A retenir

Comportement élastoplastique standard isotrope de Von Mises, écrouissage isotrope et cinématique

$$\boxed{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_e + \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_p}$$

$$\boxed{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_e = \frac{-\nu}{E} tr\left(\dot{\underline{\underline{\sigma}}}\right)\underline{\underline{I}} + \frac{1+\nu}{E}\dot{\underline{\underline{\sigma}}}}$$

Variables dôêtat: $\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^p \ et \ p\right)$

$$p = \int_0^t \left(\frac{2}{3}\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p(s):\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p(s)\right)^{1/2} ds$$

1er cas:

$$f\left(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^p, p\right) = \Sigma_{eq}\left(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^p\right)\right) - R(p) = \left(\frac{3}{2}\left(\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{X}}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^p\right)\right):\left(\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{X}}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^p\right)\right)\right)^{1/2} - R(p) < 0 \rightarrow \boxed{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \underline{\underline{0}}} \quad \boxed{\dot{p} = 0}$$

2ème cas:

$$f\left(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^p, p\right) = \Sigma_{eq}\left(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^p\right)\right) - R(p) = \left(\frac{3}{2}\left(\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{X}}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^p\right)\right):\left(\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{X}}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^p\right)\right)\right)^{1/2} - R(p) = 0$$

$$\underline{\underline{N}} = \frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{3}{2}\frac{\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{X}}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^p\right)}{\Sigma_{eq}\left(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^p\right)\right)} \qquad \dot{\underline{\underline{X}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{H}}}}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^p\right):\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p \qquad \dot{R} = h(p)\dot{p}$$

$$\lambda = \frac{\left(\underline{\underline{N}}:\dot{\underline{\underline{\sigma}}}\right)^+}{\left(\underline{\underline{N}}:\underline{\underline{\underline{\underline{H}}}}:\underline{\underline{N}} + h\right)}$$

$$\boxed{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \lambda \underline{\underline{N}}}$$

$$\boxed{\dot{p} = \left(\frac{2}{3}\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p(s):\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p(s)\right)^{1/2} = \lambda}$$

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \left(\underline{\underline{\underline{\underline{S}}}} + \frac{\left(\underline{\underline{N}} \otimes \underline{\underline{N}}\right)}{\underline{\underline{N}}:\underline{\underline{\underline{\underline{H}}}}:\underline{\underline{N}} + h}\right):\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}^{ep}:\dot{\underline{\underline{\sigma}}} \quad si \ \underline{\underline{N}}:\dot{\underline{\underline{\sigma}}} \geq 0$$

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}:\dot{\underline{\underline{\sigma}}} \quad si \ \underline{\underline{N}}:\dot{\underline{\underline{\sigma}}} < 0$$

A retenir

Comportement élastoplastique standard isotrope de Von Mises, parfaitement plastique

$$\boxed{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_e + \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_p}$$

$$\boxed{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_e = \frac{-\nu}{E} tr\left(\dot{\underline{\underline{\sigma}}}\right)\underline{\underline{I}} + \frac{1+\nu}{E}\dot{\underline{\underline{\sigma}}}}$$

Variables dœtat: $\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^p\right)$

1er cas:

$$f\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) = \Sigma_{eq}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) - R = \left(\frac{3}{2}\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}\right)^{1/2} - R < 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \underline{\underline{0}}}$$

2ème cas:

$$f\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) = \Sigma_{eq}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) - R = \left(\frac{3}{2}\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}\right)^{1/2} - R = 0$$

$$\underline{\underline{N}} = \frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{3}{2}\frac{\underline{\underline{s}}}{\Sigma_{eq}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)}$$

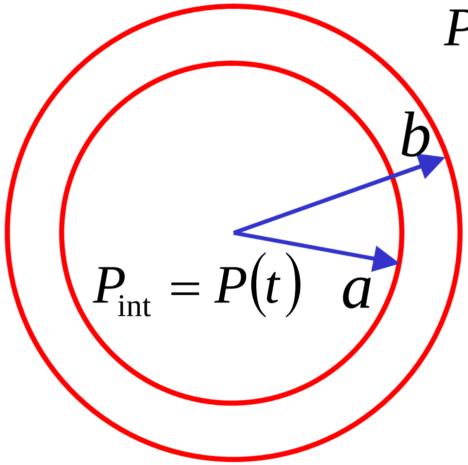
$$\boxed{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \lambda \underline{\underline{N}}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lambda = 0 & si\ \underline{\underline{N}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} < 0 \\ \lambda \geq 0 & si\ \underline{\underline{N}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} = 0 \end{array}}$$

