



École des Ponts

ParisTech

École des Ponts ParisTech
Département Génie Mécanique et Matériaux

GRIMOIRE

Mécanique Physique des Matériaux

Daniel Weisz-Patrault

Chargé de Recherches CNRS
Laboratoire de Mécanique des Solides
École Polytechnique, Palaiseau

Professeur

École des Ponts ParisTech

Alain Ehlacher

Directeur de Recherches
Laboratoire Navier
École des Ponts ParisTech

Professeur

École des Ponts ParisTech

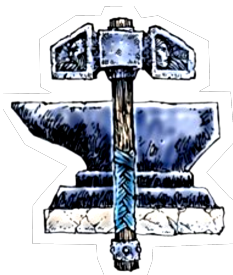


Table des matières

Table des matières	iii
Avant-propos	1
Introduction	3
Présentation générale	4
Responsabilité des ingénieurs	5
1 Classification des matériaux	7
1.1 Les forces à l'origine de la cohésion de la matière	8
1.2 La classification classique	17
1.3 Les comportements classiques	18
1.4 La classification ingénieur	25
1.5 Les bases de données matériaux et propriétés d'usage	27
1.6 Exercices	29
1.7 Solutions	31
2 Une méthode générale de modélisation en mécanique	37
2.1 Qu'est-ce qu'un modèle de mécanique	39
2.2 Niveau 1 : Géométrie et cinématique	39
2.3 Niveau 2 : Définition des efforts	59
2.4 Niveau 3 : Thermodynamique et comportement	66
3 La Mécanique des milieux tridimensionnels classique	75
3.1 Niveau 1 : Description du mouvement dans un milieu de Cauchy	76
3.2 Niveau 2 : Définition des efforts	83
4 Écriture générale des relations constitutives dans les milieux de Cauchy	85
5 Comportement des polymères et des élastomères	87
6 Les origines physiques de la plasticité	89
7 Élasto-plasticité sous l'hypothèse des petites perturbations	91

8	Élasto-plasticité en grandes transformations	93
8.1	Rappels sur les convexes	94
8.2	Décomposition multiplicative du gradient de la transformation	96
8.3	Description du mouvement	99
8.4	Contraintes	100
8.5	Choix des variables d'état et hypothèses thermodynamiques	102
8.6	Analyse thermodynamique des processus de déformation	105
8.7	Isotropie (élasticité et écrouissage) et Néo-Hookéen	111
8.8	Illustration en traction simple	114
9	Contraintes résiduelles	115
10	Microstructures et transitions de phase	117

Avant-propos

L'objectif principal de ce cours est de fournir la culture minimale permettant d'écrire des comportements de matériaux en grandes déformations et de comprendre les concepts utilisés par les codes de calculs industriels pour les calculs en grandes transformations.

Alain Ehrlacher

École des Ponts ParisTech

Champs-sur-Marne, 2018

J'ai le privilège de succéder à Alain Ehrlacher pour enseigner son cours de Mécanique Physique des Matériaux à l'École des Ponts ParisTech. Ce cours se veut être un cours structurant et général pour la formation des ingénieurs du département Génie Mécanique et Matériaux. Il est articulé autour de trois axes principaux :

- 1) une méthode systématique de construction de modèle de mécanique
- 2) la mécanique en grandes transformations
- 3) l'écriture des lois de comportement et leurs liens avec les principes physiques et la structure interne des matériaux

Ce cours est particulièrement pertinent pour les ingénieurs en génie mécanique pour des applications diverses qui sous-tendent bon nombre de secteurs utiles aux sociétés humaines, comme la mise en forme des matériaux et les procédés de fabrication (laminage, extrusion, emboutissage, forgeage mais aussi des procédés plus récents comme la fabrication additive etc.) impliquant souvent 1) de développer des modèles spécifiques qui ne sont pas inclus dans les grands logiciels de calcul au éléments finis, 2) des déformations très importantes, et 3) de choisir des comportements adaptés aux matériaux utilisés dans les conditions d'exploitation visées. D'autres applications présentant le même rapport aux trois axes du cours sont aussi visées comme l'étude de crash ou la modélisation de structures complexes en aéronautique ou aérospatial, des pièces mécaniques pour l'industrie nucléaire et dans le secteur de l'énergie plus généralement.

Un point crucial pour les ingénieurs œuvrant dans l'industrie est de bien connaître les bases théoriques sur lesquelles reposent leurs calculs pour comprendre les entrées et sorties des codes qu'ils utiliseront et de bien comprendre quelle physique est représentée par leurs modèles pour ne pas les utiliser à contre-emploi ou en dehors de leur domaine de validité, ce qui conduirait à des erreurs graves. D'une manière générale ce cours a pour ambition de donner aux étudiants un regard critique sur la pertinence de leurs calculs par rapport à la situation visée, et de contribuer à en faire des ingénieurs responsables du point de vue de la sécurité des structures, qu'ils auront à concevoir ou superviser. Du fait

de son caractère abstrait et mathématisé, des développements rigoureux et de la réflexion sur les concepts physiques, ce cours est une bonne introduction à certains outils de la recherche en mécanique des solides (en revanche les outils de la recherche expérimentale sont peu développés).

J'ai repris l'essentiel du contenu du cours d'Alain Ehrlacher, y compris la majeure partie des quatre premiers chapitres du présent polycopié, qui étaient déjà rédigés. Le projet pédagogique reste inchangé, cependant l'introduction du module de Mécanique de la Rupture au second semestre m'a permis de supprimer les séances consacrées à la mécanique linéaire de la rupture, et ainsi d'introduire deux nouvelles séances portant sur les contraintes résiduelles et les transitions de phase.

La structure de ce polycopié suit celle des séances de cours. Chacune des douze séances fait donc l'objet d'un chapitre à part entière. Tous les développements nécessaires à la compréhension sont intégrés dans ce texte. De plus, des exercices et leur corrigé accompagnent ce cours. Le résumé des résultats essentiels et les plus importants à bien mémoriser sont synthétisés sous forme d'un encadré à la fin de chaque chapitre. Par ailleurs, des vidéos de cours sont disponibles pour revoir les séances sur une [playlist](#) structurée. Ces vidéos sont un complément des autres supports de cours disponibles sur educnet (slides des présentations, exercices corrigés, et le présent polycopié). Les captations des cours dispensés par Alain Ehrlacher en 2013 sont également disponibles sur educnet.

Daniel Weisz-Patrault
École des Ponts ParisTech
Palaiseau, 2021

Introduction

Contents

Présentation générale	4
Responsabilité des ingénieurs	5
Sécurité	5
Morale des ingénieurs	5
Pensée méthodique et scientifique	5

Présentation générale

Pour Moradin¹, l'activité la plus noble de l'homme, du nain, est l'ingénierie pour la conception de nouveaux objets, machines ou structures utiles à la société et aidant la transition énergétique. Pour ce faire l'ingénieur utilise des matériaux dont les comportements mécaniques sont très divers et il "dimensionne" ces objets en fonction de ces comportements et des propriétés recherchées pour l'objet. (Il doit aussi concevoir les procédés pour fabriquer ces matériaux et les mettre dans la forme requise par l'application envisagée, faisant appel ici encore au comportement mécanique des matériaux).

Mais au fait, qu'entend-t-on par comportement mécanique des matériaux ? Si l'on peut donner une réponse intuitive à cette question, cette dernière n'est guère satisfaisante par son manque de précision. En effet, le comportement évoque des notions communes, comme la dureté, la souplesse etc. Cependant, si l'on se comprend à peu près dans le langage courant, en utilisant ces termes, c'est uniquement parce que nous parlons vite. Mais pour être utiles à l'ingénieur ces termes doivent correspondre à une définition bien plus précise, de nature mathématique. On pourrait préciser un peu les choses et définir le comportement comme une relation spécifique au matériau en question, qui relie les efforts appliqués et la réponse en déformation (ces deux dernières notions étant prise dans un sens très large). Cependant, en y réfléchissant, on comprend vite que même cette définition est trop imprécise, et que le problème de définir ce qu'est un comportement ne prend un sens clair que dans le cadre de la construction d'un modèle mécanique mathématisé, pour la famille des objets envisagés. Ainsi l'ingénieur doit en premier lieu inventer une description du monde et de la famille des objets qui l'intéressent, adaptée à son action de conception.

Il est tout d'abord interpellé par la nature géométrique de ces objets. Ainsi il ne verra pas de la même façon un objet très allongé de type poutre ou arc, dont une des dimensions est bien supérieure aux autres, un objet plutôt de type surfacique, comme une plaque, une coque ou un objet massif étendu dans les trois dimensions de notre espace. Il cherche ensuite à proposer une disposition pertinente de la matière dans le domaine défini par le choix géométrique précédent.

Bien sûr dans un objet banal, il considérera que chaque point du domaine est occupé par une particule, mais il prendra vite conscience que ce point de vue est inadapté à la description d'un sol saturé par exemple, si l'on ne veut pas entrer dans une description à trop petite échelle de l'objet considéré. Il inventera alors un modèle de matière dans lequel plusieurs particules de types différents peuvent cohabiter au même point.

Il se posera enfin la question de la nature de ces particules qui doivent être disposées dans le domaine décrivant l'objet. Abandonnant si nécessaire la description de sa famille d'objets à l'aide de particules ponctuelles, il pourra considérer celles-ci comme des micro-objets rigides voire déformables. C'est notamment le cas pour les objets élancés rigides en flexion, dans lesquels la rotation relative des sections voisines (variation de courbure) est le phénomène prépondérant d'un point de vue mécanique.

Ainsi, avant de parler de comportement de matériau, il est nécessaire d'avoir une compréhension approfondie de ce qu'est un modèle de mécanique et c'est l'objet du deuxième chapitre, via l'exposé d'une méthode générale de modélisation en mécanique de donner au lecteur cette compréhension.

1. Je vous laisse le plaisir de découvrir seul qui est Moradin, être bien sympathique pour les ingénieurs.

Les modèles de mécanique étant nombreux, il est nécessaire d'en choisir un pour avancer dans la description de ce que peut être un comportement mécanique de matériaux. Nous retiendrons le modèle conceptuellement le plus simple et dont le domaine de pertinence est très étendu. Il s'agit de la mécanique des milieux continus tridimensionnels, classique dites aussi mécanique des milieux de Cauchy. Les concepts de déformations et d'efforts intérieurs seront donc construits dans le cadre de ce modèle et les équations d'équilibre seront établies. Cela fera l'objet du chapitre trois. Tous les concepts seront établis dans le cadre théorique des grandes transformations puisque ce sont ces concepts qui sont nécessaires pour l'activité de l'ingénieur concepteur en génie mécanique.

Il sera alors possible, au chapitre quatre, d'étudier l'écriture générale des comportements (ce qu'on appelle plus techniquement les relations constitutives) dans les milieux de Cauchy. Pour cette étude nous aurons recours à une analyse thermodynamique des processus de déformations. Nous établirons ainsi qu'un comportement de matériau ne peut pas se limiter à une relation entre l'histoire de la déformation locale et l'histoire de la contrainte, mais qu'il est nécessaire de faire intervenir d'autres grandeurs, dites constitutives, dont plusieurs de nature thermodynamique. Ensuite, nous montrerons comment les principes de la thermodynamique et un principe dit "d'indifférence matérielle" limitent les libertés pour écrire ces comportements.

Une fois ces bases établies, il est alors possible d'étudier des familles particulières de matériaux comme les élastomères, les métaux, les céramiques, etc....et d'établir les relations mathématiques exprimant leur comportement dans le cadre de la mécanique des milieux de Cauchy. Ceci sera développé au deuxième tome de ce cours. Ces développements sont précédés d'un premier chapitre présentant très sommairement l'origine physique de la cohésion de la matière et la classification des matériaux qui en résulte.

Responsabilité des ingénieurs

Sécurité

Morale des ingénieurs

Pensée méthodique et scientifique

Chapitre 1

Classification des matériaux

Contents

1.1	Les forces à l'origine de la cohésion de la matière	8
1.1.1	Liaisons fortes ou inter-atomiques	8
1.1.2	Liaisons faibles ou inter-moléculaires	14
1.2	La classification classique	17
1.3	Les comportements classiques	18
1.3.1	Le comportement typique des céramiques : élastique endommageant	19
1.3.2	Le comportement typique des métaux : élastoplasticité	21
1.3.3	Le comportement typique des polymères : viscoélasticité	23
1.4	La classification ingénieur	25
1.5	Les bases de données matériaux et propriétés d'usage	27
1.6	Exercices	29
1.7	Solutions	31

Les ingénieurs en génie mécanique ont besoin, pour travailler, d'utiliser des matériaux spécifiques à leurs besoins, parmi de très nombreux matériaux. Pour donner une structure et offrir des outils efficaces d'aide à la décision, les matériaux doivent être classés. Une idée commune et naturelle, pour classer les matériaux, consiste à prendre en compte la nature physique des liaisons internes, assurant la cohésion de la matière à l'échelle atomique. La nature de ces liaisons a d'ailleurs, comme on peut s'y attendre, une influence déterminante sur le type de comportement macroscopique du matériau. Dans ce chapitre, consacré à la classification des matériaux, nous verrons tout d'abord, dans un premier paragraphe, une description succincte des forces à l'origine de la cohésion de la matière à l'échelle atomique. Cette présentation simple ne se substitue évidemment pas à un cours de chimie, mais présente une vision idéalisée minimale pour les ingénieurs en génie mécanique. Dans le deuxième paragraphe nous présenterons la classification classique des matériaux construite à partir de ces différentes forces. Dans le troisième paragraphe nous étudierons les principaux types de comportement de matériaux et la relation entre ces types de comportement et la famille de matériaux considérée. Dans le quatrième paragraphe nous présenterons une variante de la classification classique, appelée classification ingénieur, mieux adaptée à l'usage, en particulier, de l'ingénieur concepteur. Enfin, dans le cinquième et dernier paragraphe nous présenterons l'information qu'il est possible de trouver dans les bases de données de matériaux, et notamment les propriétés d'usage indispensables au choix des matériaux dans les opérations de conception des objets et produits.

1.1 Les forces à l'origine de la cohésion de la matière

La matière est constituée d'atomes liés entre eux par des liaisons inter-atomiques de nature principalement électrostatique. On distingue les liaisons fortes dont l'énergie de liaison est supérieure à 50 kJoules/mole et les liaisons faibles dont l'énergie de liaison peut varier de 4 à 50 kJoules/mole (où 1 mole $\approx 6.022 \times 10^{23}$ éléments). Les premières liaisons peuvent résister à des températures relativement élevées (T_c de 1000 K à 5000 K), alors que les secondes liaisons sont détruites à des températures beaucoup plus faibles (T_c de 100 K à 500 K).

1.1.1 Liaisons fortes ou inter-atomiques

Nous distinguons trois types de liaisons fortes :

- Les liaisons ioniques
- Les liaisons covalentes
- Les liaisons métalliques

Liaisons ioniques ou électro-covalentes

Prenons un exemple : la liaison ionique (ou électro-covalente) dans le chlorure de sodium. Considérons un atome de sodium isolé Na. Il contient 11 électrons dont un électron isolé sur sa couche de valence (i.e., couche externe). Celui-ci peut assez facilement être arraché (on parle de cation) si l'on fournit une énergie de 5,14 eV (potentiel d'ionisation)

($1 \text{ eV} \approx 1,602 \times 10^{-19}$ Joules), soit environ 500 kJ/moles. Considérons maintenant un atome de chlore Cl. Il contient 17 électrons dont 7 sur la couche de valence. La règle de l'octet traduit le fait qu'un atome a tendance à être plus stable (i.e., plus bas en énergie) si sa couche de valence est du même type que le gaz noble le plus proche dans la classification périodique des éléments. Ainsi, cet atome peut absorber un électron supplémentaire (on parle d'anion) sur cette couche de valence pour en totaliser huit, et ainsi baisser en énergie de 4,02 eV (i.e., électro-affinité de 4,02 eV), soit environ 390 kJ/moles. Rappelons que l'électro-affinité est, par définition, l'opposé de l'énergie à fournir pour attacher un nouvel électron à l'atome en phase gazeuse. Cependant, on constate qu'il est nécessaire d'apporter 5.14 eV à l'atome de Na pour utiliser cet électron et baisser l'énergie de l'atome de Cl. Le bilan n'est donc à première vue pas intéressant pour le système d'atomes Na-Cl. Mais, les ions Na^+ et Cl^- ainsi créés, étant de charges opposées, sont soumis à une force d'attraction mutuelle de nature électrostatique. Le potentiel de cette force d'attraction est en $1/r$ où r est la distance entre les centres hypothétiques de ces ions. L'énergie du système diminue donc si les deux ions se rapprochent. Lorsque les deux ions sont suffisamment proches, l'influence des deux nuages d'électrons entourant les noyaux des ions se fait sentir sous la forme d'une force répulsive, à croissance très rapide si l'on continue à rapprocher les deux ions (cf. figure 1.1). On comprend ainsi qu'une paire d'ions va se placer à une distance relative r_0 , optimale du point de vue énergétique. Pour un grand nombre d'atomes, les ions se placent selon une grille régulière, qu'on appelle un cristal et qui est également optimale du point de vue énergétique en considérant toutes les interactions électrostatiques. Le bilan énergétique global est alors négatif (réaction exothermique), ce qui assure la cohésion de l'assemblage d'ions ainsi réalisé. Donnons par exemple le bilan énergétique global lorsque l'on fait agir du gaz dichlore Cl_2 sur du sodium solide Na. La réaction s'écrit : $\text{Na(sol)}^+ + \frac{1}{2} \text{Cl}_2(\text{gaz}) \longrightarrow (\text{Na}^+, \text{Cl}^-)(\text{sol}) + 4.26 \text{ eV}$. L'énergie de 4,26 eV (soit environ 410 kJ/moles) émise lors de cette réaction est en relation avec la "solidité" de la liaison inter-atomique. En considérant les valeurs du potentiel d'ionisation du sodium (énergie à fournir 5,14 eV) et l'électro-affinité du chlore (baisse d'énergie de 4,02 eV), on constate que c'est essentiellement la variation du potentiel électrostatique, associé à la variation de la distance entre les ions, qui assure la cohésion de la molécule NaCl solide, (cf. figure 1.2).

Ce qui vient d'être vu, très schématiquement, à propos du chlorure de sodium peut être généralisé à tout solide constitué d'un assemblage d'ions. Le bilan énergétique fait apparaître trois termes.

- 1) Une énergie liée au processus d'ionisation de chaque atome
- 2) Une énergie liée au potentiel d'attraction électrostatique entre les ions dont les charges sont de signe différent
- 3) Une énergie liée au potentiel de répulsion électrostatique des nuages électroniques des deux ions, dont l'effet n'est sensible que lorsque les deux ions sont très proches.

Le premier terme 1) peut être déterminé à l'aide du tableau des variations des potentiels d'ionisation et d'électro-affinité (cf. figure 1.3). Il suffit de faire la différence entre le potentiel d'ionisation de l'atome qui cède un électron et l'électronégativité de l'atome qui absorbe un électron. Bien entendu certains atomes cèdent ou absorbent plusieurs électrons pour compléter leur couche de valence selon la règle de l'octet, il faut alors considérer

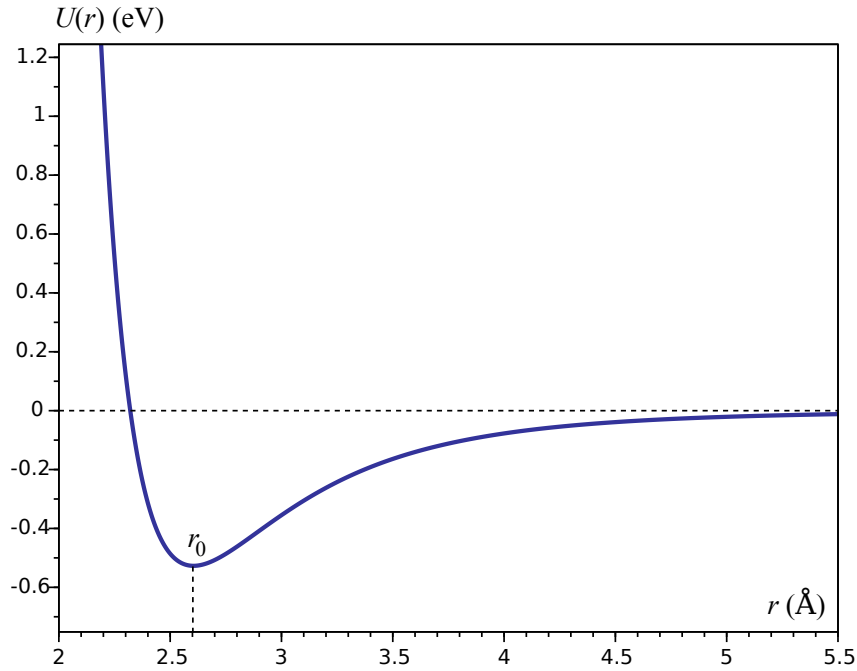


FIGURE 1.1 – Potentiel inter-atomique.

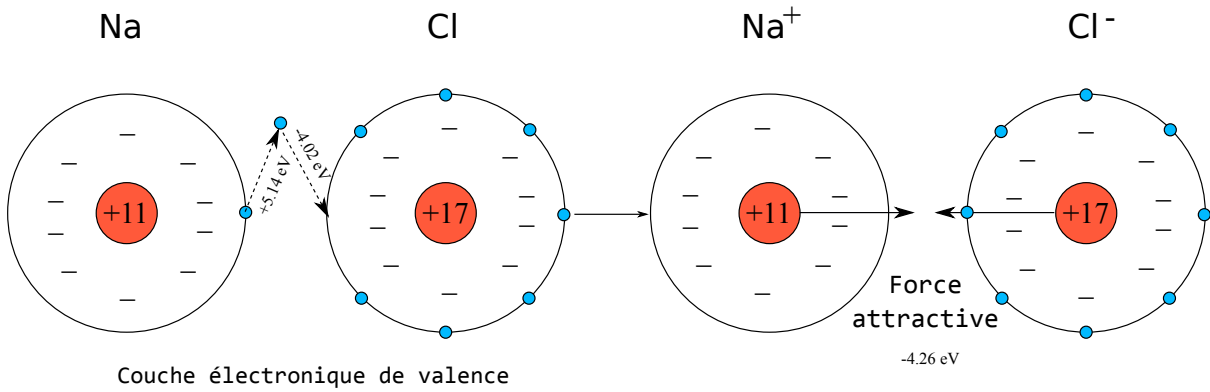


FIGURE 1.2 – Schéma de la réaction $\text{Na} + \frac{1}{2}\text{Cl}_2 \longrightarrow (\text{Na}^+, \text{Cl}^-) + 4.26\text{eV}$.

les potentiels d'ionisation successifs (chaque électron cédé ou absorbé fait intervenir une énergie différente). Le second terme 2) correspond à un potentiel attractif (négatif) en $1/r$. Le dernier terme 3) correspond à un potentiel répulsif (positif) en $1/r^n$ avec n pouvant varier suivant les détails de l'assemblage entre 7 et 10. Le potentiel combinant les contributions 2) et 3) s'écrit donc :

$$U = U_i - \underbrace{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}}_{\text{Attraction}} + \underbrace{\frac{\beta}{r^n}}_{\text{Répulsion}}, \quad (7 < n < 10) \quad (1.1)$$

Où q est la charge portée par chaque ion exprimée en Coulomb, ϵ_0 est la permittivité du vide valant $\epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{A}^2 \cdot \text{s}^4$ (F.m⁻¹), et β est une constante liée au phénomène de répulsion des nuages d'électrons des ions, exprimée en Jmⁿ par liaison. Si l'on trace ce potentiel en fonction de la distance inter-ions r , on constate comme évoqué

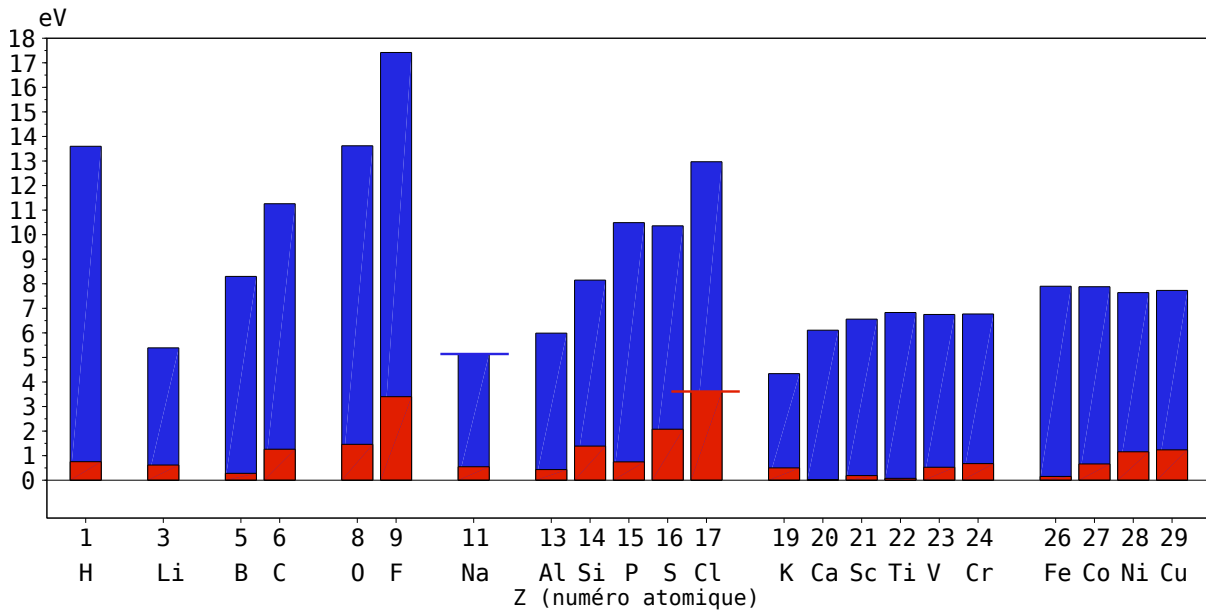


FIGURE 1.3 – Potentiel d’ionisation (bleu) et électro-affinité en eV pour divers éléments chimiques. Pour une paire d’atome la différence entre le potentiel d’ionisation et l’électro-affinité représente le coût énergétique associé à l’émission/absorption de l’électron (ce coût est largement compensé par le gain énergétique associé à l’interaction électrostatique qui résulte du processus).

plus haut, qu’il existe une distance optimale r_0 donnant la distance inter-ions en l’absence d’excitation ou de force extérieure (cf. figure 1.1).

Liaisons covalentes

Certains atomes mettent en commun des doublets d’électrons. Ce processus énergétiquement favorable diminue l’énergie interne de l’assemblage assurant la cohésion de celui-ci. C’est la liaison covalente. Sans entrer dans les détails, une liaison covalente se produit généralement entre deux non-métaux dont l’électronégativité est similaire. L’électronégativité d’un atome est une grandeur physique qui caractérise sa capacité à attirer les électrons lors de la formation d’une liaison chimique avec un autre atome. Si on prend l’exemple de la molécule de dihydrogène, chaque atome d’hydrogène, qui la compose, a un électron sur sa couche de valence et gagnerait en stabilité en absorbant un électron, rendant similaire sa couche de valence à celle d’un atome d’hélium particulièrement stable (i.e., règle du duet, qui est l’équivalent de la règle de l’octet). Les deux atomes attirent de manière similaire les électrons de l’autre atome, car leurs électronégativités sont similaires (et même identiques pour le cas de deux atomes identiques, comme pour la molécule de dihydrogène). Il résulte une zone de concentration du nuage électronique de sorte que l’on dit que les atomes ont mis en commun un électron de leur couche de valence. Même si l’ensemble est de charge globalement neutre (les charges électroniques négatives compensent les charges positives du noyau), cette concentration du nuage électronique localise en partie la charge négative et crée donc un léger déséquilibre dans la répartition des charges, ce qui une fois encore crée une force électrostatique. On présente quelques exemples schématiques à la figure 1.4. Cependant le déséquilibre des charges due à la

concentration du nuage électronique entre les deux atomes, crée une force électrostatique entre des charges partielles, c'est-à-dire inférieures à la charge d'un électron. On comprend alors pourquoi la liaison covalente est en général moins forte que la liaison ionique (ou électro-covalente). On peut également comprendre la liaison électro-covalente, comme un cas particulier de liaison covalente, où un atome a une électronégativité bien supérieure à celle de l'autre atome et attire ainsi complètement l'électron de l'autre atome sur sa couche de valence. Dans ce cas, le déséquilibre est alors d'une charge complète et non plus partielle.

