \boldsymbol{\varepsilon}$$
$$\sigma_m = K^u\, \varepsilon_{vol}$$

avec les *coefficients de Lamé non drainés* λ^u et μ^u et le *module de compressibilité non drainé* K^u donnés par :

$$\lambda^u = \lambda + Mb^2, \qquad \mu^u = \mu, \qquad K^u = K + Mb^2$$

● Coefficient de Skempton B_s : rapport de la pression sur la contrainte moyenne ($\sigma_m = \sigma_{kk}/3$) lors d'un essai de compression non drainée ($\sigma_m = K^u\,\varepsilon_{vol}$, $p = Mb\,\varepsilon_{vol}$, $B_s = p/\sigma_m$) :

$$B_s = Mb/K^u$$

Thermo-Elasticité

● *Thermoélasticité*

La déformation est la somme de la déformation d'origine mécanique $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}}$ et de la déformation thermique $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{M}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}$$

● Déformation thermique libre de contrainte (dilatation thermique) : $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} = \Delta T.\,\boldsymbol{\alpha}$
avec ΔT la variation de la température et $\boldsymbol{\alpha}$ *tenseur de dilatation thermique*

● Dilatation thermique du matériau isotrope :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} = \alpha\ \Delta T\ \boldsymbol{\delta}$$

avec α *coefficient de dilatation thermique linéaire* et $\boldsymbol{\delta}$ tenseur d'identité d'ordre 2.

● Matériau thermoélastique linéaire :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma} + \Delta T.\,\boldsymbol{\alpha}$$

ou encore :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}})$$

avec $\mathbb{C}$ tenseur d'élasticité, $\mathbb{S} = \mathbb{C}^{-1}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^M = \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma}$ déformation mécanique.

● Matériau thermoélastique linéaire isotrope :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\boldsymbol{\delta} + \alpha\ \Delta T\ \boldsymbol{\delta}$$