λ Indéterminé

Devoir dôélastoplasticité HPP
Réservoir sphérique sous pression

$P_{ext} = 0$



Dans la première partie du problème le chargement

$P_{\text{int}} = P(t)$ est croissant

A la dernière question (question 15) le chargement

$P_{\text{int}} = P(t)$ est décroissant

Réservoir sphérique sous pression

On rappelle lõécriture du gradient du champ de déplacement en coordonnées sphériques :

$$\underline{\xi} = \xi_r(r,\varphi,\theta)\underline{e}_r(\varphi,\theta) + \xi_\varphi(r,\varphi,\theta)\underline{e}_\varphi(\varphi,\theta) + \xi_\theta(r,\varphi,\theta)\underline{e}_\theta(\varphi,\theta)$$

$$\underline{\underline{grad}}\left(\underline{\xi}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial \xi_r}{\partial \varphi} - \xi_\varphi\right] & \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{1}{\sin\varphi}\dfrac{\partial \xi_r}{\partial \theta} - \xi_\theta\right] \\ \dfrac{\partial \xi_\varphi}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial \xi_\varphi}{\partial \varphi} + \xi_r\right] & \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{1}{\sin\varphi}\dfrac{\partial \xi_\varphi}{\partial \theta} - \xi_\theta \cot\varphi\right] \\ \dfrac{\partial \xi_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \xi_\theta}{\partial \varphi} & \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{1}{\sin\varphi}\dfrac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta} + \xi_\varphi \cot\varphi + \xi_r\right] \end{bmatrix}$$

Réservoir sphérique sous pression

On rappelle lœécriture de la divergence du champ de contrainte en coordonnées sphériques :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr}(r,\varphi,\theta) & \sigma_{r\varphi}(r,\varphi,\theta) & \sigma_{r\theta}(r,\varphi,\theta) \\ \sigma_{r\varphi}(r,\varphi,\theta) & \sigma_{\varphi\varphi}(r,\varphi,\theta) & \sigma_{\varphi\theta}(r,\varphi,\theta) \\ \sigma_{r\theta}(r,\varphi,\theta) & \sigma_{\varphi\theta}(r,\varphi,\theta) & \sigma_{\theta\theta}(r,\varphi,\theta) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{div\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)} = & \left[\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{r\varphi}\cot\varphi}{r}\right]\underline{e}_r \\ & + \left[\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{\left(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta}\right)\cot\varphi + 3\sigma_{r\varphi}}{r}\right]\underline{e}_\varphi \\ & + \left[\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{3\sigma_{r\theta} + 2\sigma_{\varphi\theta}\cot\varphi}{r}\right]\underline{e}_\theta \end{aligned}$$

Réservoir sphérique sous pression

Question 1 :

Simplifications dans ces équations dues à la symétrie sphérique

,

Réservoir sphérique sous pression

Symétrie sphérique :

$$\underline{\xi} = \xi_r(r,\varphi,\theta)\underline{e}_r(\varphi,\theta) + \xi_\varphi(r,\varphi,\theta)\underline{e}_\varphi(\varphi,\theta) + \xi_\theta(r,\varphi,\theta)\underline{e}_\theta(\varphi,\theta) \qquad \boxed{\underline{\xi} = \xi_r(r)\underline{e}_r(\varphi,\theta)}$$

$$\underline{\underline{grad}}(\underline{\xi}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial \xi_r}{\partial \varphi} - \xi_\varphi\right] & \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{1}{\sin\varphi}\dfrac{\partial \xi_r}{\partial \theta} - \xi_\theta\right] \\ \dfrac{\partial \xi_\varphi}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial \xi_\varphi}{\partial \varphi} + \xi_r\right] & \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{1}{\sin\varphi}\dfrac{\partial \xi_\varphi}{\partial \theta} - \xi_\theta \cot\varphi\right] \\ \dfrac{\partial \xi_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \xi_\theta}{\partial \varphi} & \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{1}{\sin\varphi}\dfrac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta} + \xi_\varphi \cot\varphi + \xi_r\right] \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\underline{\underline{grad}}(\underline{\xi}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\xi_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\xi_r}{r} \end{bmatrix}}$$