Il faut également noter que dans le cas d'une liaison covalente, si les atomes qui se lient ne sont pas identiques, leur électronégativité n'est plus identique et l'un des deux atomes concentre davantage vers lui le nuage électronique, c'est-à-dire schématiquement que la mise en commun du ou des électrons se localise plus près de l'atome le plus électronégatif. On voit donc que le déséquilibre de charge n'est plus symétrique entre les atomes, ce qui polarise la molécule et est à l'origine de la forme de cette dernière, comme c'est le cas pour la molécule d'eau H_2O . Une fois encore, on peut caractériser la force électrostatique

Gaz noble le plus proche

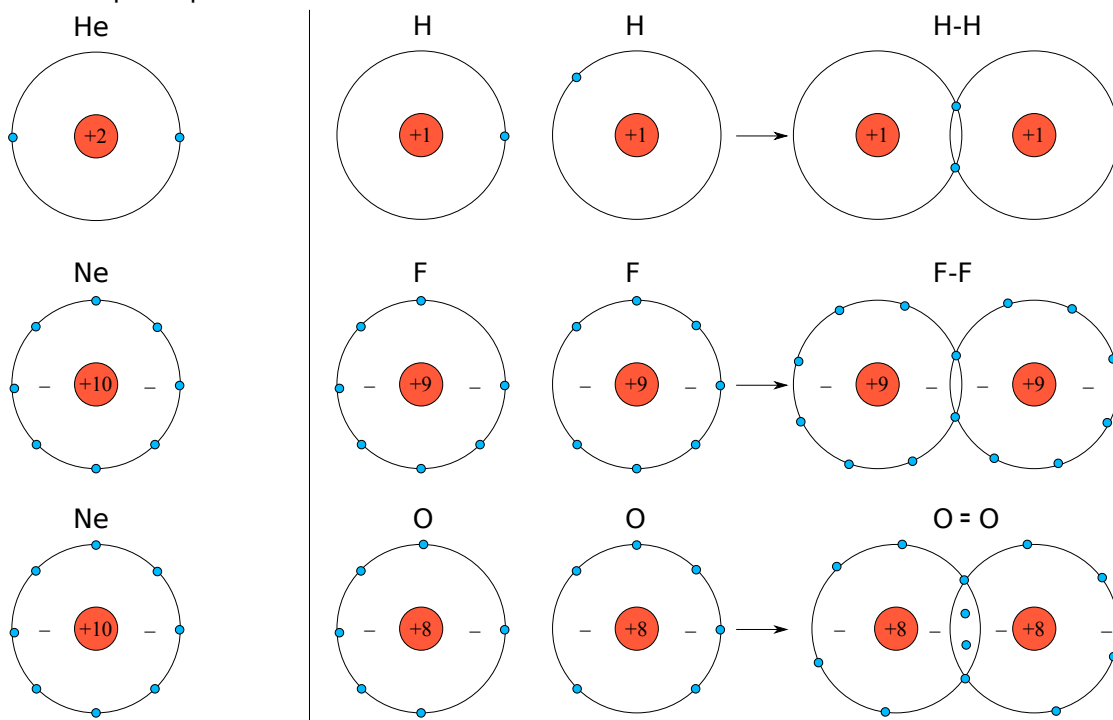


FIGURE 1.4 – Liaisons covalentes.

issue de la liaison covalente par un potentiel d'interaction. Ce dernier à la forme suivante :

$$U = U_i - \underbrace{\frac{\alpha}{r^m}}_{\text{Attraction}} + \underbrace{\frac{\beta}{r^n}}_{\text{Répulsion}}, \quad \begin{matrix} (10 < n < 12) \\ (6 < m < 10) \end{matrix} \quad (1.2)$$

Cette énergie est minimale pour une certaine configuration géométrique entre les différents atomes de la molécule en l'absence d'excitation ou de force extérieure. Si l'on n'a que deux atomes identiques l'énergie est minimale pour une distance r_0 donnant la distance entre ces atomes sans forces extérieures.

Liaisons métalliques

La liaison métallique définit les atomes qu'on appelle des métaux. La cohésion de cette liaison est également de nature électrostatique. La liaison métallique se produit pour des atomes très peu électronégatifs, qui n'ont que quelques électrons sur leur couche de valence. La liaison est schématiquement due au fait que ces atomes laissent en libre circulation leurs électrons de valence pour former un gaz d'électrons libres entre les ions positifs (cations) ainsi formé par la perte des électrons de valence. Les forces électrostatiques qui résultent de l'interaction entre le gaz d'électrons libres et le réseau de cations (en général très bien ordonné sous forme de cristal) assure la cohésion de la liaison. C'est aussi ce gaz d'électron libre qui explique la nature conductrice du courant électrique des métaux. On présente schématiquement la liaison métallique pour l'aluminium à la figure 1.5. Un fois encore la distance inter ions métalliques (ou plus précisément la forme

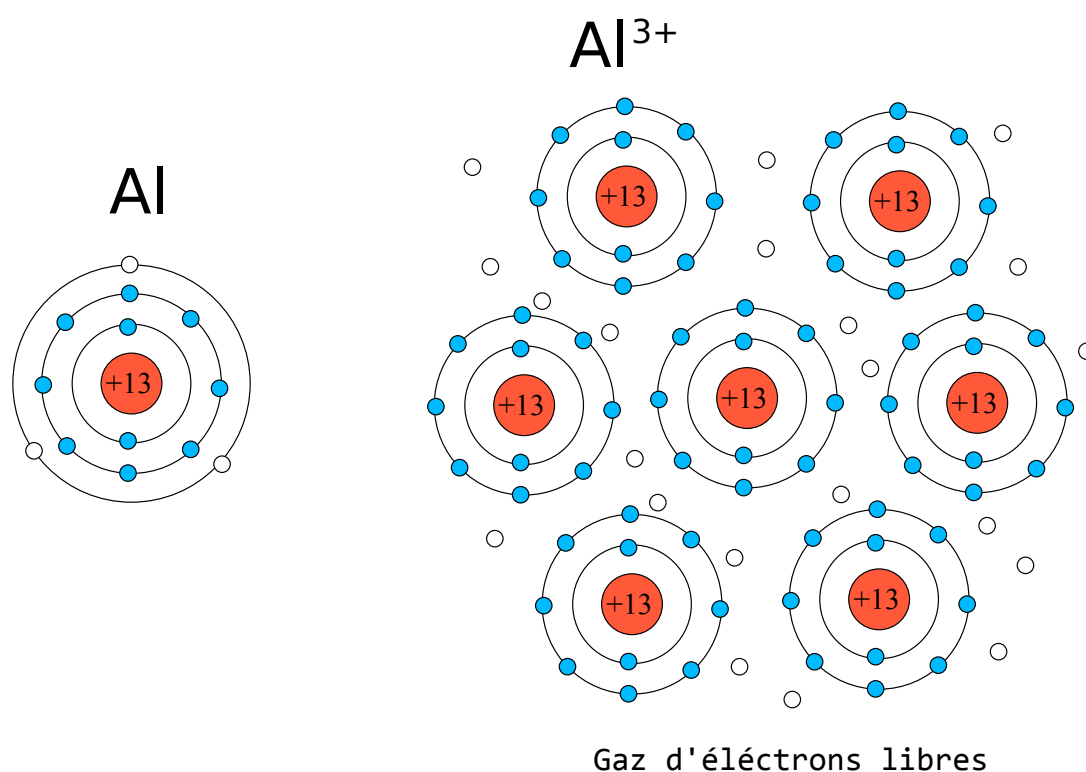


FIGURE 1.5 – Liaison métallique pour l'aluminium.

du réseau cristallin) sera donnée, en l'absence d'excitation ou de force extérieure, par le minimum d'une énergie interne composée principalement d'une partie attractive (négative) associée à la création du nuage d'électron et d'une partie répulsive (positive) liée à la présence des nuages électroniques des couches internes de chaque ion. La forme de cette énergie interne en fonction de la distance inter atomique est similaire à ce que nous avons vu dans les cas précédents. Notons que, dans le tableau de la classification périodique des éléments de Mendeleïev, une très grande majorité d'éléments sont des métaux (cf. figure 1.6). Les 7 principaux métaux utilisés dans les structures, produits et objets actuels sont le magnésium Mg, l'aluminium Al, le titane Ti, le fer Fe, le nickel Ni, le cuivre Cu et le zinc Zn.

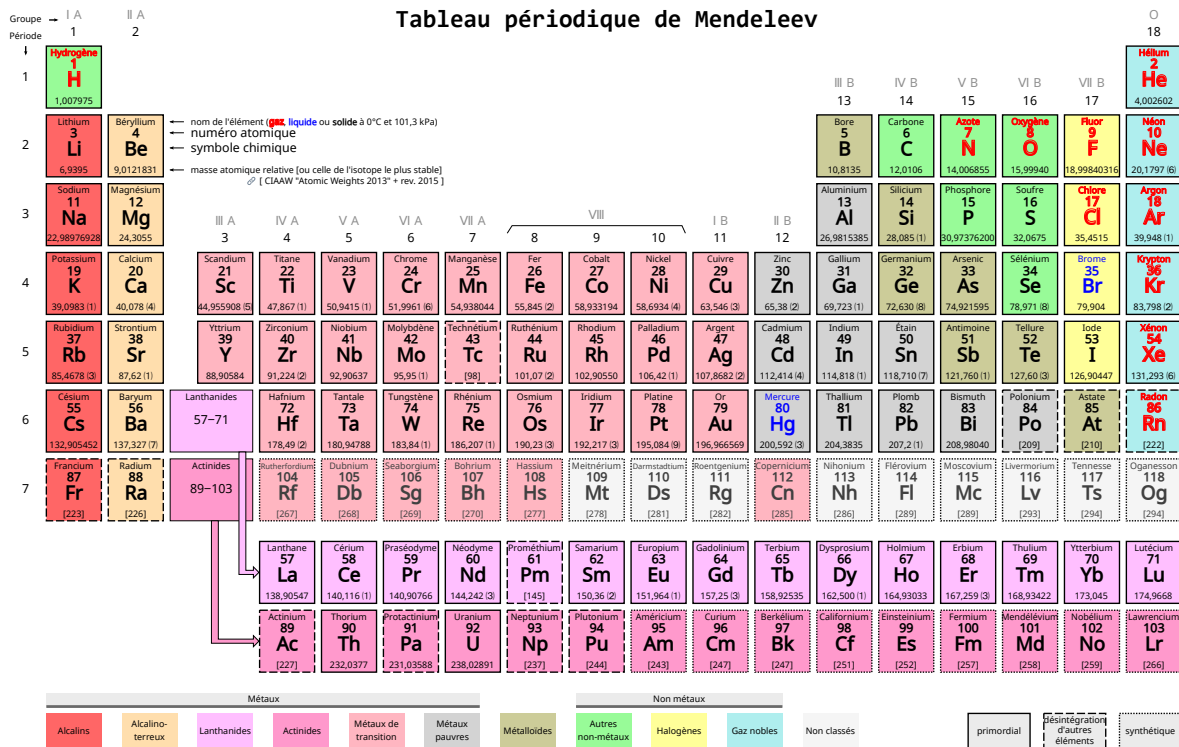


FIGURE 1.6 – Classification périodique des éléments.

1.1.2 Liaisons faibles ou inter-moléculaires

Nous avons vu les liaisons entre atomes qui permettent de former des cristaux ou des molécules. Dans cette section, nous introduisons très sommairement les liaisons faibles entre différentes molécules, dont les deux types principaux sont :

- La liaison de Van der Waals
- La liaison hydrogène

Liaison de Van der Waals

Les charges électriques portées par un atome ou une molécule sont globalement neutres, les charges négatives, portées par l'assemblage, équilibrant les charges positives. Cependant, cet assemblage de charge globalement apolaire dans le temps, n'est pas forcément à symétrie sphérique à un instant donné, ce qui entraîne l'apparition d'un moment dipolaire du fait de la répartition locale des charges négatives par rapport aux charges positives. Ce moment dipolaire crée ainsi un champ électrique, ce qui peut entraîner un léger déplacement des charges dans un assemblage moléculaire voisin, avec l'apparition éventuelle d'une dissymétrie des charges et donc d'un moment dipolaire. Nous parlons alors de moment dipolaire induit. Les deux dipôles ainsi créés s'attirent et l'énergie du système est, une fois encore, fonction de la distance entre les centres. Ce processus est résumé à la figure 1.7, où δ^+ et δ^- symbolisent des charges partielles comme évoquées pour la liaison covalente en section 1.1.1. L'attraction dipolaire a une énergie en $1/r^6$. Les nuages électroniques vont se repousser une fois encore, avec une énergie en $1/r^n$, avec

bien souvent $n = 12$. On a donc un potentiel de la forme :

$$U = U_i - \underbrace{\frac{\alpha}{r^6}}_{\text{Attraction}} + \underbrace{\frac{\beta}{r^n}}_{\text{Répulsion}}, \quad (n \approx 12) \quad (1.3)$$

Cette liaison dipolaire a une énergie beaucoup plus faible que celles des liaisons fortes vues précédemment, mais elle joue un rôle déterminant dans le comportement macroscopique de nombreux matériaux.

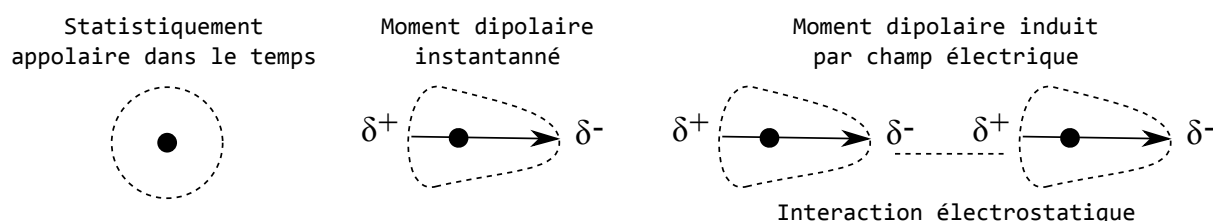


FIGURE 1.7 – Liaison de Van der Waals.

Liaison hydrogène

La liaison hydrogène est, elle aussi, d'origine électrostatique. L'hydrogène engagé dans une liaison covalente avec un autre atome plus électronégatif que lui, partage avec celui-ci son seul électron, "découvrant" ainsi, à l'opposé de cette liaison, un noyau chargé positivement, susceptible d'attirer des charges négatives concentrées près des atomes les plus électronégatifs des molécules voisines. La liaison hydrogène est illustrée pour des molécules d'eau H_2O à la figure 1.8 où les traits pleins symbolisent des liaisons covalentes et les traits en pointillés symbolisent les liaisons hydrogènes issues de l'interaction électrostatique entre une charge partielle positive δ^+ (à l'opposé de la liaison covalente entre l'atome hydrogène et l'atome d'oxygène), et les charges partielles négatives $2\delta^-$ portées par l'atome d'oxygène d'une molécule voisine. Par exemple on donne à la figure 1.9, l'exemple du Kevlar, un polymère formé de longues chaînes moléculaires issues de liaisons covalentes, attachées entre elles par des liaisons hydrogènes.

Bien que l'énergie de ces liaisons ne soit pas aussi importante que celle des liaisons fortes, on voit bien, sur l'exemple précédent, l'importance considérable qu'elles peuvent avoir en permettant la constitution d'un réseau bi ou tridimensionnel à partir de chaînes carbonées unidimensionnelles.

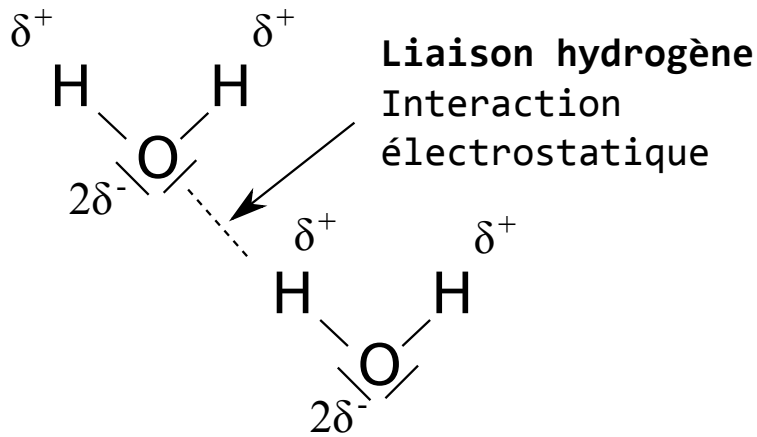


FIGURE 1.8 – Liaison hydrogène

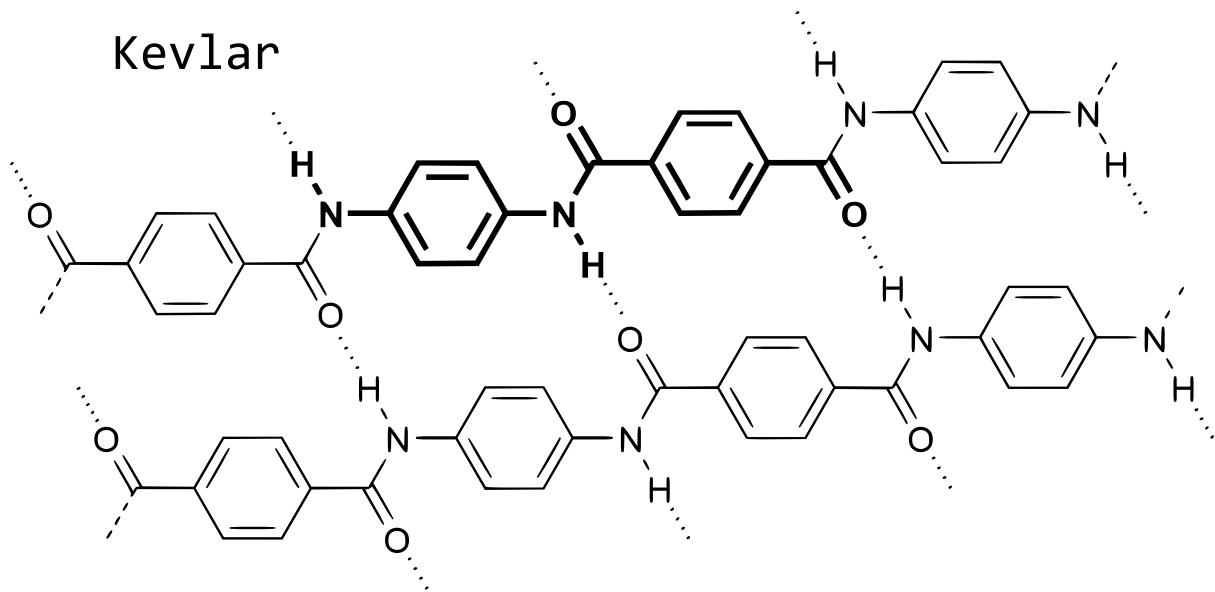


FIGURE 1.9 – Schéma du Kevlar. Les traits pleins sont des liaisons covalentes, et les traits en pointillés sont les liaisons hydrogènes, toutes les intersections sont des atomes de carbone qui sont omis pour la lisibilité. Les traits pleins en gras représentent la cellule de base (monomère) du polymère.

Résumé

- Les liaisons à l'origine de la cohésion de la matière sont des phénomènes de nature électrostatique.
- Il existe trois types de liaisons fortes : liaison ionique, liaison covalente, liaison métallique.
- Les liaisons faibles ont, elles aussi, une grande importance pour le comportement macroscopique des matériaux.
- L'énergie interne de ces liaisons peut s'exprimer, en fonction de la distance entre les éléments liés, par une expression de la forme :

$$U = U_i - \underbrace{\frac{\alpha}{r^m}}_{\text{Attraction}} + \underbrace{\frac{\beta}{r^n}}_{\text{Répulsion}}$$

1.2 La classification classique

La classification classique des matériaux est basée sur la nature de la liaison forte assurant la cohésion de la matière. Il y a donc classiquement trois familles de matériaux :

- Les céramiques associées à la liaison ionique
- Les polymères associés à la liaison covalente
- Les métaux associés à la liaison métallique

Cependant, de plus en plus souvent l'ingénieur utilise des assemblages de matériaux de familles différentes. On parle alors de matériaux composites (en utilisant ce mot dans un sens très général). Les matériaux composites sont alors considérés comme une quatrième famille (cf figure 1.10).

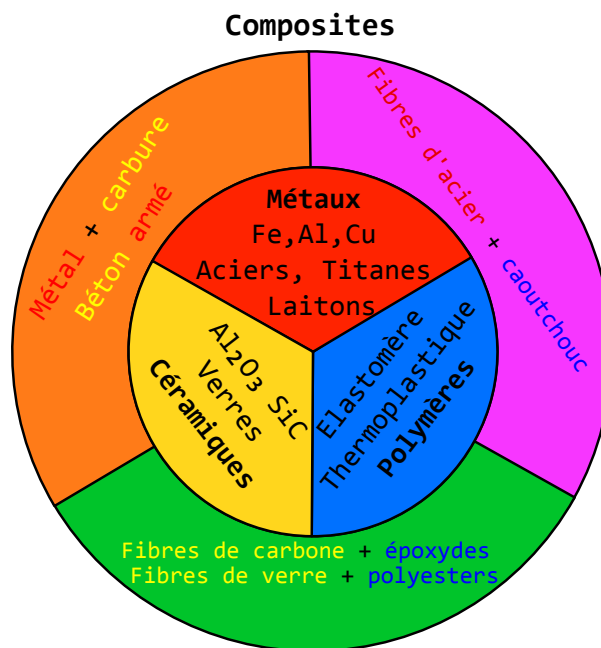


FIGURE 1.10 – Classification classique des matériaux et composites.

Le professeur Ashby a tenté d'estimer la répartition de l'utilisation des grandes familles de matériaux par les hommes à travers les âges [1]. Le schéma proposé figure 1.11 est inspiré de son travail pour donner une idée générale. On voit qu'avant le 19^{ième} siècle les matériaux disponibles étaient dominés par des polymères naturels tels que le bois ou le caoutchouc et des céramiques naturelles telles que la pierre, les ciments à base de cendres etc. Les années 1960 ont été celles de l'exploitation des métaux, par leur diversification via des alliages répondant à des contraintes de conception de plus en plus extrêmes. La tendance actuelle est une diversification des matériaux disponibles dans les différentes classes, notamment l'apparition de très nombreux polymères de synthèse et des céramiques techniques, ainsi que divers composites issus de l'hybridation entre différents matériaux.

Si cette classification est très utile aux ingénieurs pour catégoriser les matériaux, c'est avant tout parce qu'elle correspond plus ou moins aux grandes typologies de comportement de matériaux. En effet, puisque la nature des liaisons chimiques à l'origine de a

cohésion de la matière ; ne sont pas les mêmes pour les différentes classes de matériaux, il est attendu que les comportements macroscopiques soient différents. À cela s'ajoute le fait que les procédés de fabrication des différentes classes de matériaux sont en général très différents, ce qui a aussi une influence sur l'arrangement de la matière à l'échelle microscopique et donc une influence sur le comportement macroscopique. Dans le paragraphe suivant, nous allons donc présenter de manière schématique et synthétique ces différents types de comportement, en mettant l'accent sur les classes de matériaux qu'il faut avoir en tête pour chacun d'entre eux et les spécificités de chacun (irréversibilité etc.).

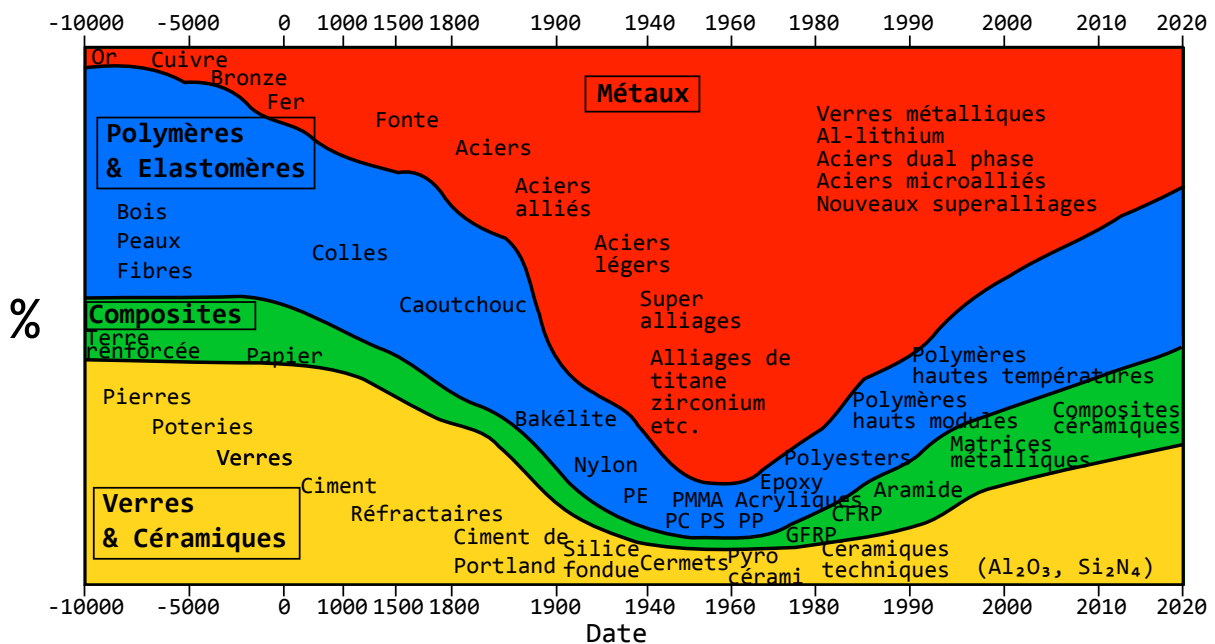


FIGURE 1.11 – Évolution de l'utilisation des matériaux au cours du temps.

Résumé

Il existe classiquement trois familles de matériaux :

- Les céramiques associées à la liaison ionique
- Les polymères associés à la liaison covalente
- Les métaux associés à la liaison métallique

1.3 Les comportements classiques

Afin de fixer les idées générales, nous allons présenter brièvement les grandes caractéristiques des comportements des matériaux en fonction de leur famille d'appartenance. Comme l'étude du comportement des matériaux est le sujet principal de ce cours, nous aurons l'occasion dans les chapitres suivants de revenir en détails et avec un formalisme rigoureux sur les points qui seront évoqués ci-dessous. Pour simplifier l'exposé des premières notions, sommairement abordées dans ce chapitre, nous nous placerons dans le

cadre d'un comportement uniaxial (essai de traction simple) en petites déformations et nous présenterons donc des “courbes de comportements typiques” en donnant les caractéristiques principales de ces courbes avec les concepts et vocabulaires associés. En abscisse de ces courbes nous avons la “déformation uniaxiale” ε , que nous définirons ici comme le rapport entre la variation de longueur d'une éprouvette de traction Δl , et la longueur initiale de l'éprouvette l_0 (c'est-à-dire $\varepsilon = \Delta l / l_0$). En ordonnée de ces courbes nous avons la “contrainte uniaxiale” σ , que nous définirons ici comme le rapport entre la force de traction F exercée sur l'éprouvette et la section initiale de cette éprouvette S_0 (c'est-à-dire $\sigma = F / S_0$). Ces concepts de déformation et de contrainte seront vus de manière beaucoup plus rigoureuse et détaillée dans les prochains chapitres. Pour l'utilisation que nous devons en faire ici, une compréhension superficielle de ces deux concepts est suffisante. Nous verrons successivement :

- Le comportement typique des céramiques
- Le comportement typique des métaux
- Le comportement typique des polymères

Notez que nous avons changé l'ordre d'apparition des différentes familles de matériaux. Ceci est dû au fait que, aux températures habituelles, les céramiques et les métaux exhibent des comportements ne faisant pas intervenir le temps physique, au contraire des polymères qui ont un comportement dont la nature visqueuse ne peut fréquemment pas être négligée. L'objectif principal de ce paragraphe est d'introduire les principales notions de comportement et le vocabulaire associé.

