Modèle de Mohr-Coulomb

Champs de contraintes à l'intérieur de la zone plastique

Pour $R \le r \le R_p$ (zone plastique)

Equation d'équilibre : $\dfrac{d\sigma_r}{dr} + \dfrac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$

Critère de plasticité : $\sigma_\theta = K_p \sigma_r + \sigma_c$

Conditions aux limites : $\begin{cases} \text{Pour } r{=}R \quad \sigma_r\big|_{r=R} = (1-\lambda)\sigma^0 \\ \text{Pour } r{=}R_p \quad \sigma_r\big|_{r=R_p} = (1-\lambda_e)\sigma^0 \end{cases}$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \left(K_p\sigma_r + \sigma_c\right)}{r} = 0$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + (1-K_p)\frac{\sigma_r}{r} = \frac{\sigma_c}{r}$$

Solution : $\sigma_r = \dfrac{1}{1-K_p}\sigma_c + Ar^{K_p-1}$

Pour $r{=}R$ $\quad \sigma_r\big|_{r=R} = (1-\lambda)\sigma^0 = \dfrac{1}{1-K_p}\sigma_c + AR^{K_p-1}$

d'où : $A = \dfrac{1}{R^{K_p-1}}\left((1-\lambda)\sigma^0 - \dfrac{1}{1+K_p}\sigma_c\right)$

$$\sigma_r = \frac{\sigma_c}{K_p-1}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^{K_p-1} - 1\right] + (1-\lambda)\sigma^0\left(\frac{r}{R}\right)^{K_p-1}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_c}{K_p-1}\left[K_p\left(\frac{r}{R}\right)^{K_p-1} - 1\right] + K_p(1-\lambda)\sigma^0\left(\frac{r}{R}\right)^{K_p-1}$$

Rayon de la zone plastique :

Pour $r{=}R_p$ $\quad \sigma_r\big|_{r=R_p} = (1-\lambda_e)\sigma^0 = \dfrac{\sigma_c}{K_p-1}\left[\left(\dfrac{R_p}{R}\right)^{K_p-1} - 1\right] + (1-\lambda)\sigma^0\left(\dfrac{R_p}{R}\right)^{K_p-1}$

$$\frac{R_p}{R} = \left[\frac{2}{K_p+1}\,\frac{(K_p-1)\sigma^0 + \sigma_c}{(1-\lambda)(K_p-1)\sigma^0 + \sigma_c}\right]^{\frac{1}{K_p-1}}$$

Champs de déplacement à l'intérieur de la zone plastique

$$\varepsilon_r = -\frac{\lambda_e \sigma^0}{2G} + \Delta\varepsilon_r \; ; \; \varepsilon_\theta = \frac{\lambda_e \sigma^0}{2G} + \Delta\varepsilon_\theta$$

$\Delta\varepsilon_r = \Delta\varepsilon_r^e + \Delta\varepsilon_r^p$; $\Delta\varepsilon_\theta = \Delta\varepsilon_\theta^e + \Delta\varepsilon_\theta^p$

Hypothèse : $\Delta\varepsilon_r^e << \Delta\varepsilon_r^p$ et $\Delta\varepsilon_\theta^e << \Delta\varepsilon_\theta^p$

$\Delta\varepsilon_r \approx \Delta\varepsilon_r^p$; $\Delta\varepsilon_\theta \approx \Delta\varepsilon_\theta^p$

Loi d'écoulement : $\beta\Delta\varepsilon_\theta^p + \Delta\varepsilon_r^p = 0 \rightarrow \beta\Delta\varepsilon_\theta + \Delta\varepsilon_r = 0$

Equation de compatibilité des déformations : $\dfrac{d\varepsilon_\theta}{dr} = \dfrac{\varepsilon_r - \varepsilon_\theta}{r}$

$$\frac{d\Delta\varepsilon_\theta}{dr} = \frac{\Delta\varepsilon_r - \Delta\varepsilon_\theta}{r} - 2\frac{\lambda_e \sigma^0}{2G}\frac{1}{r}$$

$$\frac{d\Delta\varepsilon_\theta}{dr} = \frac{-\beta\Delta\varepsilon_\theta - \Delta\varepsilon_\theta}{r} - 2\frac{\lambda_e \sigma^0}{2G}\frac{1}{r}$$

$$\frac{d\Delta\varepsilon_\theta}{dr} + (1+\beta)\frac{\Delta\varepsilon_\theta}{r} = -\frac{\lambda_e \sigma^0}{G}\frac{1}{r}$$

Solution : $\Delta\varepsilon_\theta = -\dfrac{1}{1+\beta}\dfrac{\lambda_e \sigma^0}{G} + Cr^{-(1+\beta)}$

Condition limite : Pour $r = R_p$ $\quad \Delta\varepsilon_\theta = 0,$ d'où $C = \dfrac{\lambda_e \sigma^0}{G}\dfrac{1}{1+\beta} R_p^{\beta+1}$

$$\frac{u}{r} = \varepsilon_\theta = \frac{\lambda_e \sigma^0}{2G} + \Delta\varepsilon_\theta = \frac{\lambda_e \sigma^0}{2G} - \frac{1}{1+\beta}\frac{\lambda_e \sigma^0}{G} + \frac{\lambda_e \sigma^0}{G}\frac{1}{1+\beta}\left(\frac{R_p}{r}\right)^{\beta+1} = \frac{\lambda_e \sigma^0}{2(\beta+1)G}\left[2\left(\frac{R_p}{r}\right)^{\beta+1} + \beta - 1\right]$$