Réservoir sphérique sous pression

Symétrie sphérique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr}(r,\varphi,\theta) & \sigma_{r\varphi}(r,\varphi,\theta) & \sigma_{r\theta}(r,\varphi,\theta) \\ \sigma_{r\varphi}(r,\varphi,\theta) & \sigma_{\varphi\varphi}(r,\varphi,\theta) & \sigma_{\varphi\theta}(r,\varphi,\theta) \\ \sigma_{r\theta}(r,\varphi,\theta) & \sigma_{\varphi\theta}(r,\varphi,\theta) & \sigma_{\theta\theta}(r,\varphi,\theta) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr}(r) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta}(r) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta\theta}(r) \end{bmatrix}}$$

$$\underline{div(\underline{\underline{\sigma}})} = \left[\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{r\varphi}\cot\varphi}{r}\right]\underline{e}_r$$
$$+\left[\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial\sigma_{\varphi\theta}}{\partial\theta} + \frac{(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta})\cot\varphi + 3\sigma_{r\varphi}}{r}\right]\underline{e}_\varphi$$
$$+\left[\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi\theta}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{3\sigma_{r\theta} + 2\sigma_{\varphi\theta}\cot\varphi}{r}\right]\underline{e}_\theta$$

,

$$\boxed{\underline{div(\underline{\underline{\sigma}})} = \left[\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{rr} - 2\sigma_{\theta\theta}}{r}\right]\underline{e}_r}$$

Réservoir sphérique sous pression

Symétrie sphérique :

$$\boxed{\underline{\xi} = \xi_r(r)\underline{e}_r(\varphi,\theta)}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr}(r) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta}(r) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta\theta}(r) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{grad}}(\underline{\xi}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\xi_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\xi_r}{r} \end{bmatrix}$$

$$\underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = \left[\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{rr} - 2\sigma_{\theta\theta}}{r} \right] \underline{e}_r$$

,

Réservoir sphérique sous pression

On fait lôhypothèse que dans la première phase de comportement lôensemble des particules a un comportement élastique

<u>On vous rappelle les relations de comportement en élasticité linéaire HPP</u>

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda tr\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}} \qquad \underline{\underline{\sigma}} = \frac{tr\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)}{3}\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{s}} \qquad \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{tr\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)}{3}\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{e}}$$

$$tr\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) = 3K tr\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right) \qquad \underline{\underline{s}} = 2\mu\underline{\underline{e}} \qquad \left(3K = 3\lambda + 2\mu\right)$$

<u>Question 2 :</u>

Que deviennent ces équations en symétrie sphérique?

(Relations entre $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\xi}$)

Réservoir sphérique sous pression

<u>Elasticité linéaire HPP</u>

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda tr\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)\underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}} \qquad \underline{\underline{\sigma}} = \frac{tr\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)}{3}\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{s}} \qquad \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{tr\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)}{3}\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{e}}$$

$$\boxed{tr\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) = 3K tr\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)} \qquad \boxed{\underline{\underline{s}} = 2\mu\underline{\underline{e}}} \qquad \left(3K = 3\lambda + 2\mu\right)$$

Symétrie sphérique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr}(r) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta}(r) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta\theta}(r) \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{s}} = \left(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\right)\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\left(\sigma_{rr} + 2\sigma_{\theta\theta}\right) = 3K\left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r} + 2\frac{\xi_r}{r}\right)}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\xi_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\xi_r}{r} \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{e}} = \left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \frac{\xi_r}{r}\right)\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\left(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\right) = 2\mu\left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \frac{\xi_r}{r}\right)}$$

Réservoir sphérique sous pression

Question 3 :

Nous supposons quŏil nŏy a pas de forces de volume.
En utilisant lŏéquation dŏéquilibre (Question 1) et les équations de comportement élastique (Question 2) établir une équation différentielle qui porte sur ξ_r