1.3.1 Le comportement typique des céramiques : élastique endommageant

Le comportement des céramiques est en général élastique endommageant, comme montré à la figure 1.12. Lorsque l'on exerce une traction sur une éprouvette extraite d'un matériau céramique, on constate tout d'abord un allongement proportionnel à la contrainte de traction. Si l'on diminue l'effort de traction on constate que la déformation diminue de manière complètement réversible. Ceci correspond à un comportement élastique représenté sur la figure 1.12 par la droite bleue de pente plus raide sur de la courbe d'essai. La pente de cette partie linéaire est le module d'Young initial E_{ini} du matériau.

Au-delà d'une certaine déformation on constate que le niveau de la contrainte diminue rapidement (partie rouge de la courbe figure 1.12). Ceci est dû à une micro-fissuration du matériau. On dit que le matériau s'endommage. Si l'on diminue la déformation à partir d'un point quelconque de cette courbe, on constate que la relation entre la contrainte et la déformation redevient linéaire avec une pente plus faible que celle du matériau vierge initial (partie linéaire bleue de pente plus faible sur la courbe figure 1.12). Si après avoir partiellement déchargé sur cette courbe on recharge, c'est-à-dire si l'on augmente à nouveau la déformation, on constate tout d'abord que l'on remonte sur la courbe le long de la droite bleue de plus faible pente. Cette partie du comportement est donc élastique réversible, mais avec une pente plus faible que celle de la partie élastique initiale. L'endommagement entraîne donc une diminution du module d'Young E_{act} actuel du matériau. Lorsque l'on atteint le niveau de déformation maximal avant décharge, on

constate que la contrainte recommence à diminuer dans le prolongement de la courbe d'endommagement initiale. On interprète ceci en disant que l'endommagement croît (la micro-fissuration progresse). Bien évidemment pour obtenir la courbe figure 1.12 il a fallu contrôler soigneusement l'essai en pilotant la déformation. En effet, lorsque l'on commence à micro-fissurer l'éprouvette, le risque est que cette micro-fissuration ne se produise pas de manière homogène dans toute l'éprouvette mais dans une zone réduite. Or comme nous l'avons vu, dans cette zone la raideur du matériaux (i.e., le module d'Young) diminue, ce qui conduit à localiser la déformation imposée dans cette zone et décharger le reste de l'éprouvette. La réponse en force globale sur la machine d'essai n'est alors plus le reflet du seul matériau, mais aussi de la manière dont les contraintes sont réparties dans l'éprouvette. On dit que l'on n'a plus un essai de matériau, mais un essai de structure. La contrainte simplement calculée comme le rapport de la force globale mesurée F sur la surface initiale de l'éprouvette S_0 n'a alors plus de sens. C'est pourquoi cet essai est particulièrement difficile pour assurer une bonne homogénéité de la micro-fissuration (qui dépend de facteurs en partie aléatoires du fait des hétérogénéités internes à la structure microscopique du matériau).

On définit une grandeur caractéristique de l'endommagement du matériau par :

$$D = 1 - \frac{E_{\text{act}}}{E_{\text{ini}}} \quad (1.4)$$

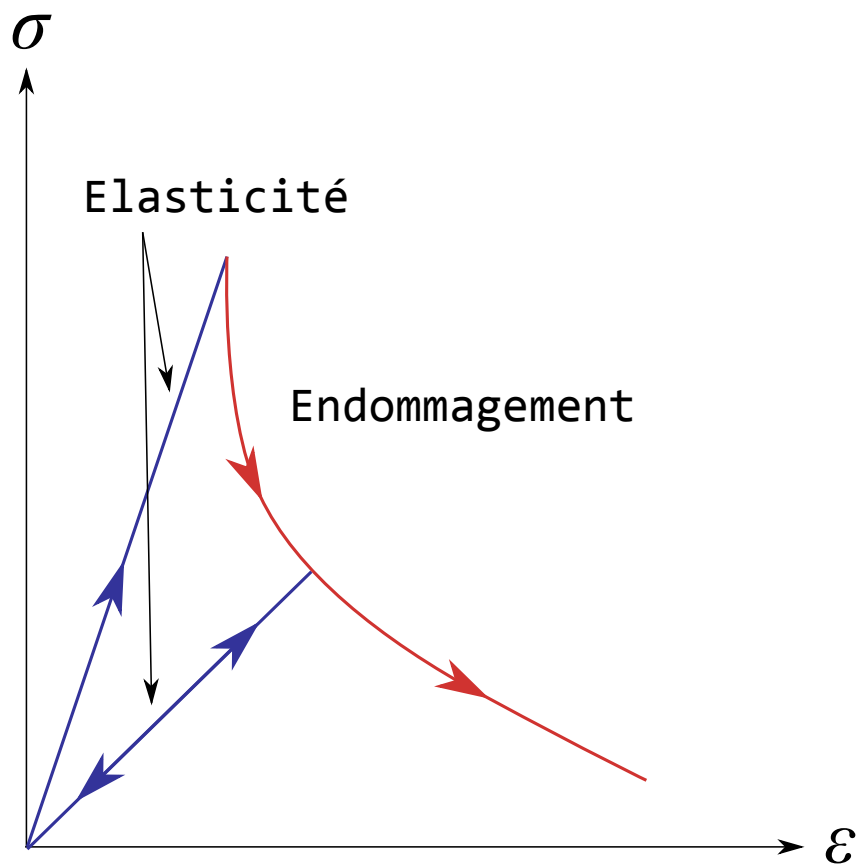


FIGURE 1.12 – Comportement schématisé élastique endommageant.

Si nous avons contrôlé l'essai en contrainte (en mesurant l'allongement Δl), ce qui est le plus facile à réaliser et le plus courant dans les laboratoires d'essais, l'éprouvette se serait rompue après que l'on ait atteint le maximum de la contrainte sur la courbe figure 1.12. En effet, on voit que cette contrainte est un maximum pour le matériau, en pilotant en contrainte on aurait essayé de dépasser cette contrainte, ce qui aurait permis à des microfissures de se propager brutalement pour rompre l'éprouvette. On dit que les céramiques sont des matériaux élastiques fragiles. La grandeur caractérisant la capacité d'un matériau à propager brutalement une fissure (rupture fragile) se nomme la ténacité K_{IC} exprimée dans une unité hybride le $\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$. Cette unité n'est réellement compréhensible qu'après avoir suivi un cours de mécanique de la rupture, ce qui interviendra au second semestre. Nous ne nous étendons donc pas sur ce point ici.

1.3.2 Le comportement typique des métaux : élastoplasticité

Lorsque l'on exerce une traction sur une éprouvette d'un matériau métallique, on constate tout d'abord un allongement proportionnel à la contrainte de traction. Si l'on diminue l'effort de traction on constate que la déformation diminue de manière réversible. Ceci correspond à un comportement élastique représenté sur la figure 1.13 par la première droite bleu de la courbe d'essai. La pente de cette partie linéaire est le module d'Young initial du matériau. Au-delà d'une certaine déformation on constate que

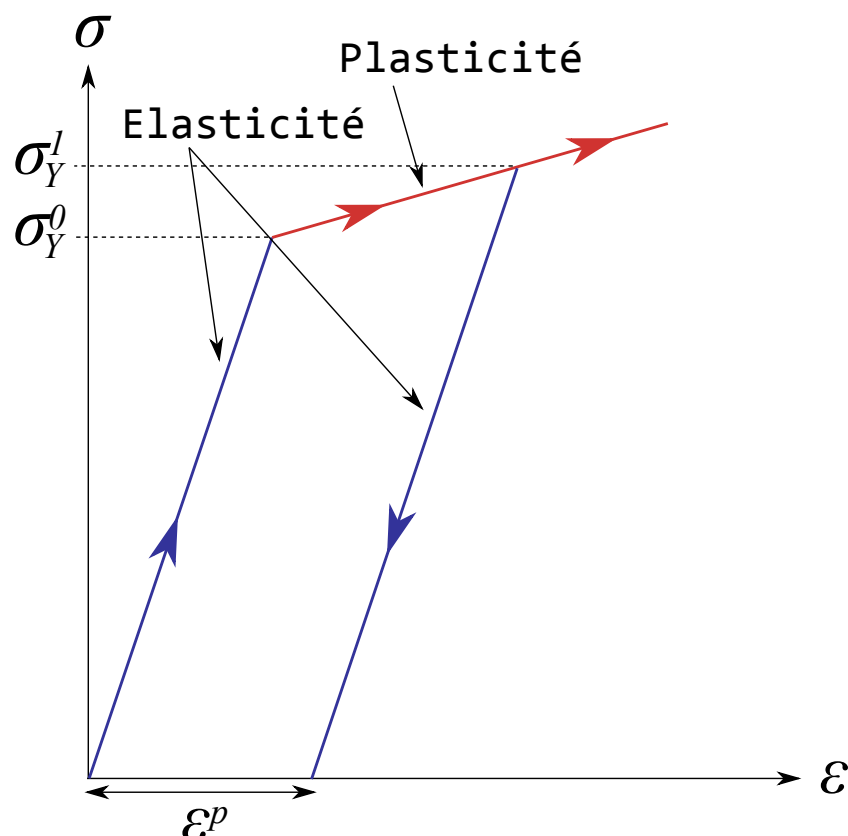


FIGURE 1.13 – Comportement schématique élastoplastique.

la relation contrainte déformation n'est plus linéaire (partie rouge de la courbe d'essai

figure 1.13). Ceci est dû à une plastification du matériau, c'est-à-dire pour les métaux un mécanisme de glissement des plans atomiques, que nous verrons plus en détails au chapitre 6 portant sur les origines physiques de la plasticité. Si l'on diminue la déformation à partir d'un point quelconque de la courbe d'essai, on constate que la relation entre la contrainte et la déformation devient affine avec une pente identique à celle du matériau initial (deuxième droite bleu sur la courbe figure 1.13). Si après avoir partiellement déchargé sur cette courbe on recharge, c'est-à-dire si l'on augmente à nouveau la déformation, on constate tout d'abord que l'on remonte sur la courbe le long de la droite en bleu. Cette partie du comportement est donc élastique réversible, avec une pente identique à celle de la partie élastique initiale. La plastification n'entraîne donc pas une évolution du module d'Young du matériau. Lorsque l'on atteint le niveau de déformation maximal avant décharge, on constate que la courbe contrainte déformation change à nouveau de pente et prolonge la courbe de plasticité initiale (partie rouge de la courbe figure 1.13). Pour obtenir cette courbe d'essai on peut soit contrôler l'essai en pilotant la déformation, soit en contrôlant la contrainte puisque celle-ci est croissante dans toute la partie qui présente un intérêt. Bien sûr, si l'on continue l'essai on finit par rompre l'éprouvette.

La courbe d'essai figure 1.13 est idéalisée pour présenter les concepts, le plus simplement possible. Nous présentons à la figure 1.14 une courbe d'essai pouvant correspondre à un métal réel. On constate que la courbe a une forme plus complexe, mais pour l'es-

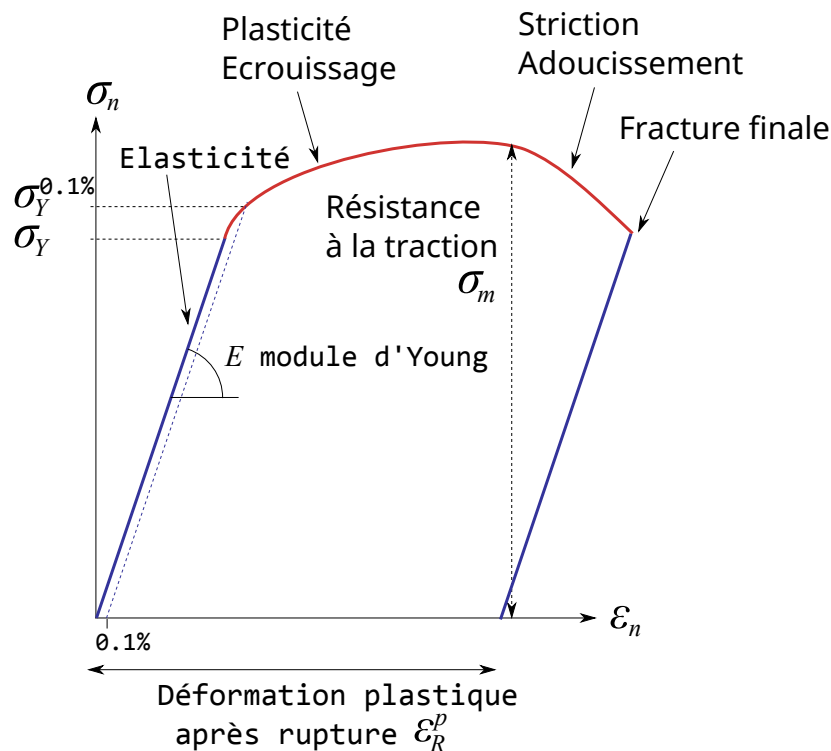


FIGURE 1.14 – Comportement élastoplastique typique d'un métal.

sentiel on peut distinguer encore la partie élastique réversible et la partie plastique de la courbe. La figure présente un certain nombre de concepts définis dans les normes d'essais de matériaux métalliques. Le concept le plus important est celui de limite d'élasticité. Il s'agit du niveau de contrainte à partir duquel il y a apparition de la plasticité et perte

de la linéarité de la courbe déformation-contrainte. Cette limite d'élasticité est difficile à déterminer pratiquement, car dans les essais réels, contrairement à ce que nous avons sur la courbe idéalisée, la perte de linéarité n'est pas brutale, mais se fait continûment. Les ingénieurs utilisent alors le concept de limite d'élasticité conventionnelle. Celle-ci correspond à l'intersection de la courbe d'essai avec une droite parallèle à la pente initiale, mais passant à contrainte nulle par le point d'abscisse de déformation 0,1% (0,001). Le plus souvent cette limite d'élasticité conventionnelle est très proche de la limite d'élasticité réelle et convient parfaitement pour les applications en conception des structures.

Deux autres concepts ont une certaine importance pour le choix des matériaux à utiliser dans une application. Le premier est celui de résistance à la traction. Il correspond au maximum de contrainte que peut subir le matériau. Généralement après avoir atteint ce point lors de l'essai, la déformation se localise dans une partie de l'éprouvette pendant que le reste de l'éprouvette se décharge élastiquement. On dit qu'il y a striction. Le second concept assez souvent utilisé est celui de déformation plastique après rupture donnant une indication de la déformabilité plastique du matériau, utile pour sa mise en forme. En effet, si cette limite est élevée, on peut imaginer que lors d'un processus d'emboutissage par exemple, il sera possible d'atteindre un niveau de déformation plastique important avant la déchirure de la plaque mise en forme. Nous étudierons dans au chapitre 6 les origines physiques de ces comportements et aux chapitres 7 et 8 le formalisme qui permet d'écrire les comportements élastoplastiques avec une grande généralité.

1.3.3 Le comportement typique des polymères : viscoélasticité

Il y a, aux températures courantes habituelles, une différence principale entre le comportement des polymères et celui des céramiques ou des métaux. Pendant les essais précédemment décrits sur les matériaux céramiques ou métalliques, il était implicitement admis que si l'on fixait, à un instant donné la contrainte (resp. la déformation) dans l'éprouvette, la déformation (resp. la contrainte) n'évoluait pas. Ainsi le temps physique n'intervenait pas dans le comportement. Cette propriété n'est plus vraie pour les matériaux polymères et si, par exemple, après un chargement piloté en contrainte, nous maintenons celle-ci à la valeur σ_0 , nous constatons que la déformation continue à évoluer. On dit qu'il y a un fluage de l'éprouvette, comme on le voit à la figure 1.15. Réciproquement, après un chargement piloté en déformation, si nous maintenons la déformation constante à une valeur ϵ_0 , nous constatons que la contrainte continue d'évoluer. On dit qu'il y a relaxation de l'éprouvette, comme on le voit à la figure 1.15. Ces deux phénomènes, fluage et relaxation, sont en fait les manifestations d'une même propriété du matériau : sa viscosité. Le comportement viscoélastique dépend donc du temps physique. Sur la partie gauche de la figure 1.15, le modèle constitué d'un ressort et d'un amortisseur en série illustre suffisamment, pour l'instant, ce concept de viscoélasticité. Ce type de modèle est appelé un modèle rhéologique. On constate, sur le modèle, que si l'on maintient la contrainte σ , la déformation de l'amortisseur continue à augmenter alors que celle du ressort reste fixe. La déformation totale apparaît donc, dans ce modèle, comme la somme d'une déformation visqueuse et d'une déformation élastique. Dans le modèle rhéologique simple composé d'un amortisseur et d'un ressort, on peut écrire la déformation élastique ϵ^e comme suit :

$$\epsilon^e = \frac{\sigma}{E} \quad (1.5)$$

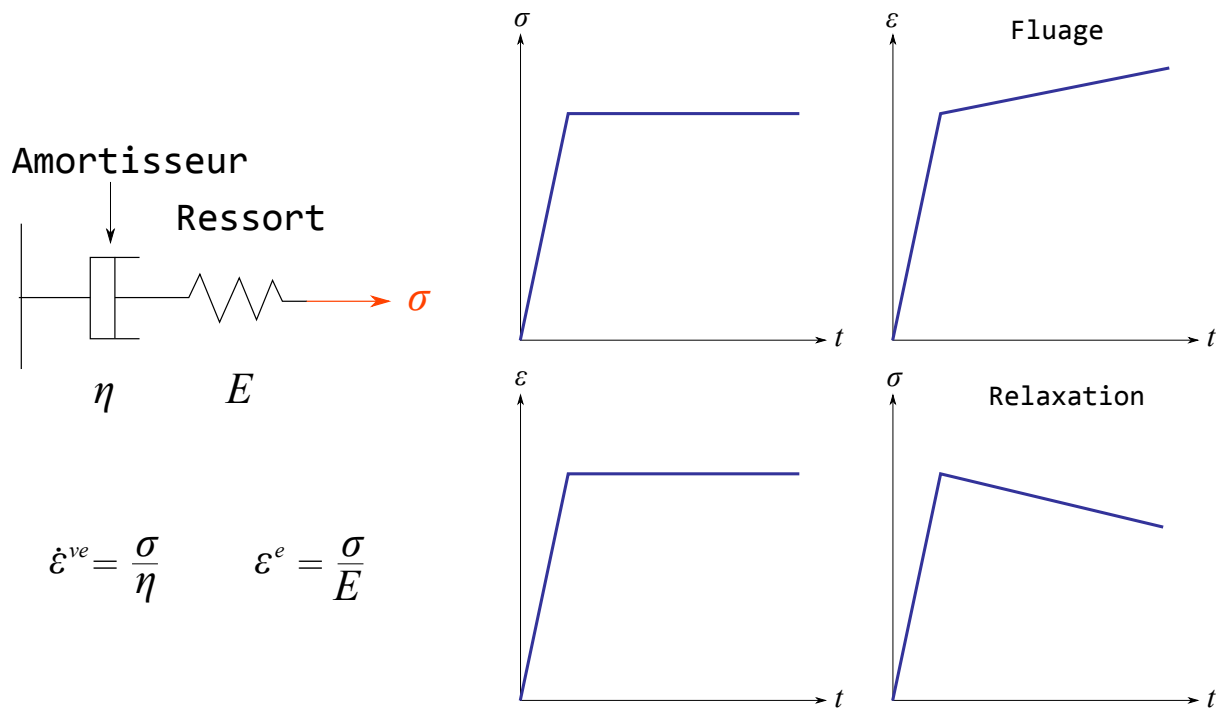


FIGURE 1.15 – Comportement viscoélastique et modèle rhéologique simple.

Avec E le module d'Young et σ la contrainte. Par ailleurs, on peut relier la vitesse (ou plus précisément le taux) de déformation visqueuse $\dot{\varepsilon}^{ve}$ à un coefficient d'amortissement η :

$$\dot{\varepsilon}^{ve} = \frac{\sigma}{\eta} \tag{1.6}$$

On comprend bien dans cette écriture en vitesse, que le temps physique intervient dans l'écriture de la partie visqueuse du comportement.

On peut imaginer des modèles rhéologiques beaucoup plus complexes avec assemblage en série ou en parallèle de nombreux ressorts et amortisseurs. Tous ces modèles ont en commun d'entraîner une relation linéaire entre l'histoire de la contrainte et celle de la déformation. On dit alors que le comportement est viscoélastique linéaire. Nous étudierons au chapitre 5 les origines physiques de ces comportements et le formalisme qui permet d'écrire les comportements viscoélastiques linéaires ou non linéaires avec une grande généralité.

Résumé

Les principaux types de comportement des matériaux font apparaître des phénomènes :

- Élastiques endommageant (fragile)
- Elastoplastiques
- Viscoélastiques

Aux températures ordinaires on constate que :

- les matériaux céramiques ont un comportement élastique fragile
- les matériaux métalliques ont un comportement elastoplastique
- les matériaux polymères ont un comportement viscoélastique.

Si l'on s'intéresse à une large gamme de température, tous les matériaux exhibent tous les types de comportement.

1.4 La classification ingénieur

Les ingénieurs utilisent une classification des matériaux très proche de la classification classique des physiciens des matériaux, avec toutefois quelques nuances et un découpage un peu plus fin. Ils utilisent le terme d'alliages métalliques au lieu du terme métaux. La grande famille des matériaux céramiques est découpée en sous familles distinguant :

- les céramiques techniques ou à hautes performances
- les céramiques courantes de type terres cuites ou béton, dites céramiques poreuses dont les caractéristiques mécaniques sont beaucoup plus faibles
- les verres
- on y ajoute parfois les sels

La grande famille des polymères est elle aussi découpée en sous familles :

- les polymères techniques
- les élastomères
- les mousses
- les bois

La famille des matériaux composites est très hétéroclite car elle rassemble des matériaux très divers dans leur composition ou leurs propriétés.

Chaque famille ou sous famille de matériaux est elle-même divisée en classes. Par exemple les alliages d'aluminium sont une classe de la famille des alliages métalliques. Les normes divisent les classes en sous classes en fonction de la composition détaillée et des autres caractéristiques. Par exemple les alliages d'aluminium sont répartis en 8 sous classes. On parle par exemple d'alliage d'aluminium de la « série » 5000. Dans ces sous classes on trouve les différents membres faisant l'objet d'une production industrielle contrôlée. On trouve par exemple dans les alliages d'aluminium de la série 5000 le 5083-H2 dont la composition et les propriétés sont connues et données dans des bases de données. Cet exemple est schématisé à la figure 1.16.

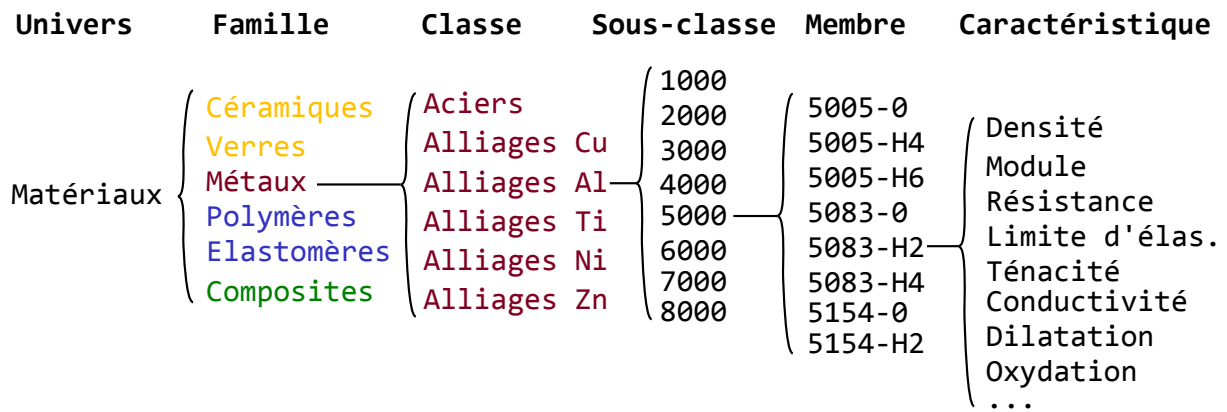


FIGURE 1.16 – Architecture de la classification des matériaux pour les ingénieurs.

Résumé

La classification ingénieur des matériaux :

- Alliages métalliques
- Céramiques
 - Céramiques techniques
 - Céramiques poreuses
 - Verres
- Polymères
 - Polymères techniques
 - Elastomères
 - Mousses de polymères
 - Bois
- Composites

La plupart des matériaux produits et donc utilisables par l'industrie porte un nom défini par une norme qui précise la composition et éventuellement d'autres caractéristiques du matériau. Ce matériau est un **membre** d'une **sous-classe**, incluse dans une **classe**, d'une **famille**, dans l'**univers** des matériaux.

1.5 Les bases de données matériaux et propriétés d'usage

Il existe de nombreuses bases de données utilisées par les ingénieurs concepteurs pour le choix des matériaux à utiliser dans leur application. Ces bases de données précisent pour chaque matériau les propriétés d'usage. C'est essentiellement sur la base des propriétés d'usage listées dans le tableau 1.1 que sont faits les choix de conception.

TABLE 1.1 – Principales propriétés d'usage des matériaux.

Type	Nom	Symbole	Unité
Général	Coût	C_m	€.kg ⁻¹
	Densité	ρ	kg.m ⁻³
Mécanique	Module d'Young	E	GPa
	Coefficient de Poisson	ν	-
	Module de cisaillement	μ	GPa
	Module d'incompressibilité	K	GPa
	Limite d'élasticité	σ_Y	MPa
	Ténacité	K_{IC}	MPa.m ^{1/2}
	Limite d'endurance	σ_e	MPa
	Résistance à la traction	R_m	MPa
	Coefficient d'amortissement	η	-
Thermique	Conductivité thermique	λ	W.K ⁻¹ .m ⁻¹
	Diffusivité thermique	D	m ² .s ⁻¹
	Chaleur spécifique	c_p	J.K ⁻¹ .kg ⁻¹
	Température de fusion	T_f	K
	Température de transition vitreuse	T_g	K
	Coefficient de dilatation thermique	α	K ⁻¹
	Résistance au choc thermique	ΔT	K
	Résistance au fluage	-	-
Usure	Coefficient d'usure d'Archard	k_A	MPa ⁻¹
Corrosion	Vitesse de corrosion	K	mm.an ⁻¹
	Constante de vitesse parabolique d'oxydation	k_p	m ² .s ⁻¹

Dans le cadre de ce cours nous utiliserons la base de données établie à l'Université de Cambridge par l'équipe du Professeur Ashby. Nous donnons à titre d'exemple, au tableau 1.2, l'information que l'on peut obtenir sur le titane. On trouve également une liste de propriétés qualitatives à propos du titane, en particulier la résistance environnementale associée aux conditions d'exploitation, Les usages typiques et des mise en garde très importantes relatives à la sécurité d'utilisation (cf. tableau 1.3).

Résumé

Le choix de matériau pour une application se fait sur la base des propriétés d'usage. Ces propriétés d'usage peuvent être trouvées dans les bases de données matériaux.

TABLE 1.2 – Principales propriétés d’usage du titane.

