*ENPC – Cours de **Géomécanique et Géotechnique Avancée***

TD1- Elasticité Anisotrope 2017-2018

Exercice : Elasticité anisotrope

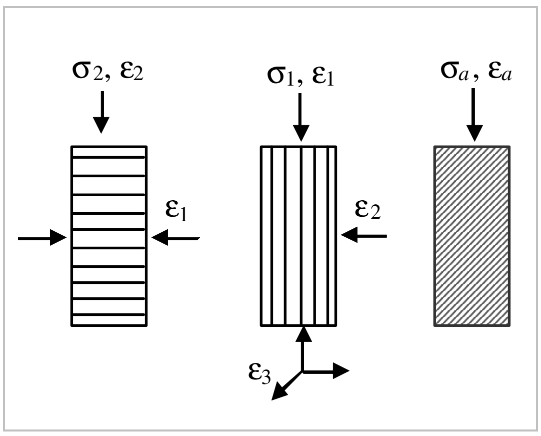
On souhaite déterminer les coefficients d'élasticité anisotrope d'une roche d'isotropie transverse à l'aide des essais de compressions simple réalisés sur des éprouvettes prélevées dans différentes directions de la roche.

On note E_1, E_2, ν_{12}, ν_{21}, ν_{13}, G_{12} ($G_{12}= \mu_{12}$) les paramètres d'élasticité d'isotropie transverse conformément aux notations du cours avec la **direction 2** prise pour l'axe de symétrie.

I. Déterminer à l'aide de la formule d'établie dans le cours, l'expression du module d'Young dans une direction faisant un angle θ avec l'axe de symétrie en fonction des paramètres ci-dessus.

II. Analyse des résultats d'essais :

1. On réalise un essaie de compression simple dans la direction normale au plan de schistosité. Une compression axiale de σ_{22}= -2 MPa produit une déformation axiale $\varepsilon_{22}=-10^{-4}$ et latérale $\varepsilon_{11}=0.2\ 10^{-4}$. Quels paramètres peut-on ainsi déterminer ?
2. On réalise ensuite un essai de compression simple dans la direction parallèle au plan de schistosité Ox_1. Une compression σ_{11}= -2 MPa produit une déformation $\varepsilon_{11}=-4.0\ 10^{-5}$ et latérale $\varepsilon_{33}=10^{-5}$.
   - Quels paramètres cela permet de déterminer ?
   - Que doit être la valeur de ε_{22} mesurée dans cet essai ? Justifier.
3. Pour déterminer G_{12}, on réalise un troisième essai de compression simple sur une éprouvette prélevée dans une direction faisant un angle de 45° avec la schistosité (figure). On applique une contrainte de compression axiale σ_a= -2 MPa et on mesure une déformation axiale $\varepsilon_a=-5.0\ 10^{-5}$. En utilisant les formules de cours pour le module d'Young dans différentes directions du matériau à isotropie transversale, déterminer le G_{12}.



Corrigé :

Partie I) Appliquons une contrainte uniaxiale σ_a dans la direction $\underline{n}$ du plan (x_1,x_2) faisant un angle θ avec la direction x_1 :

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_a\, \underline{n}\otimes\underline{n}\ , \qquad \underline{n} = \cos\theta\ \underline{e}_1 + \sin\theta\ \underline{e}_2$$

La déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ sera est donnée par :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma} = \sigma_a\, \mathbb{S} : \underline{n}\otimes\underline{n}$$

La déformation ε dans la direction de la contrainte $\underline{n}$ se calcule par $\varepsilon = \underline{n}.\boldsymbol{\varepsilon}.\underline{n}=\boldsymbol{\varepsilon}: (\underline{n}\otimes\underline{n})$ soit :

$$\varepsilon_a = \sigma_a\, (\underline{n}\otimes\underline{n}) : \mathbb{S} : (\underline{n}\otimes\underline{n})$$

Le module d'Young $E(\underline{n})$ dans la direction $\underline{n}$ correspond au rapport σ/ε. Soit donc:

$$\frac{1}{E(\underline{n})} = \underline{n}\otimes\underline{n} : \mathbb{S} : \underline{n}\otimes\underline{n} = S_{ijkl}\, n_i\, n_j\, n_k\, n_l$$

Avec les symétries du tenseur $\mathbb{S}$ pour le cas d'isotropie transversale et plus précisément son orthotropie, et le fait que les composantes de $\underline{n}$ se réduisent à $n_1=\cos\theta$ et $n_2=\sin\theta$, on trouve :

$$S_{ijkl} n_i\ n_j\ n_k\ n_l = S_{1111}\cos^4\theta + (2S_{1122}+4S_{1212})\cos^2\theta\sin^2\theta + S_{2222}\sin^4\theta$$

En remplaçant, d'après les notation du cours, les S_{ijkl} du cas orthotrope par les modules et les coefficients de Poisson dans les différentes directions, on trouve :

$$\frac{1}{E(\theta)} = \frac{\cos^4\theta}{E_1} + \left(\frac{1}{\mu_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1}\right)\cos^2\theta\sin^2\theta + \frac{\sin^4\theta}{E_2}$$

Partie II)

1. $E_2=\sigma_{22}/\varepsilon_{22} = 2.10^4$ MPa , $\varepsilon_{11}= -\nu_{21}\ \varepsilon_{22}$ donc $\nu_{21} =0.2$

2. $E_1=\sigma_{11}/\varepsilon_{11}=5.\ 10^4$ MPa, $\varepsilon_{33}= -\nu_{13}\ \varepsilon_{11}$ donc $\nu_{13} = 0.25$
   On a $\nu_{12}/E_1 = \nu_{21}/E_2$, donc $\nu_{12} = \nu_{21}E_1/E_2= 0.2*2.5=0.5$,
   On doit aussi avoir $\varepsilon_{22}=- \nu_{12}\ \varepsilon_{11}=2.\ 10^{-5}$
3. On calcule
   $E_a = \sigma_a/\varepsilon_a = 4.\ 10^4$ MPa.
   La formule ci-dessous pour $\theta= \pi/4$ donne :
   $$\frac{1}{E_a} = \frac{1}{4E_1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\mu_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1}\right) + \frac{1}{4E_2} \quad \text{soit :} \quad \frac{1}{\mu_{12}} = \frac{4}{E_a} - \frac{1}{E_2} - \frac{1-2\nu_{12}}{E_1}$$
   On trouve : $\mu_{12}=2.\ 10^4$ MPa