Réservoir sphérique sous pression

Elasticité linéaire HPP   Symétrie sphérique :

$$\left(\sigma_{rr} + 2\sigma_{\theta\theta}\right) = 3K\left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r} + 2\frac{\xi_r}{r}\right) \qquad \left(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\right) = 2\mu\left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \frac{\xi_r}{r}\right)$$

$$\sigma_{rr} = K\left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r} + 2\frac{\xi_r}{r}\right) + \frac{4\mu}{3}\left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \frac{\xi_r}{r}\right) \qquad \underline{div}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) = \left[\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{rr} - 2\sigma_{\theta\theta}}{r}\right]\underline{e}_r = \underline{0}$$

$$\boxed{K\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r} + 2\frac{\xi_r}{r}\right) + \frac{4\mu}{3}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \frac{\xi_r}{r}\right) + \frac{3}{r}\left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \frac{\xi_r}{r}\right)\right] = 0}$$

Réservoir sphérique sous pression

Question 4 :

Trouvez deux solutions simples évidentes de cette équation différentielle linéaire, puis en déduire la forme générale de la solution ξ_r

Réservoir sphérique sous pression

$$\boxed{K\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r}+2\frac{\xi_r}{r}\right)+\frac{4\mu}{3}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r}-\frac{\xi_r}{r}\right)+\frac{3}{r}\left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r}-\frac{\xi_r}{r}\right)\right]=0}$$

Lõéquation est homogène, on cherche les solutions sous la forme r^{ν}

Solutions évidentes $\xi_r = r$ $\xi_r = \dfrac{1}{r^2}$

$$\boxed{\xi_r = \alpha r + \frac{\beta}{r^2}}$$

Réservoir sphérique sous pression

Question 5 :

A lôaide des conditions aux limites, déterminer la solution pendant la phase élastique

(Champs $\xi_r(r)$, $\sigma_{rr}(r), \sigma_{\theta\theta}(r)$ en fonction de P, a, b, r)

Réservoir sphérique sous pression

<u>Elasticité linéaire HPP</u> Symétrie sphérique :

$$\boxed{\xi_r(r) = \alpha r + \frac{\beta}{r^2}}$$

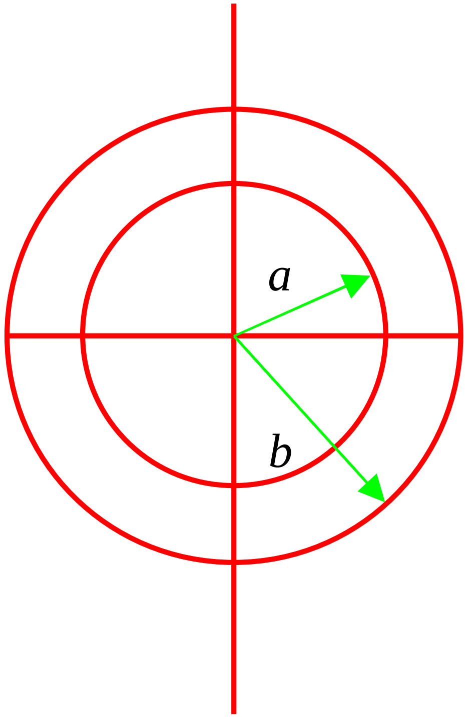
$$\sigma_{rr}(r) = K\left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r} + 2\frac{\xi_r}{r}\right) + \frac{4\mu}{3}\left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \frac{\xi_r}{r}\right)$$

$$\sigma_{rr}(r) = 3K\alpha - \frac{4\mu\beta}{r^3}$$

$$\boxed{\sigma_{rr}(a) = -P} \qquad \boxed{\sigma_{rr}(b) = 0}$$

$$\sigma_{rr}(b) - \sigma_{rr}(a) = P = 4\mu\beta\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right)$$

$$\boxed{\beta = \frac{Pa^3b^3}{4\mu\left(b^3 - a^3\right)}} \qquad \boxed{\alpha = \frac{Pa^3}{3K\left(b^3 - a^3\right)}}$$



Réservoir sphérique sous pression

<u>Solution en élasticité</u>

Le déplacement vaut :

$$\boxed{\xi_r = \frac{Pa^3}{b^3 - a^3}\left(\frac{r}{3K} + \frac{b^3}{4\mu r^2}\right)}$$

$$\left(3K = 3\lambda + 2\mu\right)$$

Les composantes du champ de contrainte valent :

$$\boxed{\sigma_{rr} = \frac{Pa^3}{b^3 - a^3}\left(1 - \frac{b^3}{r^3}\right) \leq 0}$$

$$\boxed{\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{Pa^3}{b^3 - a^3}\left(1 + \frac{b^3}{2r^3}\right) \geq 0}$$