Type	Nom	Plage de valeurs	Unité
Général	Dénomination	Ti alloys	
	Éléments d’alliage	Al, Zr, Mo, Si Sn, Ni, Fe, V	
	Volume atomique	0.01-0.011	$\text{m}^3.\text{kmol}^{-1}$
	Coût	24-65	$\text{€}.\text{kg}^{-1}$
	Recyclabilité	55-65	%
	Densité	4360-4840	$\text{kg}.\text{m}^{-3}$
	Contenu énergétique	750-1250	$\text{MJ}.\text{m}^{-3}$
Mécanique	Module d’Young	90-134	GPa
	Coefficient de Poisson	0.35-0.37	-
	Module de cisaillement	32-51	GPa
	Module d’incompressibilité	100-176	GPa
	Limite d’élasticité	172-1245	MPa
	Ténacité	14-120	$\text{MPa}.\text{m}^{\frac{1}{2}}$
	Limite d’endurance	175-705	MPa
	Coefficient de ductilité	0.01-0.4	-
	Résistance à la traction	240-1625	MPa
Coefficient d’amortissement	$10^{-4} - 5 \times 10^{-3}$	-	
Thermique	Conductivité thermique	3.8-20.7	$\text{W}.\text{K}^{-1}.\text{m}^{-1}$
	Chaleur spécifique	510-650	$\text{J}.\text{K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$
	Chaleur latente de fusion	360-370	$\text{kJ}.\text{kg}^{-1}$
	Température de fusion	1750-1955	K
	Température max en service	570-970	K
	Température min en service	0	K
	Coefficient de dilatation thermique	$7.9 \times 10^{-6} - 11 \times 10^{-6}$	K^{-1}
Électrique	Résistance	41.7-202	$10^{-8} \times \Omega.\text{m}$

TABLE 1.3 – Informations additionnelles à propos du titane.

Résistance environnementale		Usages typiques
Inflamabilité	Très bonne	Pales de turbine de moteur d’avion
Eau douce	Très bonne	Applications en aérospatial
Eau de mer	Très bonne	Génie chimique
Solvants organiques	Très bonne	Échangeurs thermiques
Oxidation à 500°C	Bonne	Bio-ingénierie
Acides forts	Bonne	Médical
Bases fortes	Bonne	
Acides faibles	Très bonne	
Bases faibles	Très bonne	
UV	Très bonne	

Mise en garde

Sous forme de poudre : très inflammable et irritant si ingéré

1.6 Exercices

Exercice 1. On considère 2 atomes, de même masse m , dont la liaison est déterminée par l'énergie interne suivante :

$$U(r) = U_i - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{B}{r^7}$$

Où $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C et $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F.m⁻¹. On suppose qu'il n'y a pas d'agitation atomique (i.e., thermique, donc on est au zéro absolu $T = 0$ K) et on suppose de plus qu'il n'y a pas de forces extérieures exercées sur ces atomes. Dans ces conditions on peut postuler que la position d'équilibre minimise l'énergie interne.

- 1)
 - a) Calculez la distance a entre les deux atomes au repos (température au zéro absolu) en fonction de e, ϵ_0, B .
 - b) La distance a est mesurée et $a \simeq 2.52 \times 10^{-10}$ m . Déterminez B en fonction de a, e, ϵ_0 et exprimez U en fonction de $U_i, a, e, \epsilon_0, r/a$.
- 2) On exerce un couple de forces opposées, d'intensité F , pour écarter les atomes de leur position d'équilibre. Dans ce cas, la distance interatomique à l'équilibre minimise l'énergie potentielle $U(r)Fr$.
 - a) Déterminez la relation non linéaire entre F et r/a .
 - b) On note d (pour « déplacement ») la variation de la distance interatomique à partir de la position d'équilibre, $r = a + d$. Développez au premier ordre la relation entre F et d/a .
 - c) On considère maintenant un matériau cristallin. Nous supposons qu'une « section » de ce matériau est constituée d'un assemblage régulier de $(N + 1) \times (M + 1)$ atomes disposés suivant un réseau surfacique de maille carrée de côté a . (La surface de la section considérée est donc $S = NM a^2$). On suppose évidemment N et M très grands. Pour simplifier l'analyse nous ne prendrons en compte que les interactions de deux atomes en vis-à-vis dans deux réseaux parallèles. Nous avons ainsi $(N + 1) \times (M + 1)$ forces parallèles exercées sur une section du matériau. En vous appuyant sur le développement au premier ordre de la force interatomique en fonction de la variation de distance interatomique déterminez l'expression du module d'Young du matériau cristallin ainsi modélisé et donnez sa valeur numérique.
- 3) On revient à la paire atomique. On écarte les atomes de leur position d'équilibre et on note d_{\max} le maximum de l'écart à l'équilibre de la distance interatomique ainsi obtenue. On lâche ensuite les atomes sans vitesse initiale et sans force extérieure. La paire atomique se met alors à vibrer dans son référentiel barycentrique et l'écart à la position d'équilibre oscille entre une valeur d_{\min} et d_{\max} (où d_{\min} est différent de $-d_{\max}$).
 - a) En considérant une approximation au troisième ordre en d/a de l'énergie interne, déterminez une relation entre la « variation médiane de distance entre les atomes par rapport à l'équilibre » :

$$\bar{d} = \frac{d_{\max} + d_{\min}}{2} \neq 0$$

et la « demi amplitude de l'oscillation »

$$A = \frac{d_{\max} - d_{\min}}{2}$$

- b) On sait relier la température absolue macroscopique T d'un matériau à la moyenne de l'énergie cinétique microscopique de ses atomes dans le référentiel barycentrique et donc à A , la moyenne du carré de l'amplitude d'oscillation de ses atomes. On a $T = CA^2$ (où C est inversement proportionnel à la constante de Boltzmann). A partir du modèle bi-atomique ci-dessus estimez le coefficient de dilatation thermique du matériau cristallin.

Exercice 2. On considère le réseau atomique plan ci-dessous. Pour simplifier l'analyse nous supposons qu'un atome n'a d'interactions qu'avec ses plus proches voisins. L'énergie interne d'interaction entre deux atomes est la suivante en fonction de la distance interatomique r .

$$U = U_i - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \left(\frac{a_0}{r} - \frac{1}{7} \left(\frac{a_0}{r} \right)^7 \right)$$

Où $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F.m⁻¹ et $a_0 = 3 \times 10^{-10}$ m. On suppose qu'il n'y a pas d'agitation thermique. On allonge le réseau dans les directions \underline{e}_x ou \underline{e}_y . Au repos, la distance interatomique est uniforme et vaut a_0 . Après déformation le réseau est caractérisé par deux paramètres, a la distance interatomique pour les atomes situés sur une droite parallèle à \underline{e}_x et b la distance interatomique pour les atomes en « oblique ».

- 1) Calculez, en fonction de a et b , l'énergie interne d'un « triangle » constitué de trois atomes (cf. figure). Attention, il ne faut compter que la moitié de l'énergie d'interaction entre chaque couple d'atomes, l'autre moitié comptant pour le triangle adjacent.
- 2) On impose dans cette question la valeur de a en allongeant le réseau suivant \underline{e}_x .
 - a) Déterminez, en fonction de a_0, e, ϵ_0, a , la valeur de b qui minimise l'énergie interne du « triangle », donc l'énergie surfacique du réseau.
 - b) Commentez en faisant le lien avec ν_{yx} le coefficient de Poisson transverse sous allongement longitudinal d'un matériau cristallin lorsque :

$$\epsilon_x = \frac{a - a_0}{a_0} \ll 1$$

- c) Exprimez $W(\epsilon_x)$ la densité volumique d'énergie interne dans le cas des petites déformations (cf. équation précédente), sous la forme :

$$W(\epsilon_x) = Cste + \frac{1}{2} E_l \epsilon_x^2$$

Où E_l est le module longitudinal du matériau et donnez l'expression de E_l .

- 3) On impose dans les questions suivantes la valeur de :

$$h(a, b) = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = h$$

en allongeant le réseau suivant \underline{e}_y . On note que $h(a_0, a_0) = h_0 = (\sqrt{3}/2) a_0$.

- a) Déterminez, en fonction de a_0, e, ϵ_0, h , les valeurs de a et b qui minimisent l'énergie interne du « triangle », donc l'énergie surfacique du réseau sous la contrainte (mathématique) $C(a, b) = h(a, b - h) = 0$. On notera F le multiplicateur de Lagrange de cette contrainte pour des raisons qui apparaîtront plus loin. On écrira les équations dans le cas général puis on résoudra sous les hypothèses simplificatrices suivantes :

$$\epsilon_x = \frac{a-a_0}{a_0} \ll 1 \quad \text{et} \quad \epsilon_b = \frac{b-a_0}{a_0} \ll 1 \quad \text{et} \quad \epsilon_y = \frac{h-h_0}{h_0} \ll 1 \quad (1.7)$$

- b) Commentez en faisant le lien avec ν_{xy} le coefficient de Poisson longitudinal sous allongement transverse d'un matériau cristallin, puis comparez avec la valeur trouvée lorsque l'élongation est imposée suivant \underline{e}_x et commentez ce résultat en faisant une conjecture sur les symétries du matériau.
- 4) On considère un matériau cristallin constitué d'un empilement de plans atomiques parallèles, identiques à celui étudié ci-dessus. La distance entre ces plans (mesurée suivant \underline{e}_z la normale aux plans) est c . On se place dans le cas d'une élongation imposée suivant \underline{e}_y (cf. question précédente).
- a) En identifiant le sens physique de F , le multiplicateur de Lagrange dans la question 3), et en vous plaçant dans une hypothèse de petites déformations (i.e., dans l'hypothèse (1.7)), donnez au premier ordre, la relation entre σ_y la force surfacique de traction sur le matériau (nécessaire pour allonger celui-ci dans la direction \underline{e}_y) et F .
- b) En exploitant les équations de la question 3, donnez la relation (linéaire en première approximation) entre le multiplicateur de Lagrange F et la déformation ϵ_y .
- c) Déduisez en une expression du module d'Young du matériau cristallin dans la direction transversale \underline{e}_y .

- 5) On reste dans la situation des questions 3 et 4.

- a) Exprimez en fonction de ϵ_y la densité volumique d'énergie interne $W(\epsilon_y)$ dans le matériau sous la forme

$$W(\epsilon_y) = Cste + \frac{1}{2} E_t \epsilon_y^2 + \dots$$

- b) Retrouvez l'expression du module transversal trouvée à la question 4.

1.7 Solutions

Solution 1.

- 1)

$$\frac{\partial U}{\partial r}(a) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} - 7 \frac{B}{a^8}$$

$$a = \left(\frac{28\pi\epsilon_0 B}{e^2} \right)^{\frac{1}{6}}$$

$$B = \frac{e^2 a^6}{28\pi\epsilon_0}$$

$$U = U_i - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{a}{r} - \frac{1}{7} \left(\frac{a}{r} \right)^7 \right)$$

2)

$$F = \frac{\partial U}{\partial r}(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} - 7 \frac{B}{r^8} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(\left(\frac{a}{r} \right)^2 - \left(\frac{a}{r} \right)^8 \right)$$

$$F \simeq \frac{6e^2 d}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

La « déformation longitudinale » du matériau est d/a . La « contrainte » est la force surfacique. Elle est égale à $(N+1)(M+1)F/(NM a^2)$. Elle peut être approchée par F/a^2 car N et M sont très grands. L'estimation du module d'Young est le rapport de la « contrainte » sur la « déformation », soit :

$$E \simeq \frac{3e^2}{2\pi\epsilon_0 a^4}$$

On a donc $E \simeq 340$ GPa. À titre de comparaison, le module d'Young de l'acier est $E = 210$ GPa et celui de l'alumine est $E = 366$ GPa.

3) Lorsque $d = d_{\min}$, l'énergie cinétique du système est nulle, donc $U(d_{\min}) = U(d_{\max})$, soit :

$$U_i - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{1}{1 + \frac{d_{\min}}{a}} - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{1 + \frac{d_{\min}}{a}} \right)^7 \right) = U_i - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{1}{1 + \frac{d_{\max}}{a}} - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{1 + \frac{d_{\max}}{a}} \right)^7 \right)$$

En simplifiant et en approchant ces expressions au troisième ordre en d/a on obtient :

$$1 - \frac{d_{\min}}{a} + \left(\frac{d_{\min}}{a} \right)^2 - \left(\frac{d_{\min}}{a} \right)^3 - \frac{1}{7} \left(1 - 7 \frac{d_{\min}}{a} + 28 \left(\frac{d_{\min}}{a} \right)^2 - 84 \left(\frac{d_{\min}}{a} \right)^3 \right) \simeq$$

$$1 - \frac{d_{\max}}{a} + \left(\frac{d_{\max}}{a} \right)^2 - \left(\frac{d_{\max}}{a} \right)^3 - \frac{1}{7} \left(1 - 7 \frac{d_{\max}}{a} + 28 \left(\frac{d_{\max}}{a} \right)^2 - 84 \left(\frac{d_{\max}}{a} \right)^3 \right)$$

Soit :

$$-3 \left(\frac{d_{\min}}{a} \right)^2 + 11 \left(\frac{d_{\min}}{a} \right)^3 \simeq -3 \left(\frac{d_{\max}}{a} \right)^2 + 11 \left(\frac{d_{\max}}{a} \right)^3$$

Ce qui s'écrit après factorisation :

$$\left(\frac{d_{\max}}{a} - \frac{d_{\min}}{a} \right) \left[3 \left(\frac{d_{\max}}{a} + \frac{d_{\min}}{a} \right) - 11 \left(\left(\frac{d_{\max}}{a} \right)^2 + \frac{d_{\min} d_{\max}}{a^2} + \left(\frac{d_{\min}}{a} \right)^2 \right) \right] = 0$$

En utilisant $d_{\max} = \bar{d} + A$ et $d_{\min} = \bar{d} - A$ on obtient :

$$6\frac{\bar{d}}{a} = 11 \left(\left(\frac{A}{a} + 3 \left(\frac{\bar{d}}{a} \right)^2 \right) \right)$$

Comme $\bar{d}/a \ll 1$, on trouve :

$$\boxed{\frac{\bar{d}}{a} \simeq \frac{11}{6} \left(\frac{A}{a} \right)^2}$$

On peut relier la température absolue du matériau, au carré de l'amplitude de l'oscillation de ses atomes ($T \simeq CA^2$). La dilatation thermique du matériau, pour une augmentation de température de ΔT , peut être approchée par la variation de \bar{d}/a , soit $\varepsilon^{\text{th}} = \Delta(\bar{d}/a)$. Or on a :

$$\Delta \left(\frac{\bar{d}}{a} \right) \simeq \frac{11}{6} \Delta \left[\left(\frac{A}{a} \right)^2 \right] \simeq \frac{11}{6C a^2} \Delta T$$

Le coefficient de dilatation thermique α est donc approché par :

$$\boxed{\alpha \simeq \frac{11}{6C a^2}}$$

Solution 2.

1)

$$U(a, b) = \frac{3}{2} U_i - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \left(\frac{a_0}{b} - \frac{1}{7} \left(\frac{a_0}{b} \right)^7 \right) - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} \left(\frac{a_0}{a} - \frac{1}{7} \left(\frac{a_0}{a} \right)^7 \right)$$

2)

$$\frac{\partial U}{\partial b} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \left(\left(\frac{a_0}{b} \right)^2 - \left(\frac{a_0}{b} \right)^8 \right) = 0 \Rightarrow \boxed{b = a_0}$$

La « hauteur » du réseau suivant \underline{e}_y est $h(a) = \sqrt{a_0^2 - (a/2)^2}$. La déformation longitudinale est donnée par $\varepsilon_x = (a - a_0)/a_0$. La déformation transversale est donnée par $\varepsilon_y = (h(a) - h(a_0))/h(a_0)$. Pour déterminer le coefficient de Poisson transverse sous allongement longitudinal on étudie pour les petites valeurs de ε_x :

$$-\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{h(a_0) - h(a)}{h(a_0)} \frac{a_0}{a - a_0}$$

Comme $h(a_0) = a_0\sqrt{3}/2$ et $a/a_0 \simeq 1 + \varepsilon_x$, on a :

$$-\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \left(1 - \sqrt{\frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{a}{2a_0} \right)^2 \right)} \right) \frac{1}{\frac{a}{a_0} - 1} \simeq \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2}{3}\varepsilon_x} \right) \frac{1}{\varepsilon_x} \simeq \frac{1}{3}$$

On a donc l'approximation :

$$\boxed{\nu_{yx} \simeq \frac{1}{3}}$$

Le volume de la maille élémentaire est $(\sqrt{3}/4)c a_0^2$. L'énergie interne dans cette maille est :

$$U(a, a_0) = \frac{3}{2}U_i - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \frac{6}{7} - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} \left(\frac{a_0}{a} - \frac{1}{7} \left(\frac{a_0}{a} \right)^7 \right)$$

En posant $a/a_0 \simeq 1 + \epsilon_x$, on a :

$$U(\epsilon_x) \simeq Cste - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} \left(1 - \epsilon_x + \epsilon_x^2 - \frac{1}{7} (1 - 7\epsilon_x + 28\epsilon_x^2) \right)$$

Soit encore :

$$U(\epsilon_x) \simeq Cste + \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} \epsilon_x^2$$

Ainsi la densité volumique d'énergie interne est :

$$W(\epsilon_x) \simeq Cste + \frac{\sqrt{3}e^2}{2\pi\epsilon_0 a_0} \epsilon_x^2$$

Le module d'Young longitudinal est donc :

$$E \simeq \frac{\sqrt{3}e^2}{\pi\epsilon_0 a_0^3 c}$$

3) Nous devons minimiser l'énergie interne :

$$U(a, b) = \frac{3}{2}U_i - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \left(\frac{a_0}{b} - \frac{1}{7} \left(\frac{a_0}{b} \right)^7 \right) - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} \left(\frac{a_0}{a} - \frac{1}{7} \left(\frac{a_0}{a} \right)^7 \right)$$

Sous la contrainte (mathématique) $C(a, b) = \sqrt{b^2 - (a/2)^2} - h = 0$. Notons F le multiplicateur de Lagrange de la contrainte. Le triplet (a, b, F) est donné par les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial a} - F \frac{\partial C}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial b} - F \frac{\partial C}{\partial b} = 0 \\ C(a, b) = 0 \end{cases}$$

Ce système s'écrit après calculs :

$$\begin{cases} \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0^2} \left(\left(\frac{a_0}{a} \right)^2 - \left(\frac{a_0}{a} \right)^8 \right) + \frac{F}{4} \frac{a}{\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2}} = 0 \\ \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^2} \left(\left(\frac{a_0}{b} \right)^2 - \left(\frac{a_0}{b} \right)^8 \right) - F \frac{b}{\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2}} = 0 \\ \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2} = 0 \end{cases}$$

Ce qui s'écrit plus simplement : « trouvez le triplet (a, b, F) vérifiant » :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0^2} \left(\left(\frac{a_0}{a} \right)^2 - \left(\frac{a_0}{a} \right)^8 \right) + \frac{F a}{4 h} = 0 \\ \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^2} \left(\left(\frac{a_0}{b} \right)^2 - \left(\frac{a_0}{b} \right)^8 \right) - F \frac{b}{h} = 0 \\ \left(\frac{b}{a_0} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{a}{a_0} \right)^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{h}{h_0} \right)^2 \text{ avec } h_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} a_0 \end{array} \right.$$

Sous les hypothèses simplificatrices $\epsilon_x \ll 1, \epsilon_y \ll 1$ et $\epsilon_b \ll 1$ ceci se réécrit au premier ordre : « trouvez le triplet (a, b, F) vérifiant » :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{6e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0^2} \epsilon_x + \frac{F}{2\sqrt{3}} = 0 \\ \frac{6e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^2} \epsilon_b - \frac{2F}{\sqrt{3}} = 0 \\ 2\epsilon_b - \frac{1}{2} \epsilon_x = \frac{3}{2} \epsilon_y \end{array} \right\} \Rightarrow 2\epsilon_x + \epsilon_b = 0$$

On en déduit :

$$\epsilon_x = -\frac{1}{3} \epsilon_y$$

Ainsi on a :

$$\nu_{xy} = \frac{1}{3}$$

Nous venons de démontrer qu'il y a égalité entre ν_{xy} le coefficient de Poisson longitudinal sous allongement transverse et ν_{xy} le coefficient de Poisson transverse sous allongement longitudinal. En fait le résultat est plus général et l'on peut montrer que le réseau périodique plan formé de mailles triangulaires équilatérales est isotrope, ce qui veut dire que le coefficient de poisson serait identique pour toutes les directions de traction simple.

- 4) La contrainte du problème de minimisation sous contrainte ci-dessus a la dimension d'une longueur. Le multiplicateur de Lagrange a donc la signification d'une force exercée au sommet « haut » de la maille élémentaire (elle crée l'allongement imposé de la cellule élémentaire). Cette force est équilibrée par deux forces de module $F/2$ et de sens opposé, aux deux autres sommets de la maille élémentaire. Si nous considérons une surface rectangulaire de dimensions $N a_0$ et $M c$, la force orientée suivant ϵ_y agissant sur cette surface est $(M+1)(N+1)2F$. Le coefficient 2 dans cette expression, vient du fait que dans l'assemblage des mailles, chaque nœud est le lieu de trois forces, la première de module F les deux autres de module $F/2$. La force surfacique est donc :

$$\sigma_y = \frac{2F}{a_0 c}$$

La première équation du système de la question 3 est $\frac{6e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0^2} \epsilon_x + \frac{F}{2\sqrt{3}} = 0$, avec $\epsilon_x = -(1/3)\epsilon_y$ on trouve :

$$F = \frac{\sqrt{3}e^2}{2\pi\epsilon_0 a_0^2} \epsilon_y$$

On en déduit :

$$\sigma_y = \frac{\sqrt{3}e^2}{\pi\epsilon_0 a_0^3 c} \epsilon_y$$

Le module d'Young transversal est donc :

$$E_l = \frac{\sqrt{3}e^2}{\pi\epsilon_0 a_0^3 c}$$

5) Rappelons l'expression de l'énergie d'une maille plane :

$$U(a, b) = \frac{3}{2}U_i - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \left(\frac{a_0}{b} - \frac{1}{7} \left(\frac{a_0}{b} \right)^7 \right) - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} \left(\frac{a_0}{a} - \frac{1}{7} \left(\frac{a_0}{a} \right)^7 \right)$$

Dans le cas de petites déformations, elle se réécrit au deuxième ordre :

$$U(\epsilon_x, \epsilon_b) = \frac{3}{2}U_i - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \left(1 - \epsilon_b + \epsilon_b^2 - \frac{1}{7} (1 - 7\epsilon_b + 28\epsilon_b^2) \right) - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} \left(1 - \epsilon_x + \epsilon_x^2 - \frac{1}{7} (1 - 7\epsilon_x + 28\epsilon_x^2) \right)$$

Soit encore :

$$U(\epsilon_x, \epsilon_b) = Cste + \frac{3e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \epsilon_b^2 + \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} \epsilon_x^2$$

Comme on a montré que $\epsilon_x = -(1/3)\epsilon_y$ et $\epsilon_b = (2/3)\epsilon_y$ on a :

$$U(\epsilon_y) = Cste + \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} \epsilon_y^2$$

Le volume unitaire d'une maille étant $(\sqrt{3}/4)c a_0^2$, la densité volumique d'énergie interne est donc :

$$W(\epsilon_y) = Cste + \frac{\sqrt{3}e^2}{2\pi\epsilon_0 a_0^3 c} \epsilon_y^2$$

Le module d'Young transversal est donc :

$$E_l = \frac{\sqrt{3}e^2}{\pi\epsilon_0 a_0^3 c}$$

Nous retrouvons bien l'expression de la question 4.

Remarque : Compte tenu du commentaire fait plus haut sur la nature isotrope de ce réseau, nous ne sommes pas surpris de constater que le module d'Young longitudinal est égal au module d'Young transversal.

Bibliographie

- [1] Mike Ashby. Materials Selection in Mechanical Design (Fourth Edition). Butterworth-Heinemann, Oxford, fourth edition edition, 2011.

Chapitre 2

Une méthode générale de modélisation en mécanique

Contents

2.1	Qu'est-ce qu'un modèle de mécanique	39
2.2	Niveau 1 : Géométrie et cinématique	39
2.2.1	Description de la famille d'objets	39
2.2.2	Description du mouvement et cinématique	55
2.3	Niveau 2 : Définition des efforts	59
2.3.1	Choix de l'espace vectoriel des mouvements virtuels	59
2.3.2	Choix des formes linéaires définissant les efforts	61
2.3.3	Principe des puissances virtuelles	63
2.4	Niveau 3 : Thermodynamique et comportement	66
2.4.1	Premier principe de la thermodynamique	66
2.4.2	Second principe de la thermodynamique	69
2.4.3	Relations constitutives	71

Dans notre expérience quotidienne on constate que les objets soumis à des efforts changent de forme. La modélisation de la relation entre les efforts appliqués et le changement de forme (jusqu'à la rupture) est le souci principal de l'ingénieur concepteur et l'objet de la discipline scientifique appelée Mécanique. Nous appellerons ci-dessous « famille d'objets » une collection d'objets ayant certaines caractéristiques communes (le plus souvent géométriques) ayant des conséquences importantes sur la description que l'on peut en faire. Par exemple les objets ayant comme caractéristique commune d'avoir une de leurs dimensions beaucoup plus petite que les deux autres sont appelés des coques. L'objectif de ce chapitre est de sensibiliser le lecteur au fait qu'une même famille d'objet peut, le plus souvent, être décrite (modélisée) de multiples manières suivant l'information que l'on souhaite obtenir. Tous ces modèles de l'objet possèdent une même structure. La méthode générale de modélisation proposée ici permettra de bien mettre en évidence cette structure commune à tous ces modèles. Nous insisterons sur le fait que le modélisateur a la liberté (et la responsabilité) de faire des choix fondamentaux pour la description de la famille d'objets qui l'intéresse. La méthode le guidera dans la construction d'un modèle cohérent. Cependant la cohérence de son modèle mécanique de la famille d'objets ne garantit pas la pertinence de ces choix. Celle-ci doit être jugée en fonction de l'efficacité de la modélisation pour répondre aux questions qui ont motivé la construction du modèle mécanique.

La construction d'un modèle de mécanique comprend trois niveaux. Le premier niveau comporte une description géométrique et cinématique des objets de la famille considérée et de leurs mouvements. Il permet de mettre en évidence les concepts de « déformations » qui résultent des choix effectués pour décrire la géométrie des objets et leurs mouvements.

Le second niveau comporte une description des efforts. Celle-ci doit être faite de manière cohérente avec la description géométrique et cinématique du premier niveau. La méthode retenue pour assurer cette cohérence est celle des puissances virtuelles qui permet la construction des concepts de « contraintes » par dualité avec ceux de « déformations ». L'expression du principe des puissances virtuelles permet alors l'écriture des équations d'équilibre du modèle.

Le dernier niveau du modèle est celui dans lequel apparaissent les matériaux constitutifs des objets de la famille. Nous allons donc y parler de comportements des matériaux, c'est-à-dire de relations entre les histoires de déformations et de contraintes. Ces relations de comportement doivent permettre de respecter les premier et second principes de la thermodynamique. Ce troisième niveau est donc un niveau de thermodynamique et comportement.

Comme on peut le constater ci-dessus, dans la construction du modèle mécanique, la description du matériau n'intervient qu'au dernier niveau. Ainsi la description de son comportement est complètement dépendante des choix faits pour décrire géométriquement et cinématiquement la famille d'objets considérés. On prend ainsi conscience du fait que l'on fait implicitement référence à un modèle, lorsque dans la vie courante de l'ingénieur on parle par exemple du comportement d'un acier. Ce modèle est celui de Cauchy qui sera développé au chapitre suivant.

Si certains lecteurs peuvent, à l'occasion de la lecture de ce chapitre, perdre l'illusion que la modélisation classique tridimensionnelle de Cauchy des objets est une « Vérité Absolue » dont les autres modèles de l'objet (par exemple, le cas échéant, modèle de plaque ou de poutre) sont des simplifications, plus ou moins efficaces et pertinentes, un

objectif majeur du chapitre sera atteint. Le modèle de Cauchy a cependant prouvé une plage de pertinence très large dans les applications des ingénieurs. Il est ainsi légitime de le considérer comme un modèle privilégié. C'est donc le modèle qui sera retenu pour les chapitres suivants et les comportements des matériaux seront décrits dans le cadre de ce modèle. Les trois paragraphes de ce chapitre abordent successivement les trois niveaux de la construction d'un modèle de mécanique.