Réservoir sphérique sous pression

Nous supposons maintenant que le matériau est élastique parfaitement plastique et obéit au critère de Von Mises.

$$\Sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} = R$$

Question 6 :

Déterminer pour quelle pression interne P_e , fonction de a, b, R
le matériau commence à plastifier

Réservoir sphérique sous pression

1/ Pression de première plastification

$$\sigma_{rr} = \frac{Pa^3}{b^3 - a^3}\left(1 - \frac{b^3}{r^3}\right) \leq 0 \qquad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{Pa^3}{b^3 - a^3}\left(1 + \frac{b^3}{2r^3}\right) \geq 0$$

La trace de la contrainte vaut : $\frac{tr\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)}{3} = \frac{Pa^3}{b^3 - a^3}$

Le déviateur des contraintes a pour composantes :

$$s_{rr} = \frac{Pa^3}{b^3 - a^3}\left(-\frac{b^3}{r^3}\right) \qquad s_{\theta\theta} = s_{\varphi\varphi} = \frac{Pa^3}{b^3 - a^3}\left(\frac{b^3}{2r^3}\right)$$

La contrainte équivalente vaut : $\Sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} = \frac{3}{2}\frac{Pa^3}{b^3 - a^3}\frac{b^3}{r^3} \geq 0$

Réservoir sphérique sous pression

1/ Pression de première plastification

Elle est maximale en $r = a$ et vaut : $\Sigma_{eq\max} = \frac{3}{2}\frac{Pb^3}{b^3 - a^3}$

La plasticité va donc apparaître en $r = a$ pour une pression P_e

telle que : $\Sigma_{eq\max} = R$

$$\frac{3}{2}\frac{P_e b^3}{b^3 - a^3} = R$$

soit : $\boxed{P_e = R\frac{2}{3}\frac{b^3 - a^3}{b^3}}$

Réservoir sphérique sous pression

Comme la plastification intervient en premier lieu en $r = a$ nous supposerons, quôensuite, en augmentant le chargement, une zone plastique se développe à lôintérieur de la sphère pour $r \in [a, c], \quad c \leq b$

On note $P(c)$ la pression correspondante.

Question 7 :

En utilisant le critère de plasticité, déterminer lôexpression de $(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})$ en fonction de R dans la zone plastique $r \in [a, c], \quad c \leq b$

Ensuite à lôaide de lôéquation dôéquilibre en symétrie sphérique, déterminer σ_{rr} dans la zone plastique en fonction de $a, r, R \; et \; P(c)$

Déterminer $\sigma_{\theta\theta}$ dans la zone plastique en fonction de $a, r, R \; et \; P(c)$

Réservoir sphérique sous pression

Forme de la solution dans les zones plastique

zone plastique $a \le r < c$ (hypothèse)

Notons $P(c)$ la pression interne entraînant le développement de la zone plastique pour $a \le r < c$

En coordonnées sphériques lôéquilibre sôécrit :

$$\underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = \left[\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{rr} - 2\sigma_{\theta\theta}}{r}\right]\underline{e}_r = \underline{0}$$

Les composantes du déviateur des contraintes sont :

$$s_{rr} = \frac{2}{3}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \qquad s_{\theta\theta} = -\frac{1}{3}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})$$

La contrainte équivalente vaut :

$$\Sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} = |\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}| = -(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})$$

Réservoir sphérique sous pression

Dans la zone plastique

$$\Sigma_{eq} = -(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = R$$

Lœéquation dœéquilibre $\underline{div(\underline{\underline{\sigma}})} = \left[\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{rr} - 2\sigma_{\theta\theta}}{r}\right]\underline{e}_r = \underline{0}$ sœécrit alors :

$$\left[\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{2R}{r}\right] = 0$$

On en déduit les composantes du champ de contrainte dans la zone plastique :

$$\sigma_{rr} = 2RLog\left(\frac{r}{a}\right) - P(c)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = R + \sigma_{rr} = R + 2RLog\left(\frac{r}{a}\right) - P(c)$$

Réservoir sphérique sous pression

Par hypothèse la zone élastique est donnée par $c < r \leq b$

Notons $P_2(c) = -\sigma_{rr}(c)$ la valeur de σ_{rr} déduite du calcul dans la zone plastique en fonction de $a, c, R \; et \; P(c)$

Question 8 :

En adaptant les résultats de la question 5 donner lœxpression des champs $\xi_r(r)$ $\sigma_{rr}(r)$ $\sigma_{\theta\theta}(r)$ dans la zone élastique en fonction de $P_2(c), c, b, r$

Réservoir sphérique sous pression

La solution trouvée dans la question 5 est

$$\boxed{\xi_r = \frac{Pa^3}{b^3 - a^3}\left(\frac{r}{3K} + \frac{b^3}{4\mu r^2}\right)} \quad \boxed{\sigma_{rr} = \frac{Pa^3}{b^3 - a^3}\left(1 - \frac{b^3}{r^3}\right) \leq 0} \quad \boxed{\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{Pa^3}{b^3 - a^3}\left(1 + \frac{b^3}{2r^3}\right) \geq 0}$$

La « pression » à la frontière de la zone élastique $r = c$ est

$$P_2(c) = -\sigma_{rr}(c) = -2RLog\left(\frac{c}{a}\right) + P(c)$$

Le déplacement dans la zone élastique $c < r \leq b$ vaut donc :

$$\xi_r = \frac{P_2(c)\,c^3}{b^3 - c^3}\left(\frac{r}{3K} + \frac{b^3}{4\mu r^2}\right)$$

Les composantes du champ de contrainte valent
(solution en élasticité pour le « réservoir sphérique » $c < r \leq b$):

$$\sigma_{rr} = \frac{P_2(c)\,c^3}{b^3 - c^3}\left(1 - \frac{b^3}{r^3}\right) \qquad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{P_2(c)\,c^3}{b^3 - c^3}\left(1 + \frac{b^3}{2r^3}\right)$$

Réservoir sphérique sous pression

Nous voulons déterminer $P(c)$

Pour cela nous allons supposer que la zone plastique est croissante avec P

Alors, du coté de la zone élastique, en $r = c^{+}$, le critère de plasticité est atteint.

$$\Sigma_{eq} = R$$

Question 9 :

A lôaide de lôhypothèse ci-dessus, exprimer $P(c)$ à lôaide de $a, b, c \; et \; R$

Vérifier la cohérence avec $P(a) = P_e$

En déduire le champ de contrainte dans la zone plastique en fonction de $b, c, R \; et \; r$

Réservoir sphérique sous pression

Ecrivons que $\Sigma_{eq} = -(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = R$ en $r = c^+$

(hypothèse zone plastique croissante)

$$\sigma_{rr} = \frac{P_2(c)c^3}{b^3 - c^3}\left(1 - \frac{b^3}{r^3}\right) \qquad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{P_2(c)c^3}{b^3 - c^3}\left(1 + \frac{b^3}{2r^3}\right)$$

$$\frac{P_2(c)}{b^3 - c^3}\left(\frac{3b^3}{2}\right) = R$$

En remplaçant $P_2(c) = -2RLog\left(\frac{c}{a}\right) + P(c)$

et après calculs il vient :

$$\boxed{P(c) = 2R\left[\frac{(b^3 - c^3)}{3b^3} + Log\left(\frac{c}{a}\right)\right]}$$

Notons que lorsque $c=a$,

$$P(a) = P_e = R\frac{2}{3}\frac{b^3 - a^3}{b^3}$$

Réservoir sphérique sous pression

Le champ de contrainte dans la zone plastique a pour composantes :

$$\sigma_{rr} = 2R\,Log\left(\frac{r}{a}\right) - P(c) = 2R\left[Log\left(\frac{r}{c}\right) - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{c^3}{b^3}\right)\right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = R + \sigma_{rr} = 2R\left[Log\left(\frac{r}{c}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{c^3}{b^3}\right)\right]$$

$$tr\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) = 2R\left[3Log\left(\frac{r}{c}\right) + \left(\frac{c^3}{b^3}\right)\right]$$

Réservoir sphérique sous pression

Question 10 :

Déterminer la pression critique P_c à laquelle la sphère est détruite par écoulement plastique en fonction de $a, b \; et \; R$

Réservoir sphérique sous pression

Détermination de P_c

$$P(c) = 2R\left[\frac{\left(b^3 - c^3\right)}{3b^3} + Log\left(\frac{c}{a}\right)\right]$$

La pression critique est atteinte lorsque lœnsemble de la sphère plastifie

$(c = b)$

$$\boxed{P_c = 2R\left[Log\left(\frac{b}{a}\right)\right]}$$

A cette pression la sphère est détruite.