2.1 Qu'est-ce qu'un modèle de mécanique

2.2 Niveau 1 : Géométrie et cinématique

Dans ce paragraphe nous présenterons tout d'abord les choix fondamentaux pour décrire la famille d'objets puis ceux pour décrire le mouvement et la cinématique de ces objets.

2.2.1 Description de la famille d'objets

Cette description se fait à l'aide de quatre choix fondamentaux.

- 1) Famille géométrique de l'objet
- 2) Nombre de particules de matériaux
- 3) Microstructure des particules
- 4) Liaisons internes

Choix 1 : Famille géométrique de l'objet

Dans la suite nous aurons besoin de la notion de variété différentielle, pour donner une idée de ce qu'est un domaine de mécanique noté Ω_t (où t réfère à l'instant actuel où ce domaine déformable est considéré), du point de vue mathématique. Cette notion renvoie à une branche des mathématiques très vaste : la topologie. Il ne s'agit évidemment pas ici d'introduire tous les concepts utiles pour définir rigoureusement la notion de variété différentielle s'appuyant sur la notion d'atlas. Nous renvoyons les lecteurs intéressés à un cours de topologie différentielle. Dans cette présentation, nous préférons une présentation intuitive, qui résume les propriétés utiles des variétés différentielles. Les variétés différentielles sont intuitivement des « espaces courbes » localement assimilables à un espace euclidien (de dimension n dans le cas général). Ainsi les variétés différentielles sont caractérisées par leur dimension. Dans notre cas, puisque la très vaste majorité des domaines sont considérés dans un espace tridimensionnel \mathbb{R}^3 , la dimension de la variété peut être 1, 2 ou 3. Par exemple une sphère est localement transformable en un plan (localement homéomorphe à un plan), on dit alors qu'une sphère est une variété de dimension 2. Prenons un exemple, les ouverts de \mathbb{R}^3 sont des variétés différentielles (particulières), comme les boules ouvertes, les ellipsoïdes ouverts, les cubes ouverts etc. Pour les variétés de dimension inférieures (1 et 2), on considère très généralement des variétés différentielles plongées dans \mathbb{R}^3 , comme les sphères, les tores, les surfaces implicites ($f(x, y, z) = 0$) etc. Un point très intéressant est la possibilité de définir des applications différentiables du

type $\phi : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ (où Ω_0 et Ω_t sont deux variétés différentielles de même dimension), ce qui va nous permettre de définir la transformation du domaine entre deux instants. De plus, la plupart des opérations de calcul différentiel et intégral sont applicables sur ces constructions topologiques.

A un instant t , un objet occupe un certain domaine dans l'espace Euclidien. On peut toujours « voir » ce domaine occupé comme un volume tridimensionnel, mais cette « vision » de l'objet peut, pour certaines familles d'objets et certaines applications, être trop fine. Par exemple un objet, dont l'une des dimensions (disons l'épaisseur) est beaucoup plus petite que les deux autres (un objet de la famille des coques), peut avantageusement être « vu », c'est-à-dire modélisé, comme une surface plutôt que comme un volume 3D.

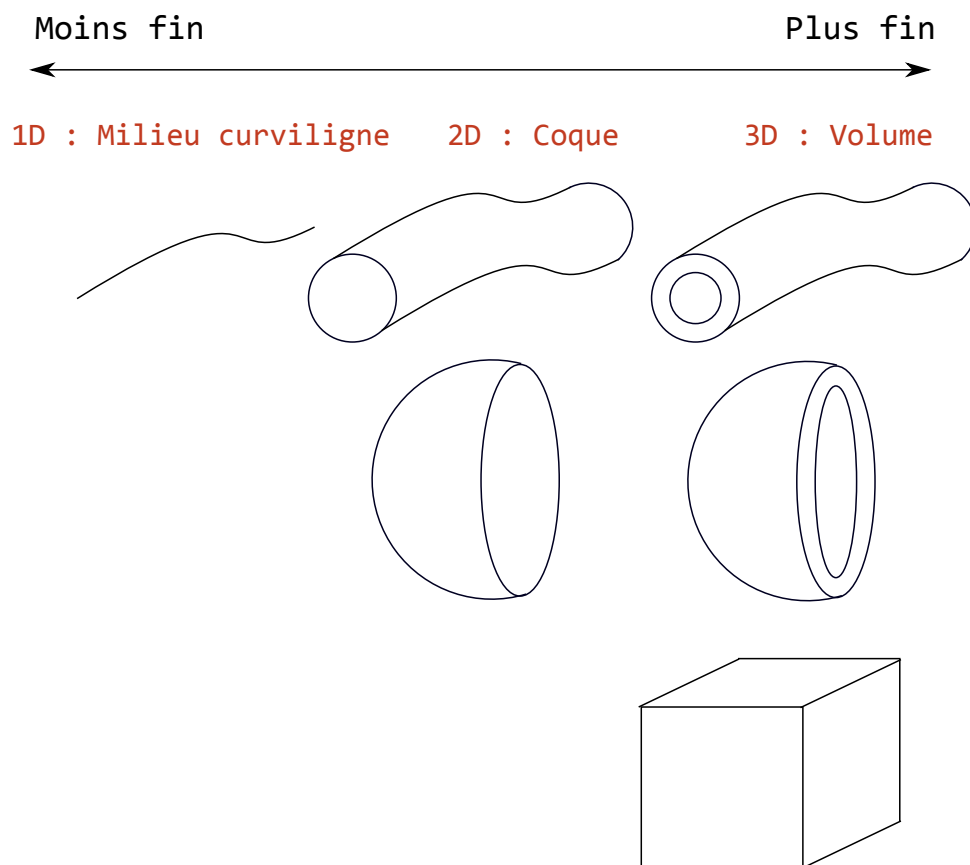


FIGURE 2.1 – Schéma de la famille géométrique de l'objet.

Cette modélisation moins fine de l'objet présente de nombreux avantages, en particulier en diminuant la dimension de la variété différentielle, dans laquelle les champs mécaniques inconnus seront introduits, de 3 à 2 (cf. figure 2.1). En revanche, il est clair qu'une partie de l'information, notamment au bord de la coque, sera perdue par rapport à une modélisation 3D. Nous aurions pu prendre l'exemple d'un objet dont deux dimensions sont petites par rapport à la troisième (objet de la famille des milieux curvilignes). Le plus souvent il est préférable de modéliser le domaine occupé par les objets de cette famille, à l'instant t , par une courbe dans l'espace Euclidien plutôt que par un domaine tridimensionnel. La variété différentielle, support des champs mécaniques inconnus, sera alors de dimension 1 au lieu de 3.

On voit ainsi que le premier choix fondamental que doit effectuer le modélisateur d'une famille d'objets est la dimension de la variété différentielle qui sera le support des champs mécaniques qui seront introduits. Un élément (ou un point) de cette variété différentielle est appelé un point de matière (ou point matériel). Nous avons vu ci-dessus que cette variété peut être 3D, quelquefois 2D (coques, plaques, etc.) ou 1D (milieux curvilignes, poutres, arcs, etc.). Dans certains cas exceptionnels le modélisateur peut avoir intérêt à choisir de représenter les champs dans une variété différentielle de dimension supérieure à 3. Nous donnerons plus loin l'exemple d'un modèle de polycristal métallique, qu'il peut être utile de représenter à l'aide d'une variété différentielle de dimension 6, produit cartésien de l'espace euclidien classique et de la variété différentielle SO_3 , représentative de l'ensemble des rotations. Cette « vision » de l'objet permet de prendre en compte la rotation des orientations des différents cristaux, ce qui dans certaines applications est essentiel pour décrire l'évolution de la forme de l'objet sous chargement (texturation du matériau). Le modélisateur a, bien sûr, intérêt à choisir la modélisation la moins fine, compatible avec l'information qu'il cherche à obtenir sur son objet et son évolution sous chargement.

Choix 2 : Nombre de particules de matériaux

Intéressons nous maintenant à un point de matière dans la variété différentielle modélisant l'objet considéré. Dans de nombreux modèles d'objets on trouve, en ce point de matière une seule particule. Mais ce n'est pas toujours le cas. Considérons par exemple un massif de sol saturé en eau. La variété différentielle support des champs mécaniques sera choisie de dimension 3. On trouve, en chaque point de matière une particule solide appelée squelette et une particule de fluide. L'eau pouvant s'écouler à travers le massif de sol, la cinématique de ces deux particules est différente. (On peut noter que la cinématique respective de chaque particule permet d'introduire des efforts d'interaction entre les particules comme des efforts de filtration de l'eau dans le squelette). Nous avons ainsi à construire un modèle qui comprend deux particules en chaque point de matière.

Considérons un autre exemple, celui d'un massif de béton soumis à un chargement thermique important (incendie). Dans ces conditions de chargement une partie des hydrates de la pâte de ciment se décompose, donnant lieu à un champ de pression de vapeur élevé dans le matériau pouvant conduire à la condensation sous forme liquide de cette vapeur d'eau. Ainsi, les modélisations les plus pertinentes de ces objets, soumis à ces chargements, comprennent quatre particules en chaque point de matière dans une variété différentielle, support des champs mécaniques, de dimension 3 :

- La particule solide (squelette)
- Une particule d'eau liquide
- Une particule d'eau vapeur
- Une particule d'air dit « sec »

Considérons maintenant un troisième exemple. Il s'agit d'une plaque en matériaux composites réalisée par un empilement de couches de fibres de carbone de 100 μm d'épaisseur. Les dimensions typiques de ces objets sont de l'ordre du mètre en largeur et en longueur alors que l'épaisseur est de l'ordre du millimètre. On voit qu'il est tentant de

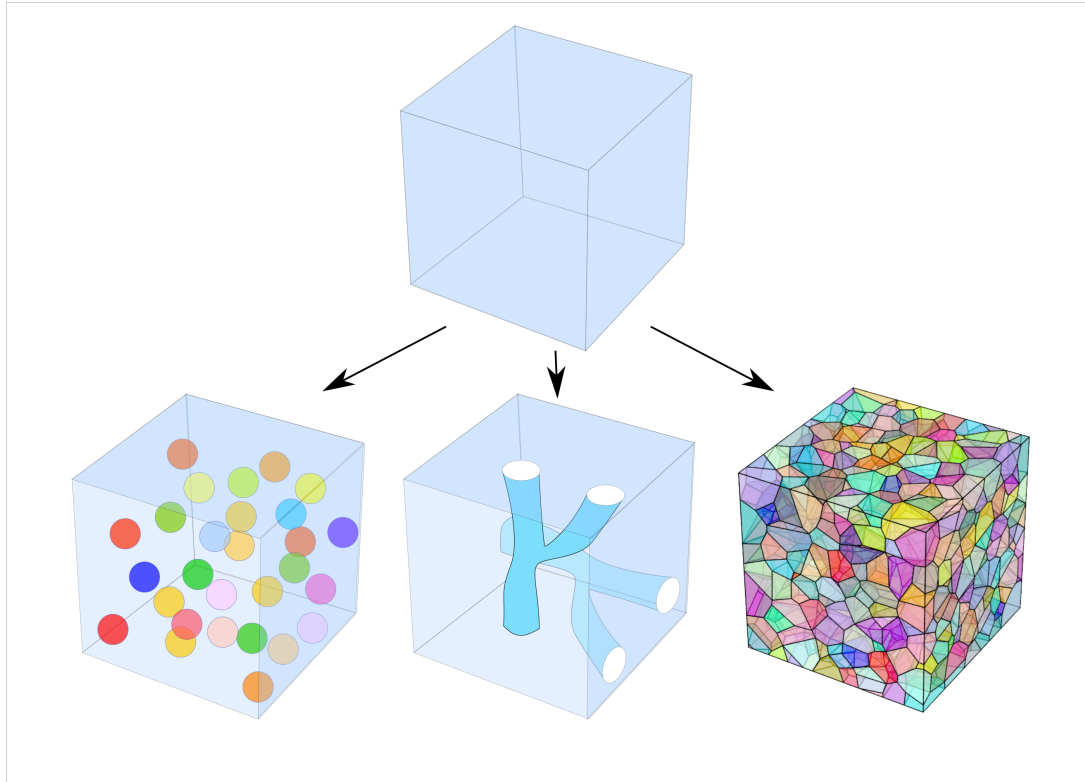


FIGURE 2.3 – Schéma représentant diverses structure microscopiques représentées par un point de matière.

Il faut donc peser, dans ses choix de modélisations, les avantages et les inconvénients relatifs d'une modélisation 3D mono-particulaire avec ceux d'une modélisation 2D multi-particulaire. La pratique (les éléments finis) montre que, le plus souvent, il est préférable de privilégier le choix d'une plus petite dimension de la variété différentiel, même si cela induit une plus grande complexité du modèle (cf. figure 2.4). Ainsi le modèle 2D multi-particulaire est beaucoup plus efficace pour décrire et prévoir les phénomènes de délaminage que le modèle 3D mono-articulaire. Pour nous en convaincre considérons la discrétisation par éléments finis de chacun des modèles. Considérons une plaque de $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ constituée de 10 couches. L'épaisseur de chaque couche est de l'ordre de $100\ \mu\text{m}$. Souvenons nous qu'un « bon » élément fini 3D est à peu près cubique. Pour voir à peu près correctement les phénomènes aux interfaces entre les couches il faut au minimum 3 éléments dans l'épaisseur de chaque couche. Le nombre d'éléments 3D nécessaires pour modéliser, par éléments finis, la plaque de $1\text{ m} \times 1\text{ m}$, dans une modélisation 3D mono-particulaire, est alors de 3×10^9 . Avec des éléments finis cubiques à 8 nœuds, cela conduit à environ 3×10^9 nœuds. (Chaque nœud appartient à 8 éléments en général). Chaque nœud a 3 degrés de liberté. Nous avons donc un problème discrétisé avec 9×10^9 inconnues.

En revanche, une modélisation 2D multi-particulaire autorise des mailles centimétriques. Le nombre d'éléments nécessaire est donc de 10^4 . Si nous choisissons des éléments surfaciques à 4 nœuds, nous aurons 10^4 nœuds. (Chaque nœud appartient à 4 éléments en général). Compte tenu de la complexité plus grande du modèle 2D multi-particulaire, chaque nœud a 21 degrés de liberté. (Chaque particule de couche peut se mouvoir indépendamment des particules des autres couches dans le plan de la plaque.

Toutes les particules ont le même mouvement normalement au plan de la plaque. Il y a donc $2n + 1$ degrés de liberté par point de matière où n est le nombre de couches). Nous avons donc un problème avec $2,1 \times 10^5$ inconnues. La comparaison des 9×10^9 inconnues du modèle discrétisé 3D mono-particulaire avec les $2,1 \times 10^5$ inconnues du modèle discrétisé 2D multi-particulaire explique clairement l'efficacité plus grande du modèle le plus complexe. Ajoutons que les modèles plus complexes mais moins fins se prêtent beaucoup plus facilement à la recherche de solutions analytiques qui ont une grande importance pour comprendre les phénomènes ou pré-dimensionner les structures.

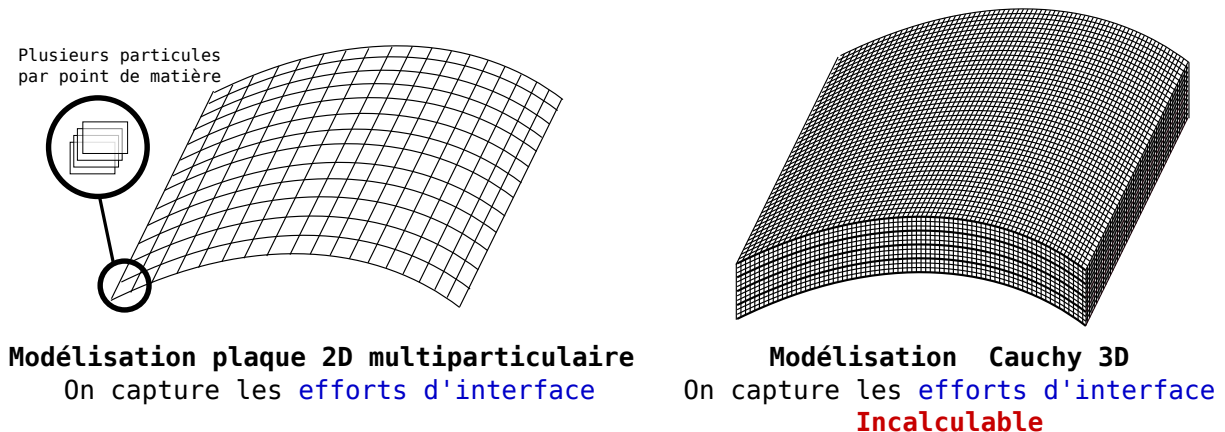


FIGURE 2.4 – Schéma représentant une modélisation par éléments finis d'un modèle 2D multi-particulaire et d'un modèle 3D mono-particulaire.

Choix 3 : Microstructure des particules

Dans tous les exemples vus ci-dessus, une particule peut être considérée comme un point et la vitesse de la particule, pour la description des mouvements, est un vecteur. Ce n'est pas toujours le cas. Considérons par exemple une poutre. Si nous souhaitons faire un modèle unidimensionnel de la poutre, nous pouvons considérer qu'il n'y a qu'une particule par point de matière de la poutre dans le milieu curviligne modélisant la poutre. Une particule est alors une section de cette poutre. Nous verrons plus loin que si l'on considère cette particule (section) comme un simple point, il ne sera pas possible que l'objet mécanique ainsi construit ait une raideur en flexion. Nous aurions un modèle de fil et non de poutre. Si nous voulons conférer au modèle de la poutre une raideur en flexion, il est nécessaire de considérer la variation de la rotation de chaque section (courbure) le long de la poutre. Ainsi on voit que la section ne doit pas être considérée comme un simple point mais comme un micro-objet, de dimension 2, orientable. Nous disons que la particule a une microstructure d'objet rigide 2D orientable. Pour des raisons similaires (raideur en flexion) les particules d'une plaque ou d'une coque ont une microstructure d'objet rigide 1D orientable. L'orientation initiale de la microstructure de la particule est généralement perpendiculaire à la surface de la coque ou de la plaque. Cette propriété n'est pas forcément conservée après déformation de l'objet.

Dans les deux exemples ci-dessus la microstructure des particules est liée à une ou deux dimensions de la matière non prise en compte dans la variété différentielle modélisant l'objet. (La section d'une poutre 1D est une particule à microstructure d'objet rigide à

deux dimensions, la particule d'une coque 2D est un objet rigide à une dimension). Il n'en est pas toujours ainsi et la microstructure d'une particule peut être liée à d'autres phénomènes que l'on veut décrire et qui se produisent à une échelle géométrique inférieure à celle à laquelle nous souhaitons bâtir notre modèle de la famille d'objets. C'est le cas de modèles de cristaux liquides ou de modèles de matériaux cristallins. Les modèles de ces objets sont construits à l'aide de particules orientables, dont l'orientation traduit une propriété à l'échelle atomique (orientation du réseau constitué par les atomes du cristal par exemple). Ainsi il est possible de concevoir un modèle 3D constitué de particules rigides orientables. Ce très beau modèle a été imaginé dès 1909 par les frères Cosserat.

Tous les modèles à microstructure, dont nous avons parlé plus haut, sont composés de particules à microstructure rigide orientable. Ce n'est pas toujours le cas et il existe quelques (rares) modèles dans lesquelles les particules peuvent subir des déformations à une échelle inférieure à celle du modèle de l'objet. La description de la déformation des particules est alors assez lourde et difficile et l'on ne retient généralement qu'une description avec peu de paramètres de déformation des microstructures des particules. Ces déformations sont « indépendantes » des déformations subies par la matière elle-même. Nous ne citerons ici que le modèle de poutres à âme mince dont les « sections » se déforment hors de leur plan lorsque l'objet subit une flexion ou une torsion. Cette déformation est prise en compte dans un modèle curviligne 1D par une microstructure déformable de la section, la particule section subit un gauchissement (cf. figure 2.5). Cette déformation est vue, d'un point de vue du modèle au niveau de la description géométrique et cinématique, comme une grandeur indépendante des déformations subies par le milieu curviligne.

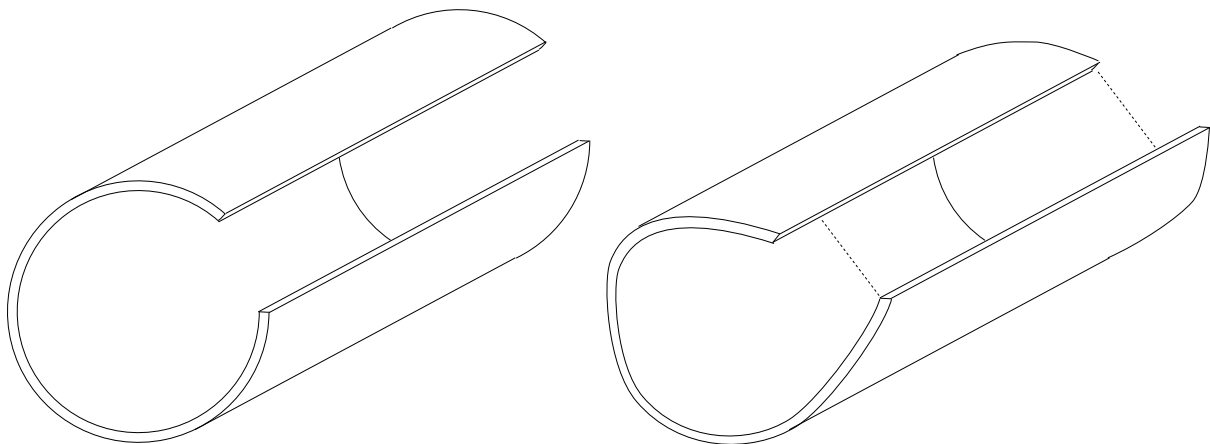


FIGURE 2.5 – Poutre à paroi mince présentant un gauchissement.

On voit ainsi que le troisième choix fondamental que doit effectuer le modélisateur d'une famille d'objets est celui de la microstructure des différentes particules de son modèle. Ce choix est en relation directe et évidente avec la nature des champs mécaniques qui seront introduits dans la variété différentielle modélisant l'objet. On dit que, plus un modèle comporte de particules à microstructure rudimentaire, (point par exemple) plus il est pauvre. Plus la microstructure des particules permet d'inclure de l'information sur les phénomènes qui se produisent à une échelle inférieure, plus le modèle est riche (cf. figure 2.6). Plus particulièrement, un modèle dont les particules ont une microstructure

champs de vecteurs dans son domaine. Les champs ne faisant pas varier le volume vérifient $\text{div}[V(x, t)] = 0$. Ils forment un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des champs de vecteurs. Donnons un autre exemple. Dans un modèle de poutre, les champs de vitesses généralisées définis par les trois premiers choix sont des champs de distributeurs des vitesses généralisées des sections considérées comme des microstructures rigides. Ces champs comprennent donc une partie correspondant à la vitesse de translation du « centre » de la section et une partie correspondant à la vitesse de rotation à la section. Le modélisateur souhaite assez souvent relier la vitesse de rotation de la section à l'évolution de la géométrie 1D support des champs (la fibre neutre de la poutre). Il impose par exemple que la normale aux différentes sections reste parallèle à la tangente à la fibre neutre. (Hypothèse d'Euler Bernoulli). Ceci impose donc l'égalité entre la vitesse de rotation de la microstructure et celle de la fibre neutre. C'est, ici encore, une relation linéaire qui va définir un sous espace vectoriel dans l'espace initial des vitesses généralisées. Donnons un dernier exemple « classique ». Le modélisateur d'une poutre peut souhaiter ne s'intéresser qu'aux évolutions qui négligent les variations de longueur de la poutre de façon à privilégier les déformations de courbures. Il s'agit alors de construire un modèle de poutres inextensibles. Cette condition restreint une fois de plus l'espace vectoriel des vitesses généralisées à un sous espace vectoriel. Dans toutes ces situations on dit que le modélisateur choisit des liaisons internes dans son modèle pour restreindre les vitesses généralisées du modèle à un sous espace vectoriel de celui défini à l'aide des trois premiers choix fondamentaux. C'est le quatrième et dernier choix fondamental pour la construction du premier niveau (géométrie et cinématique) du modèle de la famille des objets considérés.

Ce dernier choix a, comme on peut s'en douter vu la nature de ses conséquences, moins d'importance que les précédents. L'essentiel est dans le support et la nature des champs de vitesses généralisées déterminés par les trois premiers choix. Il faut cependant à ce stade de la modélisation éviter d'abuser des liaisons internes. La nature des simplifications introduites est souvent illusoire et cache définitivement certaines informations qui pourraient s'avérer utile par la suite. En particulier les conséquences de ces choix au deuxième niveau de la modélisation (modélisation des efforts) peuvent sérieusement dégrader l'intérêt du modèle. Par exemple effectuer, à ce stade d'un modèle mono-particulaire sans microstructure, le choix d'une liaison interne d'incompressibilité fait disparaître du modèle la partie isotrope de la contrainte. Pour la plus part des applications cette conséquence est très gênante. L'alternative est de construire le modèle sans cette liaison interne au premier niveau et de ne l'introduire qu'au troisième et dernier niveau lorsque l'on parle de comportement des matériaux. Certains modèles de poutre gagneraient en clarté si on leur appliquait la même prudente résolution.

Exemples de modèles 1D

Nous donnons ci-dessous six exemples de modèles mécaniques dans lesquels la variété différentielle, décrivant un objet de la famille et support des champs mécaniques, a pour dimension 1 (premier choix). Il s'agit de différents modèles de milieux curvilignes. En dehors du dernier modèle qui est multi-particulaire, les autres sont mono-particulaires (deuxième choix).

Dans le premier modèle présenté, les particules sont sans microstructure. Ce sont donc

des points. Il n'est alors pas possible pour le milieu de réagir à une flexion. Il s'agit d'un modèle de fil.

Théorie 1D : Fil

- 1) Famille géométrique de l'objet : C_t (1D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 1 Particule (section)
- 3) Microstructure des particules : point
- 4) Liaisons internes : aucune

Champ de vitesse à 3 composantes en chaque point de C_t

$$\mathcal{V}_t = \{ \underline{V} : \underline{x} \in C_t \mapsto \underline{V}(\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \}$$

Les quatre modèles qui suivent le modèle de fil et qui précèdent le modèle multi-particulaire sont des modèles dans lesquels les particules ont une microstructure. Pour les deux premiers il s'agit d'une microstructure rigide orientable. Pour les deux autres il s'agit d'une microstructure orientable, et déformable. Ces quatre modèles avec des particules à microstructure orientable sont des modèles de poutres puisque les variations d'orientation permettent de donner un comportement en flexion à l'objet curviligne.

Le premier comporte des particules à microstructure rigide orientable sans liaison interne. Il s'agit d'un modèle très classique et très utilisé pour décrire les poutres. C'est ce que l'on appelle le modèle de poutre de Timoshenko, du nom d'un de ses inventeurs.

Théorie 1D : Poutre de Timoshenko

- 1) Famille géométrique de l'objet : C_t (1D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 1 Particule (section)
- 3) Microstructure des particules : rigide orientée
- 4) Liaisons internes : aucune

Champ de vitesse à 6 composantes en chaque point de C_t

$$\mathcal{V}_t = \left\{ \left(\underline{V}, \underline{\omega} \right) : \underline{x} \in C_t \mapsto \left(\underline{V}(\underline{x}, t), \underline{\omega}(\underline{x}, t) \right) \in \mathbb{R}^6, \underline{\omega} \text{ anti-sym} \right\}$$

Rotation : produit vectoriel ou tenseur anti-symétrique

$$\underline{V}_A = \underline{V}_B + \underline{\omega} \wedge \underline{BA} = \underline{V}_B + \underline{\omega} \cdot \underline{BA}$$

Le second modèle de poutre comporte lui aussi des particules à microstructure rigide orientable. Il diffère du précédent par le choix d'imposer une liaison interne qui impose à la microstructure une rotation égale à celle du milieu curviligne. Ainsi, les sections dans ce modèle restent perpendiculaires à la fibre neutre du milieu curviligne. Il s'agit, là encore, d'un modèle très classique et très utilisé nommé modèle de poutre d'Euler Bernoulli. Il permet, grâce à la liaison interne introduite, de diminuer le nombre de champs cinématiques inconnus, mais il néglige les phénomènes de cisaillement dans l'épaisseur de la poutre 3D et les énergies associées. Ceci peut poser quelques problèmes lorsque l'élanement des poutres est faible (poutres courtes) ou si leur âme est très souple en cisaillement (poutres en matériau sandwich).