Réservoir sphérique sous pression

Nous voulons déterminer le champ de déplacement dans la zone plastique.

Question 11 :

En étudiant à $tr\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)$ déterminez une équation différentielle qui porte sur $\xi_r\left(r\right)$ dans la zone plastique et intégrez cette équation.

Exprimez $\xi_r\left(r\right)$ en fonction de K, b, c, R, r et dôune constante dôintégration indéterminée à ce stade du problème

Réservoir sphérique sous pression

Détermination du champ de déplacement dans la zone plastique

Coordonnées sphériques :

En tenant compte de la symétrie de révolution

(champs ne dépendant que de *r*, $\xi_\theta = \xi_\varphi = 0$), il vient :

$$\underline{\underline{grad}}\left(\underline{\xi}\right) = \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\xi_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\xi_r}{r} \end{bmatrix}$$

Réservoir sphérique sous pression

Dans la zone plastique,

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{el} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{pl} \qquad \underline{\underline{\varepsilon}}^{el} = \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}} : \underline{\underline{\sigma}} \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{R}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{el}$$

en particulier $\quad tr\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) = \left(3K\right) tr\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{el}\right)$

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{pl} = \frac{3}{2}\lambda \frac{\underline{\underline{s}}}{R}$$

en particulier $\quad tr\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{pl}\right) = 0$

On en déduit :

$$tr\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right) = \frac{\partial \xi_r}{\partial r} + \frac{2\xi_r}{r} = \frac{tr\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)}{3K} = \frac{2R}{3K}\left[3Log\left(\frac{r}{c}\right) + \frac{c^3}{b^3}\right]$$

On en déduit :

$$r^2 \xi_r = \frac{2R}{3K}\left[r^3 Log\left(\frac{r}{c}\right) - \frac{r^3}{3}\left(1 - \frac{c^3}{b^3}\right)\right] + Cste$$

Réservoir sphérique sous pression

Soit :

$$\boxed{\xi_r = \frac{2R}{3K}\left[rLog\left(\frac{r}{c}\right) - \frac{r}{3}\left(1 - \frac{c^3}{b^3}\right)\right] + \frac{Cste}{r^2}}$$

Réservoir sphérique sous pression

Nous voulons déterminer le champ de déplacement dans la zone plastique.

Question 12 :

La constante peut être déterminée par continuité du champ de déplacement en $r = c$

Après avoir exprimé le déplacement radial en $r = c^{+}$ calculer la constante dõintégration qui permet la détermination du champ de déplacement dans la partie plastique.

Réservoir sphérique sous pression

$$\xi_r = \frac{2R}{3K}\left[rLog\left(\frac{r}{c}\right) - \frac{r}{3}\left(1-\frac{c^3}{b^3}\right)\right] + \frac{Cste}{r^2}$$

La constante peut être déterminée par continuité du champ de déplacement en $r = c$

qui vaut dœaprès la solution dans la partie élastique :

$$\xi_r(c) = \frac{2R}{3K}\left[-\frac{c}{3}\left(1-\frac{c^3}{b^3}\right)\right] + \frac{Cste}{c^2} = \frac{2c^3R}{3b^3}\left(\frac{c}{3K}+\frac{b^3}{4\mu c^2}\right)$$

soit :

$$Cste = \frac{2c^3R}{3}\left(\frac{1}{3K}+\frac{1}{4\mu}\right)$$

Réservoir sphérique sous pression

Question 13 :

Déterminer $p(r)$ la déformation plastique cumulée si $a \leq r < c$ en fonction de $K, \mu, c, R \; et \; r$

Réservoir sphérique sous pression

Le champ de déformation totale dans la zone plastique vaut :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{2R}{3K}\left[Log\left(\frac{r}{c}\right)+1-\frac{1}{3}\left(1-\frac{c^3}{b^3}\right)\right]-2\frac{Cste}{r^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2R}{3K}\left[Log\left(\frac{r}{c}\right)-\frac{1}{3}\left(1-\frac{c^3}{b^3}\right)\right]+\frac{Cste}{r^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2R}{3K}\left[Log\left(\frac{r}{c}\right)-\frac{1}{3}\left(1-\frac{c^3}{b^3}\right)\right]+\frac{Cste}{r^3} \end{bmatrix}$$