Théorie 1D : Poutre d'Euler Bernoulli

- 1) Famille géométrique de l'objet : C_t (1D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 1 Particule (section)
- 3) Microstructure des particules : rigide orientée
- 4) Liaisons internes : 2 (rotation fibre neutre)

Champ de vitesse à 4 composantes en chaque point de C_t

$$\mathcal{V}_t = \left\{ \left(\underline{V}, \omega_1 \right) : \underline{x} \in C_t \mapsto (V(x, t), \omega_1(x, t)) \in \mathbb{R}^4, \right. \\ \left. \underline{\omega} = \omega_1 \underline{e}_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial s} \cdot \underline{e}_2 \right) / \left\| \frac{\partial \underline{x}}{\partial s} \right\| \underline{e}_3 \right\}$$

Le troisième modèle et le quatrième modèle de poutre comportent des particules à microstructure déformable. Dans le troisième, un champ scalaire dans le milieu curviligne permet de prendre en compte une déformation hors plan de la section (gauchissement). Ce modèle est particulièrement utile lorsque la section est constituée de parois minces (poutres tubulaires par exemple). Ce modèle est relativement souvent utilisé pour ces types d'objet.

Théorie 1D : Poutre à paroi mince

- 1) Famille géométrique de l'objet : C_t (1D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 1 Particule (section)
- 3) Microstructure des particules : déformable hors plan
- 4) Liaisons internes : aucune

Champ de vitesse à 7 composantes en chaque point de C_t

$$\mathcal{V}_t = \left\{ \left(\underline{V}, \underline{\omega}, V_g \right) : \underline{x} \in C_t \mapsto (V(x, t), \underline{\omega}(x, t), V_g(x, t)) \in \mathbb{R}^7, \right. \\ \left. \underline{\omega} \text{ anti-sym,} \right\}$$

Le quatrième modèle a été construit pour répondre à un besoin de modélisation spécifique de l'industrie des pneumatiques. Les tringles des pneus poids lourds sont constituées d'un assemblage en parallèle de fils métalliques. Il est naturel de modéliser cet objet à l'aide d'un milieu curviligne, mais il est nécessaire de prendre en compte la déformation dans leur plan des différentes sections. Il a donc été nécessaire de développer un modèle spécifique de milieu curviligne mono-particulaire à microstructure déformable dans le plan des sections pour répondre à ce besoin. À notre connaissance ce modèle, n'a pas d'autres applications aujourd'hui que celles de la modélisation des tringles des pneumatiques poids lourds.

Théorie 1D : Tringle Michelin (Majoub 2005)

- 1) Famille géométrique de l'objet : C_t (1D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 1 Particule (section)
- 3) Microstructure des particules : déformable
- 4) Liaisons internes : aucune

Champ de vitesse à 9 composantes en chaque point de C_t

$$\mathcal{V}_t = \left\{ \left(\underline{V}, \underline{\underline{\omega}}, \underline{V}_S \right) : \underline{x} \in C_t \mapsto \left(\underline{V}(\underline{x}, t), \underline{\underline{\omega}}(\underline{x}, t), \underline{V}_S(\underline{x}, t) \right) \in \mathbb{R}^9, \right. \\ \left. \underline{\underline{\omega}} \text{ anti-sym,} \right\}$$

Ainsi que nous l'avons dit plus haut le dernier modèle présenté dans cette section est un modèle de milieu curviligne multi-particulaire. Il a été développé chez ArcelorMittal pour modéliser simplement les phénomènes de contraintes internes qui se produisent dans les bandes d'acier lors des laminages. Il a été nécessaire d'introduire 37 particules (sans microstructure) en chaque point de matière du milieu curviligne pour permettre de prédire correctement les phénomènes qui présentaient un intérêt pour l'industriel. Malgré ce nombre de particules élevé, le modèle est calculable très rapidement, grâce à sa dimension 1D. C'est ce qui permet une utilisation pour le pilotage en temps réel des outils de laminage.

Théories 1D : Multifil Arcelor (Cera 2004)

- 1) Famille géométrique de l'objet : C_t (1D plongé dans le plan)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 37 Particules (section de fil)
- 3) Microstructure des particules : aucune
- 4) Liaisons internes : aucune

Champ de vitesse à 74 composantes en chaque point de C_t

$$\mathcal{V}_t = \left\{ \left(\underline{V}_1, \dots, \underline{V}_{37} \right) : \underline{x} \in C_t \mapsto \left(\underline{V}_1(\underline{x}, t), \dots, \underline{V}_{37}(\underline{x}, t) \right) \in \mathbb{R}^{74} \right\}$$

Exemples de modèles 2D

Nous donnons maintenant quatre exemples de modèles mécaniques dans lesquels la variété différentielle, décrivant un objet de la famille et support des champs mécaniques, a pour dimension 2 (premier choix). Il s'agit de différents modèles de milieux surfaciques. En dehors du dernier modèle qui est multi-particulaire, les autres sont mono-particulaires (deuxième choix). Dans le premier modèle présenté les particules sont sans microstructure. Ce sont donc des points. Il n'est alors pas possible pour le milieu de réagir à une flexion. Il s'agit d'un modèle de membrane.

Théorie 2D : Membranes

- 1) Famille géométrique de l'objet : Ω_t (2D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 1 Particule (section)
- 3) Microstructure des particules : point
- 4) Liaisons internes : aucune

Champ de vitesse à 3 composantes en chaque point de Ω_t

$$\mathcal{V}_t = \{ \underline{V} : \underline{x} \in \Omega_t \mapsto \underline{V}(\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \}$$

Les deux modèles qui suivent le modèle de membrane et qui précèdent le modèle multi-particulaire sont des modèles dans lesquels les particules ont une microstructure. Pour les deux modèles il s'agit d'une microstructure rigide orientable uniaxiale. Ces deux modèles avec des particules à microstructure orientable sont des modèles de plaques ou de coques puisque les variations d'orientation permettent de donner un comportement en flexion à l'objet surfacique.

Le premier des modèles de plaque comporte des particules à microstructure rigide orientable uniaxiale sans liaison interne. Il s'agit d'un modèle très classique et très utilisé pour décrire les plaques. C'est ce que l'on appelle le modèle de plaque de Reissner Mindlin du nom de ses inventeurs.

Théorie 2D : Plaque de Reissner Mindlin

- 1) Famille géométrique de l'objet : Ω_t (2D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 1 Particule (section)
- 3) Microstructure des particules : orientées uni-axiales
- 4) Liaisons internes : aucune

Champ de vitesse à 5 composantes en chaque point de Ω_t

$$\mathcal{V}_t = \{ (\underline{V}, \omega_2, \omega_3) : \underline{x} \in \Omega_t \mapsto (\underline{V}(\underline{x}, t), \omega_2(\underline{x}, t), \omega_3(\underline{x}, t)) \in \mathbb{R}^5, \underline{\omega} \text{ anti-sym} \}$$

Le second modèle de plaque comporte lui aussi des particules à microstructure rigide orientable uniaxiale. Il diffère du précédent par le choix d'imposer une liaison interne qui impose à l'orientation de la microstructure de rester perpendiculaire à la surface décrivant les objets. Il s'agit, là encore, d'un modèle très classique et très utilisé nommé modèle de plaque de Love Kirchhoff. Il permet, grâce à la liaison interne introduite, de diminuer le nombre de champs cinématiques inconnus, mais il néglige les phénomènes de cisaillement dans l'épaisseur de la plaque 3D et les énergies associées. Ceci peut poser quelques problèmes lorsque l'élanement des plaques est faible (plaques épaisses) ou si leur âme est très souple en cisaillement (plaques en matériau sandwich).

Théorie 2D : Plaque de Love Kirchoff

- 1) Famille géométrique de l'objet : Ω_t (2D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 1 Particule (section)
- 3) Microstructure des particules : orientées uni-axiales
- 4) Liaisons internes : particule reste perpendiculaire à la surface moyenne

Champ de vitesse à 3 composantes en chaque point de Ω_t

$$\mathcal{V}_t = \{ \underline{V} : \underline{x} \in \Omega_t \mapsto \underline{V}(\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \}$$

Difficultés pour écrire les conditions aux limites.

Ainsi que nous l'avons dit plus haut le dernier modèle présenté dans cette section est un modèle de milieu surfacique multi-particulaire. Il a été développé pour prendre en compte les phénomènes de bord et les problèmes de délaminage dans les matériaux multicouche comme les matériaux composites. Il comprend une particule par couche ce qui permet un accès naturel et facile aux efforts entre les couches à l'origine des phénomènes de délaminage.

Théories 2D : Plaque Multicouches M4-5n (A. Ehrlacher, JF. Caron, et al.)

- 1) Famille géométrique de l'objet : Ω_t (2D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : n Particules (couche)
- 3) Microstructure des particules : orientées uni-axiales
- 4) Liaisons internes : aucune

Champ de vitesse à $5n$ composantes en chaque point de Ω_t

$$\mathcal{V}_t = \{ \underline{x} \in \Omega_t \mapsto \left(\underline{V}_1(\underline{x}, t), \underline{\omega}_1(\underline{x}, t), \dots, \underline{V}_n(\underline{x}, t), \underline{\omega}_n(\underline{x}, t) \right) \in \mathbb{R}^{5n} \}$$

Exemples de modèles 3D

Nous donnons maintenant quatre exemples de modèles mécaniques dans lesquels la variété différentielle, décrivant un objet de la famille et support des champs mécaniques, a pour dimension 3 (premier choix). Il s'agit de différents modèles de milieux volumiques. Les deux premiers modèles sont mono-particulaires, les deux autres sont multi-particulaires (deuxième choix). Dans le premier modèle et les deux derniers modèles les particules sont sans microstructure. Ce sont donc des points. Dans le second modèle les particules ont une microstructure rigide orientable 3D.

Le premier modèle 3D mono-particulaire sans microstructure est le modèle le plus classique et le plus utilisé par les ingénieurs. Il porte le nom de modèle de Cauchy, du nom de son principal inventeur. Ce modèle a une importance considérable pour les applications et le développement des sciences mécaniques. C'est le modèle que nous retiendrons pour tous les autres chapitres dans la suite de cet ouvrage.

Théorie 3D : Milieu de Cauchy

- 1) Famille géométrique de l'objet : Ω_t (3D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 1 Particule (section)
- 3) Microstructure des particules : point
- 4) Liaisons internes : aucune

Champ de vitesse à 3 composantes en chaque point de Ω_t

$$\mathcal{V}_t = \{ \underline{V} : \underline{x} \in \Omega_t \mapsto \underline{V}(\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \}$$

Le second modèle est lui aussi 3D mono-particulaire, mais les particules ont une microstructure 3D rigide orientable. Il porte le nom de modèle de Cosserat du nom des deux frères qui le proposèrent en 1909. Les applications de ce modèle sont relativement rares, mais le modèle est célèbre à cause de son élégance et de ses vertus pédagogiques. Il permet d'illustrer de manière claire les différents choix que le modélisateur peut être amené à faire. Parmi ses plus belles applications nous mentionnons la modélisation des cristaux liquides et des matériaux cristallins dans lesquelles, à l'évidence il est nécessaire de décrire une orientation associée aux particules. Il a, par ailleurs, montré son efficacité pour la prévision de bandes de cisaillement, qui peuvent apparaître sous forme de déformations intenses localisées, dans certains processus de déformation de matériaux. Pour ces prévisions, le modèle de Cauchy est inefficace alors que le modèle de Cosserat introduit une petite échelle de longueur caractéristique du matériau dans sa construction, au niveau de l'écriture de son comportement. Cela change la nature des équations du problème et permet une prévision de l'apparition et de l'orientation des bandes de cisaillements.

Théorie 3D : Milieu de Cosserat

- 1) Famille géométrique de l'objet : Ω_t (3D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 1 Particule (section)
- 3) Microstructure des particules : orientées
- 4) Liaisons internes : aucune

Champ de vitesse à 6 composantes en chaque point de Ω_t

$$\mathcal{V}_t = \left\{ \left(\underline{V}, \underline{\underline{\omega}} \right) : \underline{x} \in \Omega_t \mapsto \left(\underline{V}(\underline{x}, t), \underline{\underline{\omega}}(\underline{x}, t) \right) \in \mathbb{R}^6, \underline{\underline{\omega}} \text{ anti-sym} \right\}$$

Le troisième modèle est 3D multi-particulaire sans microstructure. Chaque point de matière comporte deux particules, une de squelette et une de fluide. C'est le modèle le plus classique et le plus utilisé par les ingénieurs en mécanique des sols et pour décrire le comportement mécanique des milieux poreux saturés par un fluide. Il porte le nom de modèle de Biot, du nom de son principal « inventeur ». Une part importante des cours de mécanique des sols est consacrée à l'étude de l'écriture des comportements des matériaux (sols) dans le cadre de ce modèle.

Théorie 3D : Milieu poreux saturé de Biot

- 1) Famille géométrique de l'objet : Ω_t (3D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 2 Particules (1 squelette, 1 fluide)
- 3) Microstructure des particules : point
- 4) Liaisons internes : aucune

Champ de vitesse à 6 composantes en chaque point de Ω_t

$$\mathcal{V}_t = \left\{ \left(\underline{V}_{\text{sq}}, \underline{V}_{\text{fl}} \right) : \underline{x} \in \Omega_t \mapsto \left(\underline{V}_{\text{sq}}(\underline{x}, t), \underline{V}_{\text{fl}}(\underline{x}, t) \right) \in \mathbb{R}^6 \right\}$$

Le quatrième et dernier modèle proposé ci-dessous est 3D multi-particulaire sans microstructure. Chaque point de matière comporte quatre particules, une de squelette et trois de fluide. Généralement une des particules fluides est de l'eau liquide, une autre de l'eau vapeur et la dernière de l'air « sec ». C'est un modèle qui a été développé récemment pour différentes applications à des milieux poreux non saturés. Il a des applications dans le domaine des sols non saturés comme les sols des remblais, et depuis quelques années de nombreuses applications dans le domaine des bétons. Il devrait vraisemblablement avoir dans un avenir proche des applications dans le domaine des céramiques à hautes performances, notamment pour ce qui concerne la prévision des phénomènes de frittage des poudres d'oxydes et la consolidation du matériau.

Théorie 3D : Milieu poreux non saturé (béton)

- 1) Famille géométrique de l'objet : Ω_t (3D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 4 Particules (1 squelette, 3 fluides)
- 3) Microstructure des particules : point
- 4) Liaisons internes : aucune

Champ de vitesse à 12 composantes en chaque point de Ω_t

$$\mathcal{V}_t = \left\{ \underline{x} \in \Omega_t \mapsto \left(\underline{V}_{\text{sq}}(\underline{x}, t), \underline{V}_{\text{e}}(\underline{x}, t), \underline{V}_{\text{v}}(\underline{x}, t), \underline{V}_{\text{a}}(\underline{x}, t) \right) \in \mathbb{R}^{12} \right\}$$

Exemple d'un modèle 6D

Pour finir cette collection d'exemples, nous présentons un modèle plus exotique qui a été proposé par Maurizio Brocato dans le cadre de sa thèse de l'ENPC pour les besoins d'un producteur d'aluminium. C'est un modèle de matériaux polycristallins. A l'échelle d'observation de l'ingénieur, chaque volume élémentaire contient un nombre très grand de cristaux d'orientations variées. La distribution de ces orientations à l'échelle dite « micro » joue un rôle très important sur la réponse du matériau à une sollicitation à l'échelle macroscopique. La proposition de M. Brocato est de décrire les objets dans un « espace profond », produit cartésien de l'espace euclidien classique à trois dimensions par la variété différentielle de dimension 3, $SO\ 3$, qui décrit les différentes orientations possibles d'un objet 3D rigide (ensemble des tenseurs orthogonaux par exemple). Cet univers à 6 dimensions permet la construction d'un modèle mono-particulaire de la famille d'objets considérés. En effet une particule occupe un point de l'univers à 6 dimensions. Elle

a donc une position dans l'espace euclidien. On pourrait de manière alternative considérer que l'on a un modèle 3D classique, mais avec une infinité de particules en chaque point de matière, chacune d'entre elles se distinguant des autres par son orientation. En fait la vision de ce modèle comme celle d'objets mono-particulaires dans un espace profond présente des avantages non négligeables pour l'écriture des équations.

Théorie 6D : Milieu de Cosserat en espace profond de Brocato

- 1) Famille géométrique de l'objet : $\Omega_t \times SO_3$ (6D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 1 Particule
- 3) Microstructure des particules : orientées
- 4) Liaisons internes : aucune

Champ de vitesse à 6 composantes en chaque point de $\Omega_t \times SO_3$

2.2.2 Description du mouvement et cinématique

Les quatre choix fondamentaux décrits plus haut correspondent à la première étape de la construction du premier niveau. Nous allons ci-dessous aborder la deuxième étape de ce premier niveau : la description du mouvement et de la cinématique de la famille des objets, définie à l'aide des quatre premiers choix fondamentaux du modélisateur. Plusieurs descriptions du mouvement sont possibles. La plus naturelle consiste à décrire les champs de vitesses généralisées dans la configuration actuelle. C'est la description eulérienne du mouvement. Cette première description est peu efficace pour décrire des matériaux solides et les concepts de déformation sont difficiles à exhiber.

On peut, pour palier ces difficultés, utiliser une description qui fasse appel à une configuration de référence pour chaque ensemble de particules et aux transformations de ces configurations pour avoir la configuration actuelle occupée à l'instant t par l'ensemble des particules. C'est la description lagrangienne du mouvement.

Gérer simultanément plusieurs configurations de référence (une pour chaque type de particules) pose des problèmes techniques importants, essentiellement liés au fait que dans un domaine donné, à l'instant t , les ensembles de particules concernés varient. On utilise alors une description mixte, qui privilégie un type de particules dont le mouvement bénéficiera d'une description lagrangienne alors que le mouvement des autres particules sera décrit à l'aide de descriptions eulériennes. Ces trois descriptions sont l'objet des trois sections ci-dessous.

Description eulérienne du mouvement

À la fin de la première étape de construction du modèle nous sommes censés connaître à l'instant t :

- Le domaine Ω_t occupé par les particules qui nous intéressent
- La nature de chacune des particules, c'est-à-dire la nature mathématique des champs de vitesses généralisées associés à ces particules (champs de vecteurs pour les particules ponctuelles, champs de distributeurs pour les particules rigides, etc.)

Nous avons donc ainsi une description du mouvement de ces particules. Cette description par la donnée des champs de vitesses généralisées dans la configuration actuelle est appelée description eulérienne. Elle est très utilisée dans les matériaux fluides qui n'ont pas la « mémoire » de leur forme initiale. Lorsque l'on s'intéresse à des matériaux solides, il est nécessaire d'intégrer ces champs de vitesses généralisées pour avoir la trajectoire de chacune des particules. On peut alors, en étudiant la variation des trajectoires de particules initialement voisines exhiber un concept de déformation généralisée des particules. C'est l'histoire des champs de déformations généralisées de l'ensemble des particules qui représente l'information essentielle du phénomène de changement de forme au cours de la transformation. Cette histoire est donc l'une des inconnues principales du problème de prévision des changements de forme d'un objet dans le cadre d'un modèle.

Cette description du mouvement pose deux difficultés principales. La première est essentiellement technique. Pour avoir accès aux concepts de déformations de l'objet, il est nécessaire d'intégrer les champs de vitesses pour déterminer les trajectoires. La seconde est que le domaine Ω_t , occupé par les particules qui nous intéressent, évolue dans le temps. C'est donc, le plus souvent, un domaine inconnu (en revanche le domaine initial Ω_0 est le plus souvent connu). Nous sommes donc amenés à écrire des équations dans un domaine que nous ne connaissons qu'après les avoir résolues. C'est la raison pour laquelle cette description du mouvement est peu utilisée en mécanique des solides, même si elle semble la plus directement connectée à la définition des objets de la famille.

Nous résumons la description eulérienne comme suit (cf. figure 2.7) :

- **A chaque instant** t , pour tout point de matière \underline{x} , on connaît :

$$(V_1(\underline{x}, t), \dots, V_n(\underline{x}, t))$$

- $V_i(\underline{x}, t)$: **vitesse généralisée** de la i -ième particule en \underline{x} et t .

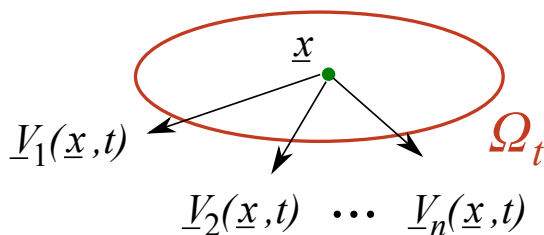


FIGURE 2.7 – Description eulérienne du mouvement en vitesses.

Description lagrangienne du mouvement

Pour éviter les inconvénients de la description eulérienne des mouvements pour les solides, nous pouvons considérer une configuration de référence F_i pour chacune des n familles de particules ($1 \leq i \leq n$). Nous notons \underline{X}_i une particule de F_i . À l'instant t , on considère le domaine d'intérêt Ω_t actuel. Une partie (variable dans le temps) des particules du domaine F_i de chaque famille, qu'on note $\Omega_0^i(t)$, se trouve dans le domaine Ω_t . Ce sont ces particules qui nous intéressent à cet instant. (Les domaines de référence F_i peuvent être éventuellement plus grand que les domaines Ω_0^i car par exemple les particules

« fluide » peuvent s'écouler ou diffuser, et on ne considère alors que celles qui sont dans Ω_t à l'instant t).

Le placement des particules à l'instant t est donné par n applications $\underline{\Phi}_i(\underline{X}_i, t)$ partant de ces sous-ensembles $\Omega_0^i(t)$ et à valeurs dans l'ensemble constitué du produit cartésien de l'espace euclidien 3D \mathbb{R}^3 et de la variété différentielle des microstructures. Par exemple, la variété différentielle des microstructures pour les particules rigides 3D orientables est le groupe des rotations SO_3 , (i.e., l'ensemble des tenseurs orthogonaux, variété différentielle de dimension 3). Ainsi, pour cet exemple, placer une particule revient à donner sa position dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 et l'orientation de sa microstructure à l'aide d'une rotation c'est-à-dire un élément de SO_3 . Si une particule a une « microstructure déformable », il faut en outre donner la « forme » de cette microstructure. Cette description du mouvement est appelée lagrangienne.

On voit que, si elle est commode et simple pour un milieu mono-particulaire, elle est assez lourde pour un milieu multi-particulaire à cause de la prise en compte de plusieurs configurations de références pour les familles de particules. Dans la pratique elle n'est utilisée, dans le cas multi-particulaire, qu'avec des hypothèses simplificatrices du type « petit déplacements relatifs entre les différentes particules ». Sous cette hypothèse, même si les déplacements des particules peuvent être importants, deux particules de familles différentes, initialement voisines, restent voisines au cours du processus de déformation de l'objet. Ainsi on peut en première approximation « confondre » les configurations de référence des différentes particules.

Nous résumons la description lagrangienne du mouvement comme suit (cf. figure 2.8) :

- **Nécessaire** pour définir le concept de **déformation**
- On définit n configurations de **référence** $\Omega_0^1, \dots, \Omega_0^n$
- \underline{X}_i est la i -ième particule, dans la configuration de référence Ω_0^i , en \underline{x} à l'instant t
- On a n **trajectoires** : $\underline{x} = \underline{\phi}_i(\underline{X}_i, t)$

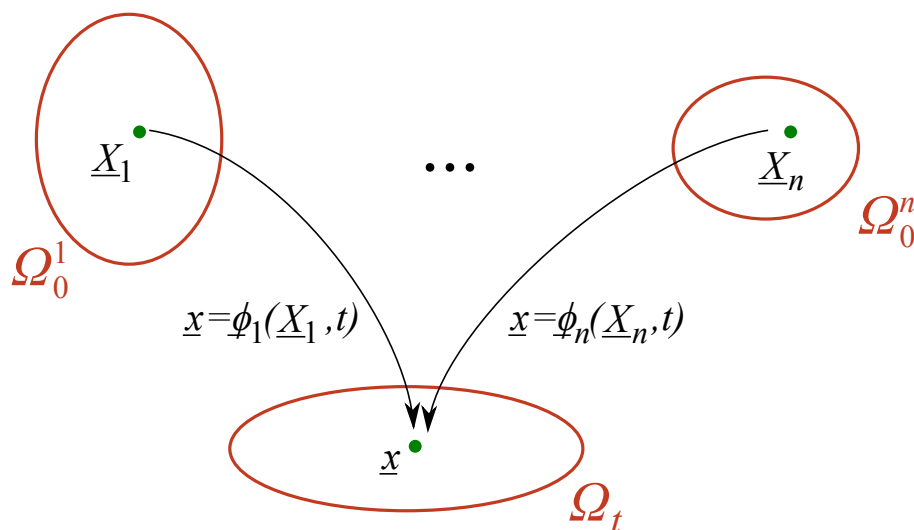


FIGURE 2.8 – Description lagrangienne du mouvement.

Description mixte du mouvement

Comme nous venons de le voir une description totalement lagrangienne du mouvement d'un objet dans un modèle multi-particulaire n'est pas très commode. Il se trouve que dans de nombreux modèles multi-particulaires une des familles de particules joue un rôle plus important que les autres. C'est le cas dans les milieux poreux saturés ou non par des fluides. Dans ces situations il est commode de proposer une description mixte du mouvement. Cette description est lagrangienne pour la particule choisie et eulérienne pour les autres particules. Nous bénéficions ainsi des avantages que donne le fait de disposer d'une configuration de référence pour introduire des concepts de déformation dans le milieu, tout en conservant la simplicité que permet le fait de n'avoir qu'une seule configuration de référence. Dans ce type de description, nous ne nous intéressons qu'aux trajectoires des particules de la première famille. On comprend bien que cette description du mouvement est pertinente lorsque la première particule est celle d'un squelette et que les autres particules sont de type fluide.

Nous résumons la description mixte du mouvement comme suit (cf. figure ??) :

- Description **lagrangienne** pour le **squelette**
- Description **eulérienne** pour les **fluides**
- On définit **une** configuration de **référence** Ω_0
- On note \underline{X} la particule **squelette** dans Ω_0 qui est en \underline{x} à l'instant t
- $V_2(\underline{x}, t), \dots, V_n(\underline{x}, t)$: vitesses des particules dans la configuration **actuelle** Ω_t
- On a **une seule** trajectoire $\underline{x} = \phi(\underline{X}, t)$

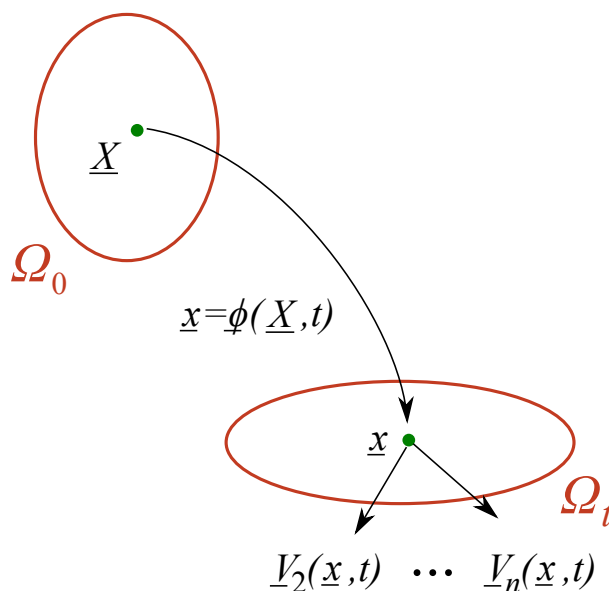


FIGURE 2.9 – Description mixte du mouvement.

Quelque soit le type de description du mouvement retenu, la fin de la construction du premier niveau du modèle consiste à exhiber les concepts de déformations cohérents avec les quatre premiers choix fondamentaux effectués. Nous illustrerons ce travail dans

le cas du modèle de Cauchy au chapitre 3. Lorsque la construction du premier niveau du modèle est effectuée, nous pouvons aborder le deuxième niveau qui permettra de définir les efforts dans le modèle.

2.3 Niveau 2 : Définition des efforts

Les efforts sont introduits dans le deuxième niveau de construction du modèle sur la configuration actuelle. La méthode utilisée est celle des puissances virtuelles qui sera présentée ci-dessous. L'idée philosophique de base de la méthode est que les concepts « premiers » sont ceux de mouvement (vitesses) et de puissance. Les efforts n'apparaissent qu'ensuite et sont identifiés par leurs conséquences en termes de puissance lorsqu'ils sont appliqués à un objet en mouvement. Il n'est pas nécessaire d'adopter ce point de vue pour construire un modèle de mécanique. On peut introduire les efforts comme un concept premier. On peut aussi les introduire en faisant un bilan des quantités de mouvement, etc. La méthode des puissances virtuelles sera retenue ici car elle possède un côté « automatique » dans la construction des efforts qui permet de reporter à plus tard la question du sens physique de ceux-ci. On peut ainsi avoir quelques surprises sur le sens physique du modèle construit, ce qui présente bien sûr quelques inconvénients, mais aussi les avantages d'une plus grande liberté de création et d'invention dans la modélisation.

La méthode se déroule en trois étapes. Chacune des deux premières étapes consistent en un choix du modélisateur. Le premier choix concerne l'espace vectoriel des mouvements virtuels. On peut considérer qu'il s'agit en quelque sorte d'une « boîte à outils » qui va permettre de mesurer les efforts. Le deuxième choix concerne la définition des efforts à proprement parler. Comme nous l'avons dit plus haut, ceux-ci sont définis par leur conséquence, en termes de puissance, sur chacun des mouvements virtuels de l'espace vectoriel précédemment choisi. La relation linéaire entre la puissance d'un système d'efforts et le mouvement virtuel implique que les efforts vont être définis par des formes linéaires sur l'espace vectoriel des mouvements virtuels. Le deuxième choix est donc celui de ces formes linéaires définissant les efforts. La dernière étape est l'application du Principe des Puissances Virtuelles. Ce principe est équivalent aux deux lois de Newton ou au principe de conservation de la quantité de mouvement. Il va permettre d'écrire les lois d'équilibre des efforts dans le modèle en construction.

2.3.1 Choix de l'espace vectoriel des mouvements virtuels

Comme nous l'avons dit, le premier choix concerne l'espace vectoriel des mouvements virtuels. On peut considérer qu'il s'agit en quelque sorte d'une « boîte à outils » qui va permettre de mesurer les efforts. Dans cette boîte à outils on trouve des champs analogues à ceux qui ont été identifiés comme étant les champs des vitesses généralisées après le troisième ou le quatrième choix fondamental au premier niveau de construction du modèle (avant ou après le choix des liaisons internes). L'idée de base est que le système d'efforts donne une mesure scalaire de la puissance qui serait développée si le champ des vitesses généralisées était celui de la fonction test. Lorsque l'on a passé en revue l'ensemble des fonctions tests, on a caractérisé ce système de force puisque l'on connaît son action, en termes de puissance, quelque soit le champ de vitesse dans lequel il est susceptible de travailler.

Il est important de noter que cet espace vectoriel noté \mathcal{C}^* doit contenir les vitesses généralisées réelles possibles. Notons cependant que comme il ne s'agit que de « fonctions tests », elles n'ont pas, au contraire des vitesses généralisées réelles, de dépendance par rapport au temps t , (autre que le fait d'être des champs du domaine Ω_t). Il peut cependant être plus grand que l'espace vectoriel des vitesses généralisées réelles possibles et contenir des champs interdits par les liaisons internes. Généralement il est recommandé de retenir pour l'espace vectoriel des mouvements virtuels, l'espace vectoriel créé après le troisième choix fondamental (microstructure des particules). Cela permet en effet de prendre en compte des efforts intérieurs (voir définition plus loin) qui « ne travaillent pas ». Pour illustrer, prenons l'exemple d'« un champ de pression » dans un milieu obéissant à une liaison interne d'incompressibilité. Les détails seront donnés plus loin. Cependant, le choix étant possible, nous avons ici affaire au cinquième choix fondamental du modèle.

Un autre choix important concernant cette « boîte à outils » est celui des mouvements virtuels rigidifiant. De quoi s'agit-il ? Nous savons que l'un des principes de Newton est celui de l'« égalité de l'action et de la réaction ». Ainsi si nous partitionnons notre système étudié en deux sous-systèmes, le premier sous-système exerce des efforts sur le second et réciproquement le second exerce une réaction sur le premier. D'après le principe de Newton ces deux systèmes de forces sont opposés. Il est clair que ce sont des efforts intérieurs à notre système. La généralisation de ce principe de Newton dans une approche de type « Puissances Virtuelles » postule que les efforts intérieurs ne travaillent pas dans un mouvement rigidifiant, c'est-à-dire un mouvement qui ne déforme pas le système auquel on s'intéresse. (À l'évidence, dans ce cas, la puissance de l'effort du premier sous-système sur le second est l'opposé de la puissance de l'effort du second sous-système sur le premier). Ces mouvements rigidifiant (ou vitesses virtuelles rigidifiant, ou fonctions tests rigidifiant) forment à l'évidence un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des mouvements virtuels. Il est donc nécessaire de choisir le sous-espace vectoriel des mouvements rigidifiant dans l'espace vectoriel des mouvements virtuels. C'est le sixième choix fondamental du modèle.

On peut douter que le modélisateur ait là un véritable choix à faire. Dans les milieux mono-particulaires, sans microstructure, le « choix » du sous espace vectoriel des mouvements rigidifiant s'impose. En revanche, dans les milieux multi-particulaires ou lorsque les particules ont une microstructure, ce choix permet en fait de préciser la signification cinématique des différents champs de vitesses généralisées. Illustrons avec l'exemple d'une particule avec microstructure d'objet rigide orientable. Dans les modèles contenant ce type de particules, parmi les champs de vitesses généralisées, on trouve un champ donnant le « taux de rotation » de la microstructure. De quel taux de rotation s'agit-il ? Deux choix simples sont possibles. Le premier consiste à dire qu'il s'agit du taux de rotation par rapport au référentiel euclidien dans lequel nous décrivons les objets. Le second consiste à dire qu'il s'agit du taux de rotation de la microstructure par rapport à la matière. (Il est conseillé d'adopter le premier point de vue sauf s'il y a des avantages évidents à utiliser le second). Dans le premier cas l'une des caractéristiques des mouvements rigidifiant est que, dans un tel mouvement, la rotation de la microstructure doit être égale à la rotation de la matière. Dans le second cas la rotation (relative à la matière) dans un mouvement rigidifiant doit être nulle. Ainsi les deux « choix fondamentaux » effectués pour la définition de l'espace vectoriel des mouvements virtuels et de son sous espace vectoriel des mouvements rigidifiant ont une importance moindre que les précédents et n'apporte fi-

nalement que des précisions sur le sens à donner aux différentes composantes du champ de vitesses généralisées.

2.3.2 Choix des formes linéaires définissant les efforts

Avant de choisir les formes linéaires définissant les efforts tentons de comprendre la nature des efforts en jeu dans les objets mécaniques que nous souhaitons modéliser. Pour cela quittons un instant notre échelle macroscopique de description des objets et intéressons nous, à une échelle bien inférieure, à une petite partie du matériau constituant notre objet. Nous nommerons cela un volume élémentaire. Ce volume de très petite taille par rapport aux dimensions de notre objet est sensé représenter, à une échelle microscopique ce que nous avons appelé une particule à l'échelle macroscopique. Nous utiliserons donc indifféremment dans la suite le terme de volume élémentaire ou celui de particule. Ce volume élémentaire est soumis à des efforts de la part de la matière présente dans le reste de l'Univers. Pour ces efforts nous ferons la distinction entre la partie des efforts venant de la matière hors de notre objet, et la partie des efforts venant des autres particules de notre objet. Les premiers seront appelés efforts extérieurs, les seconds efforts intérieurs. Le référentiel attaché à la particule n'étant généralement pas galiléen, il nous faut ajouter des efforts d'inertie liés au mouvement du référentiel lié à la particule par rapport à un référentiel galiléen. Nous parlerons d'efforts d'accélération pour désigner ces efforts. Nous distinguons ainsi trois types d'efforts exercés sur les particules de notre objet et dans l'approche de type « Puissances Virtuelles » décrite plus haut, nous aurons donc à choisir trois formes linéaires sur l'espace vectoriel des mouvements virtuels pour définir chacun de ces efforts. Il s'agit là des septième, huitième et neuvième choix fondamentaux pour la création du modèle de la famille d'objet qui nous intéresse. Nous allons revenir à notre « volume élémentaire » afin de comprendre quelle est la nature des relations entre ces formes linéaires et les fonctions tests de l'espace vectoriel des mouvements virtuels. Nous allons successivement étudier par ordre de complexité croissante :

- La forme linéaire définissant les efforts extérieurs
- La forme linéaire définissant les efforts d'accélération
- La forme linéaire définissant les efforts intérieurs

Concernant cette dernière forme linéaire, rappelons-nous que nous avons défini un sous espace vectoriel des mouvements rigidifiant. Bien évidemment les efforts intérieurs ont une puissance virtuelle nulle pour ces mouvements rigidifiant. Il s'agira de s'assurer que le sous espace vectoriel correspondant sera inclus dans le noyau de la forme linéaire correspondante. Plus précisément il s'agira de construire une forme linéaire définissant les efforts intérieurs de façon à ce qu'elle satisfasse cette condition. C'est ce qui est appelé la condition de cohérence du modèle.

La puissance virtuelle des efforts extérieurs

Considérons une particule de notre objet, ou, ce qui revient au même conceptuellement, un volume élémentaire représentant cette particule à une échelle microscopique. Cette petite partie de matière est soumise à un système de forces extérieures de la part des particules « extérieures » à notre objet. Nous allons distinguer les forces inter-particulaires

« à longue portée » (à l'échelle de l'ingénieur) de celles à « courte portée ». L'exemple le plus habituel des forces du premier type est la gravité. Elles ont pour origines différents champs physiques (gravitaire, électromagnétique, etc.) créés par les particules extérieures à notre objet au voisinage de la particule considérée. Les forces à courte portée sont celles associées « au contact » à l'échelle de l'ingénieur. Elles ont une origine électrostatique très locale, liée aux phénomènes d'attraction et de répulsion d'atomes à l'échelle atomique. On voit bien que les « particules intérieures » à notre objet ne subissent pas d'action de ce type de la part des « particules extérieures ». Il n'en est pas de même pour les volumes élémentaires très proches de la frontière. A l'échelle de l'ingénieur il s'agit des particules sur la frontière de l'objet. Dans un mouvement virtuel de l'objet, chaque particule va recevoir une puissance virtuelle, fonction linéaire de sa vitesse généralisée. Ainsi globalement pour l'ensemble de l'objet on voit que l'on peut généralement écrire la puissance virtuelle des efforts extérieurs dans un mouvement virtuel comme la somme

- 1) d'une intégrale, sur le domaine (volume) actuel, de l'objet d'une densité scalaire, linéaire en fonction de la vitesse généralisée locale de la particule, traduisant les puissances virtuelles reçues par toutes les particules de l'objet grâce aux efforts « à longue portée »
- 2) d'une intégrale sur la frontière (surface) actuelle de l'objet d'une densité scalaire, linéaire en fonction de la vitesse généralisée locale de la particule, traduisant les puissances virtuelles reçues par les particules de la frontière de l'objet grâce aux efforts de contact avec l'extérieur « à courte portée ».

Le choix de ces densités volumique et surfacique de puissance virtuelle, à intégrer respectivement dans le domaine et sur la surface, afin d'obtenir la forme linéaire « Puissance Virtuelle des efforts Extérieurs » (PVE), suffit généralement pour la plupart des modèles et des applications. Ceci dit il est possible de faire des choix plus complexes, à charge pour le modélisateur d'en donner le sens physique à la fin de la construction de son modèle. Localement les densités de puissance virtuelle sont des expressions scalaires, linéaires des valeurs locales des vitesses généralisées. On postule donc l'existence locale de grandeurs duales des vitesses généralisées. (Vecteur dans le cas d'une particule sans microstructure, tenseur dans le cas d'une particule avec une microstructure rigide orientable, etc.). Ces êtres mathématiques, duaux des vitesses généralisées, sont appelés « champs de forces extérieures de volume généralisées » pour ce qui concerne la densité volumique et « champs de forces extérieures de surface généralisées » pour ce qui concerne la densité surfacique. Les champs de forces extérieures de volume généralisées sont des données de notre modèle.

La puissance virtuelle des efforts d'accélération

La dérivée en suivant les particules du champ des vitesses généralisées nous donne le champ des accélérations généralisées des particules de notre objet. Pour chacune des particules, la puissance virtuelle des efforts d'accélération doit être linéaire

- 1) en fonction de la vitesse généralisée de la particule
- 2) en fonction de son accélération généralisée

Ainsi généralement la puissance virtuelle des efforts d'accélération de l'objet sera une intégrale d'une densité volumique dans le domaine, linéaire en fonction de la vitesse

généralisée de la particule et linéaire en fonction de son accélération généralisée. Cette expression fait intervenir des grandeurs scalaires ou tensorielles caractéristiques des inerties des particules comme les masses volumiques ou les inerties de rotation.

La puissance virtuelle des efforts intérieurs

Nous nous intéressons maintenant aux interactions entre les différentes particules appartenant à notre objet. Les seules actions qui ont de l'importance sont celles à courte portée que nous avons appelé actions de contact. Deux particules en interaction mutuelles exercent l'une sur l'autre des actions opposées. Ainsi les interactions entre ces deux particules ne contribuent à la puissance virtuelle des efforts intérieurs que dans leur mouvement relatif. Lorsque l'on se place à l'échelle macroscopique et que ces interactions sont à courte portée, on comprend qu'il est nécessaire de faire intervenir les gradients du champ des vitesses généralisées dans l'expression de la puissance linéaire des efforts intérieurs sous peine d'avoir un modèle trivial et à pertinence très réduite.

Ainsi, la puissance virtuelle des efforts intérieurs sera le plus souvent écrite comme l'intégrale sur le domaine d'une densité linéaire en fonction des vitesses généralisées et de leurs gradients. Notons que ceci nous donne une liberté considérable. Il sera nécessaire de comprendre, après la construction du modèle, le sens physique des êtres duaux introduits pour exprimer cette densité. C'est la tâche la plus gratifiante intellectuellement dans cette méthode de construction de modèle et lorsque les modèles sont complexes, on n'est pas à l'abri de surprises, bonnes ou mauvaises. Les bonnes surprises de cette méthode automatique sont l'invention de concepts d'efforts intérieurs non triviaux, pertinents et non directement accessibles à l'intuition. Les mauvaises surprises (malheureusement les plus nombreuses) sont l'invention de nouveaux modèles dont le domaine de pertinence peut être très réduit, et surtout inadapté pour répondre aux questions que l'on se pose sur le fonctionnement mécanique de nos objets. Il faut alors itérer dans la démarche en essayant de corriger les défauts des choix initiaux au niveau de la puissance virtuelle des efforts intérieurs. Le plus souvent on se contente d'utiliser le premier gradient et la théorie des objets construite est alors dite théorie au premier gradient. Enfin rappelons la condition de cohérence que nous avons évoquée plus haut : Le sous-espace vectoriel des mouvements rigidifiant doit appartenir au noyau de la forme linéaire donnant la puissance virtuelle des efforts intérieurs. (Rappelons que c'est l'équivalent du principe d'égalité de l'action et de la réaction de Newton).

Concrètement le plus souvent on propose une écriture pour la puissance virtuelle des efforts intérieurs, puis on étudie les conséquences sur les différents termes duaux introduits de la condition de cohérence. Les termes duaux de la vitesse généralisée et de ses gradients apparaissant dans l'expression de la densité volumique qui sert à la définition de la puissance virtuelle des efforts intérieurs sont appelés les contraintes généralisées ou efforts intérieurs du modèle.

2.3.3 Principe des puissances virtuelles

Quelque soit la méthode utilisée pour construire un modèle mécanique d'une famille d'objets, lorsque les efforts ont été identifiés (ou créés au sens de l'invention du modèle), il est nécessaire d'introduire un principe physique pour pouvoir établir les équations

d'équilibre liants ces efforts. Disons tout d'abord quelques mots de ce qu'est un principe physique . Selon le Petit Larousse, il s'agit d'une « loi à caractère général, régissant un ensemble de phénomènes vérifiée par l'exactitude de ses conséquences ». C'est une proposition que l'esprit admet comme point de départ. Le mot a le sens d'origine ou de cause première.

C'est le sens que lui donne Descartes dans le Discours de la Méthode dont la phrase la plus connue est « J'ai tâché de trouver en général les principes ou premières causes de tout ce qui est ou qui peut être dans le monde, sans rien considérer pour cet effet que Dieu seul qui l'a créé, ni les tirer d'ailleurs que de certaines semences de vérités qui sont naturellement en nos âmes ». Un principe physique est donc une création de « l'esprit humain » (au sens du fruit de la collaboration de très nombreuses intelligences individuelles au travers des âges). Il est « produit » par un processus itératif associant étroitement l'observation de la nature (ou plus précisément l'observation d'une vaste famille de phénomènes de caractères similaires), la proposition de concepts de plus en plus synthétiques et pertinents pour rapporter ces observations, l'association à ces concepts de grandeurs mesurables, ce qui s'accompagne de la création des unités de mesure correspondante et des opérations ou relations mathématiques qui ont un sens physique sur ces grandeurs, et enfin la proposition d'une ou de plusieurs équations reliant ces grandeurs, en accord avec la totalité des expériences et observations réalisées dans le cadre de la famille des phénomènes étudiés. On admet alors, pour la suite de la construction intellectuelle du « modèle du monde » (ou tout au moins d'un monde réduit à la production des phénomènes étudiés), le postulat que ces relations sont exactes pour la vaste famille des phénomènes étudiés. On aurait tort de vouloir réduire le principe aux seules équations postulées. Le travail essentiel de l'esprit humain a été de dégager les concepts pertinents et la définition des grandeurs associées qui précèdent l'écriture de ces équations. Notons quelques points importants :

- 1) La formulation d'un principe est le fruit d'une démarche longue et itérative, souvent le sujet d'une controverse entre les meilleurs cerveaux humains à travers les âges.
- 2) Le principe est établi lorsque l'ensemble de la communauté scientifique qui étudie la famille de phénomènes visée par ce principe l'adopte. C'est une validation par un avis consensuel de l'ensemble des experts du sujet.
- 3) Un principe n'a aucune prétention à être une Vérité Absolue. Il établit des relations, avec le niveau de précision demandé, entre les grandeurs attachées à une famille de phénomènes donnée. On sait bien que les principes de la « mécanique classique » sont contredits par certaines observations qui sont du domaine de la « mécanique relativiste » par exemple. Cela n'empêche pas ces principes de mécanique classique d'être « vrais » pour une vaste famille de phénomènes (la plupart des phénomènes qui concernent les ingénieurs en génie mécanique) et d'être reconnus et utilisés comme tel. Le corollaire de cette proposition est que, lorsqu'un principe est établi, il faut chercher à déterminer les limites de son domaine de validité. L'expérience du passé montre que généralement ses limites de validité, lorsque l'on a pu les déterminer, vont bien au-delà des faits et observations qui ont permis de le concevoir et de l'établir.
- 4) Lorsque l'on cherche à construire un modèle qui appartient manifestement à une famille de phénomènes pour lesquels un principe physique a été déterminé, il convient

d'adopter sans hésitation ce principe pour établir les équations auxquelles sont soumises les grandeurs qui apparaissent dans le modèle. Pour ce qui concerne notre méthode de construction de modèles mécaniques pour des familles d'objet, nous devons donc adopter les principes de la mécanique classique.

- 5) L'équation formulée dans un principe physique sert de point de départ à la déduction de nombreuses autres équations par un processus purement mathématique. Certaines des équations déduites sont équivalentes à l'équation initiale et peuvent donc, dans une démarche alternative être choisie comme l'équation postulée vraie. Il ya donc plusieurs formulations équivalentes d'un même principe. Les équations postulées vraies dans certaines formulations deviennent ainsi des théorèmes dans d'autres formulations et réciproquement.

Proposons maintenant une formulation pour un principe fondamental de mécanique classique . Ainsi que nous l'avons dit, plusieurs approches sont possibles pour formuler un principe permettant d'établir les équations d'équilibre des efforts de notre modèle.

La première approche qui vient à l'esprit consiste à généraliser directement le Principe de Newton ($F = m\gamma$) appelé Principe Fondamental de la Dynamique dans les classes préparatoires. Ceci est possible, puisque nous avons ci-dessus défini les efforts généralisés, les accélérations généralisées et les inerties généralisées. Cependant, dès que le modèle des objets est cinématiquement un peu complexe, la généralisation ci-dessus n'est pas triviale et cette approche n'est alors pas conseillée, même si c'est historiquement elle qui a permis la construction des premiers modèles de mécanique des milieux continus.

La seconde approche « naturelle » et équivalente consiste à écrire un Principe de Conservation de la Quantité de Mouvement. Cette approche est très physique, belle et élégante. Elle présente en particulier l'avantage de l'écriture d'un principe sous la forme, très classique en physique, d'une équation de conservation. Cependant notre expérience personnelle nous fait penser que certaines opérations de dérivation particulière (dérivée par rapport au temps en suivant les particules) peuvent devenir techniquement compliquées lorsque le modèle est cinématiquement complexe.

Nous préférons donc l'approche dite du Principe des Puissances Virtuelles (PPV). Elle présente l'avantage d'une expression très simple du principe à partir de laquelle il est aisé d'en déduire les équations d'équilibre du modèle. C'est en quelque sorte une formulation faible de ces équations d'équilibre à l'aide des fonctions tests de l'espace vectoriel des mouvements virtuels. Un autre avantage de cette méthode est son caractère « automatique » qui permet d'avancer sans avoir à se préoccuper, à ce stade, de la signification physique des équations écrites. C'est aussi bien sûr son principal inconvénient. Pour caricaturer on peut dire qu'il faut avoir fini la construction du modèle pour en comprendre le sens physique et pouvoir juger de sa pertinence par rapport aux attentes.

Le principe se formule ainsi. Pour tout objet de la famille considéré (noté Ω_t), et pour tous champs de vitesses virtuelles (notés \underline{V}^*) définis sur cet objet, la somme de la puissance virtuelle des efforts intérieurs (notée $PVI(\underline{V}^*)$) et de la puissance virtuelle des efforts extérieurs (notée $PVE(\underline{V}^*)$) est égale à la puissance des efforts d'accélération (notée $PVA(\underline{V}^*)$). On écrit donc :

$$\forall \Omega_t, \forall \underline{V}^* \in \mathcal{C}^* \quad \boxed{PVI(\underline{V}^*) + PVE(\underline{V}^*) = PVA(\underline{V}^*)}$$

Il s'agit d'une formulation faible (à l'aide de fonctions tests) des équations de l'équilibre. Si l'on suppose les champs suffisamment réguliers, on peut en déduire un système d'équations

aux dérivées partielles et de conditions aux limites en efforts que doivent vérifier nos champs d'efforts intérieurs généralisés. La signification physique du modèle peut alors être étudiée. Pour cela l'essentiel est de comprendre la signification physique des conditions aux limites en contrainte. Cette démarche est bien illustrée dans le cours de Jean Salençon, dans lequel il montre, à l'occasion de la construction du modèle mécanique de milieu de Cauchy, comment un choix non pertinent au niveau de la puissance virtuelle des efforts intérieurs peut conduire à un modèle de matériau ne pouvant pas supporter des cisaillements. C'est la condition aux limites en efforts du modèle qui permet d'établir cette conclusion.

2.4 Niveau 3 : Thermodynamique et comportement

Avec l'écriture des concepts d'efforts et des équations d'équilibre du modèle dans la configuration actuelle, la construction du deuxième niveau n'est pas forcément totalement achevée. Nous pouvons avoir par exemple à « transporter » ces concepts et ces équations dans une configuration de référence par exemple. Cet aspect essentiellement technique ne nous intéresse pas ici et sera vu plus en détail dans le cadre des milieux de Cauchy. Passons donc directement au troisième niveau de la construction des modèles. Il s'agit du niveau où l'on introduit des considérations de thermodynamique avant d'introduire les matériaux constitutifs des objets et leur comportement.

Au point où nous en sommes de notre « invention » d'un modèle du monde adapté à la description de notre famille d'objet, nous n'avons pas encore introduit de concepts énergétiques ou thermodynamiques, car même si nous avons parlé de puissances virtuelles, il ne s'agit pas d'une vraie puissance, les fonctions tests, vitesses virtuelles, ne servant qu'à la définition des efforts du modèle. Notons toutefois que le champ de vitesses généralisées réelles appartient à l'espace vectoriel des mouvements virtuels. L'image par la forme linéaire « Puissance Virtuelle des efforts Extérieurs » de ce champ de vitesses réelles est donc la puissance réelle fournie à notre objet par les efforts extérieurs.

Nous mettrons donc ci-dessous en place les concepts permettant de décliner le très important « Premier Principe de la Thermodynamique » dans le modèle de nos objets, puis les concepts permettant de décliner le non moins important « Second Principe de la Thermodynamique ». Nous pourrions alors dans le cadre ainsi posé parler de matériaux et de leurs comportements. Ce sera fait en introduisant le concept d'observables (ou inconnues principales) et celui de grandeurs constitutives (ou inconnues secondaires), les secondes pouvant d'une certaine manière être exprimées en fonction des premières via des relations constitutives (ou comportement des matériaux).

2.4.1 Premier principe de la thermodynamique

Dans le premier principe de la thermodynamique nous parlons d'énergies et de puissances réelles. Faisons tout d'abord le point sur ce que l'on peut déjà dire à l'étape où nous en sommes de la construction de notre modèle après le deuxième niveau. Nous avons déjà remarqué ci-dessus que les efforts extérieurs apportent une puissance réelle (notée P_{EXT}) à notre objet et que cette puissance peut être déterminée par l'image par la forme linéaire « Puissance Virtuelle des efforts Extérieurs » (notée PVE) dans le champ de

vitesse réelle (noté \underline{V}). Rappelons que ce champ de vitesses réelles est contenu dans l'espace vectoriel des vitesses virtuelles noté \mathcal{C}^* . Nous parlerons de même de puissance réelle des efforts d'accélération (notée P_{ACC}) et de puissance réelle des efforts intérieurs (notée P_{INT}) pour désigner les images des puissances virtuelles respectives dans le champ de vitesses généralisées réelles. On peut donc résumer comme suit :

- Vitesse **généralisée réelle** $\underline{V} \in \mathcal{C}^*$
- Puissance **réelle efforts extérieurs** : $P_{EXT} = PVE(\underline{V})$
- Puissance **réelle des efforts d'accélération** : $P_{ACC} = PVA(\underline{V})$
- Puissance **réelle des efforts intérieurs** : $P_{INT} = PVI(\underline{V})$

Notons aussi que nous avons défini les vitesses généralisées de nos particules au premier niveau et que nous avons introduit des concepts de masses et d'inerties au deuxième niveau dans la définition de la puissance des efforts d'accélération. Il semble donc que nous ayons tous les éléments pour définir une énergie cinétique. En fait ce n'est pas aussi simple car les inerties à introduire dans l'expression de l'énergie cinétique peuvent être différentes de celles introduites au niveau des quantités d'accélération. Cela peut être en particulier les cas dans les milieux multi-particulaires ou à microstructure. La raison en est que cette énergie cinétique macroscopique représente une partie de celle qui existe à une échelle inférieure. Les processus de changement d'échelle s'apparentent à un processus de moyenne. Ainsi schématiquement la détermination de l'énergie cinétique macroscopique d'une particule fait intervenir une sorte de moyenne locale du champ du carré de la vitesse à une échelle inférieure. La vitesse macroscopique (donc l'accélération) fait intervenir une sorte de moyenne locale du champ de vitesse. On voit qu'il n'y a pas de raison pour que la moyenne d'un carré soit égale au carré d'une moyenne.