Notons $\underline{\underline{e}}$ le déviateur de $\underline{\underline{\varepsilon}}$

$$\underline{\underline{e}} = \begin{bmatrix} \frac{4R}{9K}-2\frac{Cste}{r^3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2R}{9K}+\frac{Cste}{r^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2R}{9K}+\frac{Cste}{r^3} \end{bmatrix}$$

Réservoir sphérique sous pression

$$\underline{\underline{e}}^{el} = \frac{1}{2\mu}\underline{\underline{s}} = \frac{1}{2\mu}\begin{bmatrix} \frac{-2R}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R}{3} \end{bmatrix}$$

On en déduit

$$\underline{\underline{e}}^{pl} = \begin{bmatrix} \frac{4R}{9K} + \frac{R}{3\mu} - 2\frac{Cste}{r^3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2R}{9K} - \frac{R}{6\mu} + \frac{Cste}{r^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2R}{9K} - \frac{R}{6\mu} + \frac{Cste}{r^3} \end{bmatrix}$$

Réservoir sphérique sous pression

$$\underline{\underline{e}}^{pl} = \begin{bmatrix} \frac{4R}{9K} + \frac{R}{3\mu} - 2\frac{Cste}{r^3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2R}{9K} - \frac{R}{6\mu} + \frac{Cste}{r^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2R}{9K} - \frac{R}{6\mu} + \frac{Cste}{r^3} \end{bmatrix}$$

$$Cste = \frac{2c^3R}{3}\left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{4\mu}\right)$$

$$\underline{\underline{e}}^{pl} = \left(\frac{4R}{9K} + \frac{R}{3\mu} - 2\frac{Cste}{r^3}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{4R}{3}\left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{4\mu}\right)\left(1 - \frac{c^3}{r^3}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Réservoir sphérique sous pression

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{pl} = \underline{\underline{\dot{e}}}^{pl} = \frac{3}{2}\lambda\frac{\underline{\underline{s}}}{R} = -\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{e}}^{pl} = \frac{4R}{3}\left(\frac{1}{3K}+\frac{1}{4\mu}\right)\left(1-\frac{c^3}{r^3}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \dot{p}$$

Ainsi *p(r)* la déformation plastique cumulée vaut :

$$p(r) = -\left[\frac{4R}{3}\left(\frac{1}{3K}+\frac{1}{4\mu}\right)\left(1-\frac{c^3}{r^3}\right)\right] \geq 0$$

si $\quad a \leq r < c$

Réservoir sphérique sous pression

Question 14 :

Déterminer une relation paramétrique « variation de volume-pression »

Réservoir sphérique sous pression

Détermination de la relation variation de volume-pression

Dans la zone plastique

$$\xi_r = \frac{2R}{3K}\left[rLog\left(\frac{r}{c}\right) - \frac{r}{3}\left(1 - \frac{c^3}{b^3}\right)\right] + \frac{2c^3R}{3r^2}\left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{4\mu}\right)$$

La variation de volume du réservoir vaut (hypothèse HPP):

$$V(c) = 4\pi a^2 \xi_r(a) = 4\pi a^2 \left[\frac{2R}{3K}\left[aLog\left(\frac{a}{c}\right) - \frac{a}{3}\left(1 - \frac{c^3}{b^3}\right)\right] + \frac{2c^3R}{3a^2}\left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{4\mu}\right)\right]$$

Rappelons lôexpression de $P(c)$

$$P(c) = 2R\left[\frac{\left(b^3 - c^3\right)}{3b^3} + Log\left(\frac{c}{a}\right)\right]$$

On obtient ainsi une expression paramétrique de V en fonction de P

Réservoir sphérique sous pression

Question 15 :

Déterminer la variation de pression à la décharge entraînant une replastification.

Réservoir sphérique sous pression

Détermination de la variation de pression à la décharge entraînant une replastification.

Si la décharge est élastique, le champ de contrainte est celui obtenu pour la charge maximale P_1

auquel on ajoute le champ de contrainte de la solution élastique pour la pression ΔP

On voit alors facilement que la replastification aura lieu en $r = a$ pour

$$\Delta P = 2P_e = R\frac{4}{3}\frac{b^3 - a^3}{b^3}$$

En effet le déviateur des contraintes en $r = a$ vaut alors :

$$\underline{\underline{s}} = \begin{bmatrix} \frac{2R}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-R}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-R}{3} \end{bmatrix}$$