On postule toutefois que, lorsque l'on travaille directement à l'échelle macroscopique, l'énergie cinétique est donnée par une intégrale, sur le domaine actuel, d'une densité dont l'expression est quadratique en fonction des composantes de la vitesse généralisée. Par une expression de ce type, on ne peut « transporter » à l'échelle macroscopique, la totalité de l'énergie cinétique microscopique. Le reliquat est donc « renvoyé » dans une autre énergie dont nous verrons plus loin qu'elle s'appelle énergie interne. L'expression quadratique en fonction des composantes de la vitesse généralisée fait intervenir un certain nombre d'« inerties cinétiques ». Nous avons compris que ce ne sont pas nécessairement des grandeurs identiques aux « inerties d'accélération » qui interviennent au niveau de l'expression de la densité de puissance virtuelle des efforts d'accélération. Le modélisateur doit donc choisir le sens physique qu'il souhaite donner à ces inerties.

Le dixième choix fondamental du modélisateur est le choix de la densité d'énergie cinétique, expression quadratique des vitesses généralisées et linéaire des inerties qu'il souhaite introduire. Lorsque les choix des inerties sont cohérents entre la densité d'énergie cinétique et la puissance virtuelle des efforts d'accélération, on démontre que la dérivée, en suivant les particules, de l'énergie cinétique (notée E_C) est égale à la puissance réelle des accélérations c'est-à-dire à la puissance virtuelle des efforts d'accélération dans le champ de vitesses généralisées réelles. On a alors :

$$\dot{E}_C = PVA(\underline{V}) = P_{ACC} \quad (2.1)$$

Lorsque ce n'est pas le cas on introduit souvent un concept de tortuosité.

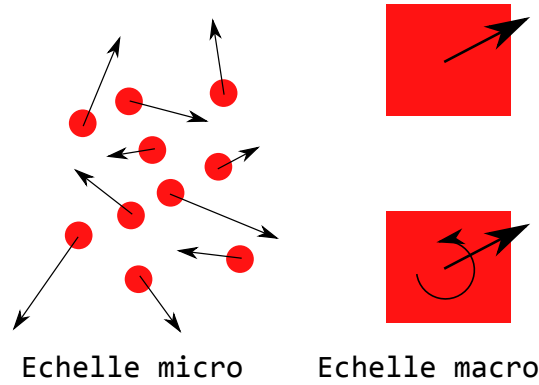


FIGURE 2.10 – Schéma montrant que l'énergie cinétique dépend de l'échelle considérée.

Revenons maintenant aux concepts qu'il est nécessaire d'introduire pour pouvoir formuler un premier principe de la thermodynamique adapté à notre modèle en cours de construction. Nous avons besoin d'un concept d'énergie totale. Rien dans les éléments du modèle déjà construits ne nous permet de définir cette énergie totale. Nous devons donc en postuler l'existence à notre échelle. Notre premier postulat associé au premier principe de la thermodynamique est donc : il existe une énergie totale (notée E_T) attachée à notre objet (i.e., à l'ensemble de ses particules). C'est une grandeur scalaire mesurée en Joules. Nous sommes bien sûr confortés dans la formulation de ce postulat par les nombreux travaux des physiciens, qui, à d'autres échelles que la notre, le plus souvent, et dans un cadre axiomatique différent, en démontrent l'existence. Mais comprenons bien que dans le cadre de la construction de notre modèle « à partir du néant » (qui prétend ne pas s'appuyer sur un changement d'échelle), ce concept d'énergie totale ne peut préexister à la formulation de ce postulat (d'existence).

Comme nous l'avons noté plus haut, nous connaissons déjà une partie de cette énergie que nous avons appelée énergie cinétique (notée E_C). Nous donnerons le nom d'énergie interne (notée E_I) à la différence entre l'énergie totale et l'énergie cinétique, c'est-à-dire :

$$E_T = E_C + E_I \quad (2.2)$$

Notons au passage que le reliquat d'énergie cinétique dans un changement d'échelle tel qu'il a été introduit plus haut est ipso facto renvoyé dans l'énergie interne, ainsi que nous l'avions annoncé par anticipation de la définition de celle-ci.

Nous pouvons maintenant énoncer le premier principe de la thermodynamique (adapté à notre modèle). L'énergie totale d'un ensemble de particules se conserve. Le concept de conservation d'une grandeur attaché à un ensemble de particules sera étudié en détails plus loin, mais donnons tout de suite quelques éléments permettant de mieux comprendre le sens de ce postulat. Dire qu'une grandeur attachée à un ensemble de particules se conserve ne veut pas dire que sa valeur reste fixe dans le temps. En effet toute grandeur G attachée à un ensemble de particules peut voir sa valeur modifiée dans le temps pour deux raisons. La première raison est un apport extérieur (noté A_G) (positif ou négatif) de cette grandeur à l'ensemble des particules. La seconde raison est la production de cette grandeur (notée P_G) par les particules elles-mêmes. Lorsque l'on dit qu'une grandeur se conserve cela signifie que les particules ne produisent pas cette grandeur et la seule source de variation devient alors l'échange avec l'extérieur. Ainsi nous postulons que les

particules de l'objet ne produisent pas d'énergie totale, ainsi cette production (notée P_{E_T}) est nulle.

Il reste maintenant à comprendre en quoi consistent les apports extérieurs d'énergie (totale) aux particules (notés A_{E_T}). Notons que le postulat de l'existence de l'énergie totale implique « automatiquement » l'existence de cet apport. Nous connaissons déjà une partie de cet apport, celle qui vient de la puissance réelle des efforts extérieurs. Nous n'avons aucune raison de prétendre qu'il s'agit de la totalité de l'apport. Nous allons donc « nommer » la différence entre l'apport extérieur d'énergie totale et la puissance réelle des efforts extérieurs. Nous appelons cette différence l'apport de chaleur ou plus simplement la chaleur (notée Q). On a donc :

$$A_{E_T} = P_{EXT} + Q \quad (2.3)$$

Notez la grande différence entre cette définition de la chaleur et les définitions physiques habituelles à des échelles inférieures ou lorsque l'on procède à un changement d'échelle. On voit ici un bon exemple de la manière dont, des concepts physiques éventuellement difficiles, peuvent être introduit simplement et de manière axiomatique, à une certaine échelle macroscopique, une fois que la physique à une plus petite échelle est bien établie.

Nous allons maintenant entrer beaucoup plus précisément dans la signification de ce premier principe de conservation de l'énergie. Tel que nous l'avons formulé ci-dessus, le principe de conservation de l'énergie semble ne concerner que l'histoire réelle de l'évolution de l'ensemble des particules de notre objet. Tout d'abord, en fait, ce principe concerne évidemment tous les objets de la famille considérée, et en particulier toutes les sous parties Ω_t de notre objet. Il est important de le noter pour donner un caractère opératoire à ce principe. Ensuite, lorsque l'on considère l'état de notre ensemble de particules à l'instant t , l'avenir « n'est pas écrit ». Il dépend des actions extérieures que l'on peut exercer à l'instant t sur notre objet (ces actions ne font bien évidemment pas partie de l'« état » de notre système). Ainsi si l'on considère l'ensemble des actions possibles, elles impliquent un ensemble d'évolutions \forall possibles. L'expression du premier principe est donc vraie pour tout objet possible dans la famille et pour toutes évolutions possibles. Ainsi le premier principe se lit :

$$\boxed{\forall \Omega_t, \forall \underline{V} \text{ possible}, P_{E_T} = 0} \quad (2.4)$$

En exploitant ces quantificateurs universels correctement, on aboutit à l'écriture d'une équation locale, dite équation de l'énergie. Cette équation, toute seule, a une utilité réduite car elle fait intervenir un terme d'apport volumique de chaleur, qui a le statut d'une donnée dans le cadre d'un modèle purement mécanique, mais qui pour autant n'est en général pas « donnée ». Il sera donc nécessaire d'associer cette équation de l'énergie à d'autres équations déduites de l'analyse thermodynamique de notre modèle pour pouvoir en tirer des conclusions utiles.

2.4.2 Second principe de la thermodynamique

Les physiciens, et en particulier ceux qui pratiquent la physique statistique démontrent l'existence d'un autre concept de très grande généralité et du plus haut intérêt pour les modélisations du monde. Il s'agit du concept d'entropie, grandeur scalaire « mesurant » en quelque sorte le désordre à l'intérieur du système étudié.

Le modèle de notre famille d'objets que nous souhaitons construire est un modèle de monde. Il est donc nécessaire que ce concept soit introduit dans notre modèle. Il est clair qu'à l'échelle où nous travaillons, rien dans ce qui a été construit jusqu'à présent ne permet d'introduire un quelconque concept de désordre. Nous allons donc postuler l'existence d'une grandeur appelée entropie, attachée à l'ensemble de nos particules. La fonction de cette grandeur scalaire est de donner « une mesure » du désordre physique à une échelle inférieure dans notre objet. Nous introduisons ainsi de manière très synthétique le fait que l'apparent déterminisme de nos objets à notre échelle est le résultat d'une moyenne de phénomènes aléatoires à une échelle inférieure. Comme il s'agit d'une grandeur attachée à un ensemble de particules, l'évolution de cette grandeur, ainsi que nous l'avons vu plus haut est liée à deux causes, un apport extérieur et une production interne par les particules (l'entropie ne se conserve pas). Commençons par étudier l'apport extérieur d'entropie. Nous allons commencer par quelques commentaires « naïfs », avant d'aborder des considérations d'une beaucoup plus grande profondeur. Ce que vous avez appris dans vos études antérieures vous permet de savoir que, pour l'essentiel, le désordre de la matière est lié à l'agitation thermique des molécules qui la composent. Avec cette connaissance, même si elle reste vague, on comprend qu'un apport de chaleur à un ensemble de particules a pour effet d'augmenter l'agitation thermique et donc le désordre. Ainsi on comprend qu'il y a un lien fort entre un apport de chaleur à un système et un apport d'entropie. La « mesure du désordre » n'étant pas unique, nous pouvons en choisir une (une entropie) telle qu'il y ait proportionnalité entre les apports de chaleur et les apports d'entropie. (Ceci veut dire que si, par exemple, nous doublons l'apport de chaleur à une particule, nous doublons aussi son apport d'entropie). Notons que le coefficient de proportionnalité est forcément positif car un apport positif de chaleur a vocation à augmenter le désordre et donc correspond à un apport positif d'entropie. Il est malheureusement clair que ce « coefficient de proportionnalité » n'est pas indépendant de « l'état » de la particule qui reçoit la chaleur. En effet, en restant dans notre registre « naïf », si nous apportons la même quantité de chaleur à un corps « froid » (relativement ordonné) et à un corps similaire (ensemble équivalent de particules) mais chaud (relativement désordonné), on a le sentiment que la « quantité de désordre » apporté au système n'est pas la même. Le corps « froid » (ordonné) nous paraît intuitivement plus « perturbé » par cet apport de chaleur que ne peut l'être le corps « chaud ». On comprend que pour exprimer proprement cette intuition physique il est nécessaire de pouvoir définir plus précisément ce qu'est un corps « froid » ou un corps « chaud ». La physique statistique permet de démontrer l'existence, à un niveau microscopique, d'une grandeur appelée température absolue. Les physiciens démontrent par ailleurs que l'apport extérieur d'entropie aux « systèmes microscopiques » qu'ils étudient est égal à l'apport de chaleur divisé par cette température absolue. A notre échelle, et compte tenu de l'état actuel de la construction de notre modèle, rien ne permet dans les éléments déjà introduits de parler de quelque chose qui ressemble à ce concept de température.

Nous allons donc postuler l'existence d'un champ de température T absolue dans nos objets. (Notez, à titre d'information, que les travaux de Carathéodori ont permis de démontrer l'existence de la température absolue à l'échelle macroscopique dans le cadre des évolutions réversibles). Le choix de l'entropie, c'est-à-dire de la « mesure du désordre » dont nous avons postulé l'existence plus haut ne sera pas indépendant de ce concept de température, car nous postulons que l'apport extérieur d'entropie est égal à

l'apport extérieur de chaleur divisé par la température absolue.

Au passage notons que, comme le coefficient de proportionnalité doit être positif, la température absolue est une grandeur positive. Notez qu'une nouvelle fois il est possible d'introduire simplement des concepts physiques difficiles, de manière axiomatique, à une certaine échelle macroscopique, une fois que la physique à une plus petite échelle est bien établie.

Après avoir étudié l'apport extérieur d'entropie intéressons nous à la production d'entropie par les particules notée P_S . Cette production d'entropie est régie par un nouveau principe physique. Le second principe de la thermodynamique se formule ainsi : la production d'entropie par un ensemble de particules est positive. Pour que ce principe soit opératoire il faut ajouter comme pour le premier principe que ceci est vrai pour tous les objets (et parties d'objets Ω_t) de la famille et pour toutes les évolutions \underline{V} possibles, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall \Omega_t, \forall \underline{V} \text{ possible}, P_S \geq 0} \quad (2.5)$$

En exploitant ces quantificateurs universels correctement, on abouti à l'écriture d'une équation locale de bilan d'entropie. Cette équation fait intervenir le terme d'apport volumique de chaleur. L'association de cette équation à celle de l'énergie permet d'éliminer ce terme de « données inconnues » afin d'aboutir à une équation utile. L'expression locale du deuxième principe de la thermodynamique conduit alors à une inégalité locale dite inégalité de Clausius-Duheim (de notre modèle) qui a une grande importance dans la formulation des comportements des matériaux pour notre modèle, inégalité qui doit être satisfaite pour toutes les évolutions possibles de notre objet.

2.4.3 Relations constitutives

Jusqu'à présent nous n'avons évoqué les matériaux constitutifs des objets de notre famille qu'à l'occasion d'incidentes relativement superficielles. C'est dans cette troisième et dernière étape de la construction du troisième et dernier niveau de notre modélisation que nous abordons enfin la question des matériaux et que nous allons pouvoir donner un sens au concept de comportement de ceux-ci. Pour cela nous devons commencer par un classement des nombreux champs mécaniques et thermodynamiques introduits depuis le début de notre entreprise de construction d'un modèle adapté à notre famille d'objets.

Nous allons distinguer trois sortes de champs. Tout d'abord ce que nous nommons les observables. Il s'agit des histoires des champs de température et de déplacements généralisées (ou de placements généralisés) de nos particules. On peut considérer qu'il s'agit des inconnues principales de notre problème d'évolution sous chargement thermomécanique d'un objet de notre famille. Cela veut dire que, d'une certaine manière, si ces histoires de champs ont pu être déterminées, l'histoire de l'état de notre objet aux différents instants est connue.

Certains autres champs doivent être considérés comme des données d'un modèle mécanique. C'est le cas des forces extérieures de volume, ou des apports volumiques de chaleur. Ce sont des données au sens où leur origine physique fait généralement appel à d'autres branches de la physique non mise en œuvre dans un modèle mécanique (par exemple l'apport volumique de chaleur est généralement créé par un phénomène de radiation électromagnétique (pensez au four à micro-ondes pour fixer les idées). Ces « données » peuvent être aussi la conséquence d'une interaction mécanique avec un autre

système non décrit et étudié dans le cas de notre modèle (gravité par exemple). Notons que les « données » ne sont pas toujours effectivement connues comme nous en avons vu l'exemple avec l'apport extérieur de chaleur qu'il a été nécessaire d'éliminer entre les équations de bilan de l'énergie et de l'entropie.

Il reste enfin la très grande majorité des champs que nous avons introduits jusqu'à présent qui ont le statut d'inconnues auxiliaires. Nous les appellerons des grandeurs constitutives. C'est le cas par exemple de la densité d'énergie interne, d'entropie, des efforts intérieurs, de la production d'entropie, etc. Si nous considérons l'ensemble des équations introduites depuis le début de notre construction, on constate que le nombre de ces équations est sensiblement plus faible que le nombre de champs introduits. Il nous faut donc des équations supplémentaires pour « fermer » notre jeu d'équations d'un point de vue mathématique. On ferme ce jeu d'équations en postulant que les histoires des grandeurs constitutives sont fonctions des histoires des observables. Ces fonctions des histoires des observables sont appelées les relations constitutives. Ce sont elles qui caractérisent le comportement des matériaux.

En faisant les choix de ces relations constitutives nous achevons la construction de notre modèle pour la famille d'objets qui nous intéresse. Le onzième et dernier choix fondamental du modélisateur est le choix des relations constitutives décrivant le comportement des matériaux constitutifs de ses objets. La détermination de ces relations constitutives décrivant les matériaux fait appel le plus souvent à une démarche expérimentale lourde qui n'est pas souvent menée de manière exhaustive. La plupart du temps des hypothèses sont faites sur le comportement des matériaux pour le domaine d'usage qui va être étudié. La démarche expérimentale est fortement simplifiée si l'on peut faire ce type d'hypothèse de manière assurée avant de commencer les essais.

Il est important de noter que contrairement à ce que l'on peut penser à priori, un comportement de matériau ne se réduit pas à l'expression de la relation entre « contraintes » et « déformations ». Toutes les grandeurs constitutives doivent pouvoir être exprimées en fonction de l'histoire des observables (schématiquement déformations généralisées et température). Enfin, nous avons vu que le second principe de la thermodynamique nous permet de déduire une inéquation locale (dite inégalité de Clausius-Duhem) qui doit être vérifiée pour tout objet, toute évolution possible et ajoutons pour tous matériaux. Ainsi que nous allons le voir dans de prochains chapitres, cette inégalité limite de manière sévère notre liberté d'écrire à notre guise des relations constitutives pour décrire le comportement des matériaux.

Ce n'est pas la seule chose qui limite notre liberté de choix des relations constitutives. Il y a une deuxième condition forte qui est aussi contraignante. Il s'agit du principe d'indifférence matérielle. Ce principe et ses conséquences seront développés en détails dans un prochain chapitre, mais disons ici simplement qu'il est aisé de constater que le modèle que nous avons développé l'a été pour un observateur privilégié. Par exemple, sans observateurs comment parler de vitesse ? Si nous choisissons un nouvel observateur de l'évolution de nos objets, les variables observables seront différentes (tout au moins les déplacements, les vitesses, etc.). Il n'est pas pensable d'être obligé d'écrire de nouvelles relations constitutives valables pour ce deuxième observateur. Comme nous savons que les observables changent lorsque l'on change d'observateur et que la relation constitutive doit être indépendante de l'observateur, cela entraîne que les relations constitutives doivent donner des valeurs « équivalentes » pour les différents observateurs lorsque les observables

sont modifiées par changement d'observateur. Le concept de valeurs équivalentes ne sera développé qu'au prochain chapitre et nécessite l'introduction de la notion d'objectivité. Contentons nous de dire ici que ce principe d'indifférence matérielle limite fortement la liberté d'écrire à notre guise les relations constitutives permettant d'exprimer les histoires des grandeurs constitutives en fonction des histoires des observables.

Chapitre 3

La Mécanique des milieux tridimensionnels classique

Contents

3.1 Niveau 1 : Description du mouvement dans un milieu de Cauchy	76
3.1.1 Description eulérienne	76
3.1.2 Description lagrangienne	79
3.1.3 Comparaison description lagrangienne-description eulérienne . .	81
3.2 Niveau 2 : Définition des efforts	83
3.2.1 Choix de l'espace vectoriel des mouvements virtuels	83

La mécanique des milieux tridimensionnels classique est celle de Cauchy, c'est-à-dire que le milieu est 3D, mono-particulaire et que les particules sont sans microstructure. Le plus souvent il n'y a pas de liaisons internes. En cas de liaison interne d'incompressibilité, nous continuerons à dire que le modèle est celui d'un milieu de Cauchy. L'espace vectoriel des vitesses réelles possibles est celui des champs de vecteurs sur la configuration actuelle Ω_t . Nous allons tout d'abord présenter complètement les descriptions eulérienne et lagrangienne du mouvement en allant jusqu'à l'identification des concepts fondamentaux que sont le taux de déformation (vision eulérienne) et de déformation (vision lagrangienne). Nous construirons ensuite le niveau deux de ce modèle, c'est-à-dire celui qui permet de définir les efforts.

3.1 Niveau 1 : Description du mouvement dans un milieu de Cauchy

L'objectif principal ici est de mettre en évidence les concepts pertinents liés à, la déformation du matériau. Nous utiliserons tout d'abord une approche eulérienne, puis une approche lagrangienne, enfin nous comparerons ces deux approches. Nous nous doutons que la variation de volume est l'un des aspects liés à la déformation. Pour chacune des descriptions du mouvement, c'est donc ce que nous étudierons en premier. Nous nous intéresserons ensuite à l'évolution d'un ensemble élémentaire de particules alignées (vecteur matériel) et enfin nous nous intéresserons à l'évolution de la métrique de la matière, c'est-à-dire le produit scalaire de deux vecteurs matériels quelconques au voisinage d'une particule. C'est l'étude de l'évolution de cette métrique de la matière qui nous conduira aux concepts essentiels de taux de déformation (approche eulérienne) et de déformation (approche lagrangienne). Dans la suite nous utiliserons les notations suivantes : div et grad lorsque la dérivation se fait par rapport à \underline{x} dans la configuration actuelle, Div et Grad lorsque la dérivation est effectuée par rapport à \underline{X} dans la configuration de référence.

3.1.1 Description eulérienne

Dans un milieu de Cauchy, la description eulérienne du mouvement correspond à la donnée du champ des vecteurs vitesses dans la configuration actuelle :

$$\underline{x} \in \Omega_t \mapsto \underline{V}(\underline{x}, t) \quad (3.1)$$

Étudions comment le volume varie, les éléments de matière sont transportés et la métrique de la matière évolue dans le cadre de cette description du mouvement.

Taux de variation de volume

Notons $\Omega(t) = \Omega_t$ le volume occupé à l'instant t par un objet (ensemble invariable de particules). Ce volume s'écrit de manière intégrale comme suit :

$$\Omega_t = \int_{\Omega_t} 1 d\Omega \quad (3.2)$$

La variation dans le temps de ce volume est due au déplacement des particules de la frontière $\partial\Omega_t$. La vitesse normale de celle-ci est $\underline{V}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t)$, $\forall \underline{x} \in \partial\Omega_t$. Le taux de variation de volume est donné par l'intégrale sur la frontière de cette vitesse normale :

$$\dot{\Omega}_t = \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega_t} 1 d\Omega \right] = \int_{\Omega_t} \underbrace{\frac{\partial 1}{\partial t}}_0 d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} \underline{V}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}, t) dS \quad (3.3)$$

D'où, en utilisant le théorème de la divergence, l'intégrale sur Ω_t de la divergence du champ de vitesses, soit :

$$\dot{\Omega}_t = \int_{\Omega_t} \text{div}_{\underline{x}} [\underline{V}(\underline{x}, t)] d\Omega \quad (3.4)$$

Comme cette égalité est valable quelque soit le volume Ω_t considéré, on peut écrire localement :

$$\boxed{\dot{d}\Omega_t = \text{div}_{\underline{x}} [\underline{V}(\underline{x}, t)] d\Omega_t} \quad (3.5)$$

Transport d'un vecteur matériel

Notons à l'instant t on considère une particule en $\underline{M}(t)$ à la position \underline{x} , et n'importe quelle autre particule notée $\underline{M}(t) + d\underline{M}(t)$ dans le voisinage à la position $\underline{x} + d\underline{x}$. On note $d\underline{M}(t) = d\underline{x}$ l'ensemble des particules entre les positions \underline{x} et $\underline{x} + d\underline{x}$. On dit que $d\underline{M}(t)$ est un vecteur matériel.

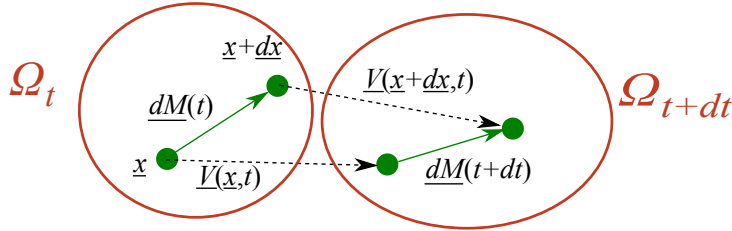


FIGURE 3.1 – Vecteur matériel

On voit grâce au schéma figure 3.1, qu'à l'instant $t + dt$, la particule $\underline{M}(t + dt)$ est (au premier ordre) à la position :

$$\underline{x} + \underline{V}(\underline{x}, t) dt \quad (3.6)$$

Et à l'instant $t + dt$, la particule $\underline{M}(t + dt) + d\underline{M}(t + dt)$ est (au premier ordre) à la position :

$$\underline{x} + d\underline{x} + \underline{V}(\underline{x} + d\underline{x}, t) dt \quad (3.7)$$

Ainsi en soustrayant (3.7) et (3.6) on obtient à l'instant $t + dt$:

$$d\underline{M}(t + dt) = \underline{x} + d\underline{x} + \underline{V}(\underline{x} + d\underline{x}, t) dt - \underline{x} - \underline{V}(\underline{x}, t) dt \quad (3.8)$$

En reprenant (3.8) et $d\underline{M}(t) = d\underline{x}$ on obtient grâce à la définition du gradient :

$$\begin{aligned} d\underline{M}(t + dt) - d\underline{M}(t) &= (\underline{V}(\underline{x} + d\underline{x}, t) - \underline{V}(\underline{x}, t)) dt \\ &= \underline{\nabla}_{\underline{x}} [\underline{V}(\underline{x}, t)] \cdot d\underline{x} dt \end{aligned} \quad (3.9)$$

Or grâce à la définition du gradient on a $\underline{dM}(t+dt) - \underline{dM}(t) = \widehat{dM} dt$ d'où grâce à (3.9) :

$$\begin{aligned}\widehat{dM} &= \boxed{\underline{\nabla}_{\underline{x}} [V(\underline{x}, t)] \cdot \underline{dx}} \\ &= \underline{\nabla}_{\underline{x}} [V(\underline{x}, t)]_{ij} dx_j = dx_j {}^T \underline{\nabla}_{\underline{x}} [V(\underline{x}, t)]_{ji} \\ &= \boxed{\underline{dx} \cdot {}^T \underline{\nabla}_{\underline{x}} [V(\underline{x}, t)]}\end{aligned}\quad (3.10)$$

Pour la deuxième écriture du taux de variation du vecteur matérielle en (3.10), nous avons redémontré un résultat très classique de calcul tensoriel : $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot {}^T \underline{A}$. Si nous utilisons une notation matricielle au lieu de tensorielle, nous devrions écrire $\underline{A} \cdot \underline{B} = {}^T (\underline{B} \cdot {}^T \underline{A})$. En effet, la notation matricielle distingue les vecteurs lignes et les vecteurs colonnes. Il n'y a pas lieu de faire cette distinction en calcul tensoriel.

Taux de déformation

Introduisons le concept de métrie de la matière. Pour cela considérons trois particules voisines. Nous devons connaître la distance entre deux particules quelconques et l'angle sous lequel l'une des particules « voit » les deux autres. Choisissons l'une des particules \underline{M} comme « origine » et notons \underline{dM} et \underline{dM}' les deux vecteurs matériels ayant pour origine cette particule et pour extrémité chacune des deux autres particules respectivement. Il est clair que si nous connaissons les distances entre les particules et les angles, nous pouvons déterminer le produit scalaire $\underline{dM} \cdot \underline{dM}'$. Réciproquement, si nous connaissons le produit scalaire de l'espace vectoriel des vecteurs matériels au voisinage de \underline{M} , nous connaissons les distances entre les particules et les angles.

Ainsi la métrie de la matière au voisinage de \underline{M} n'est autre que le produit scalaire des vecteurs matériels au voisinage de \underline{M} . La variation de la métrie de la matière est donc donnée par la variation dans le temps du produit scalaire des vecteurs matériels. En reprenant le résultat précédent (3.10) on obtient :

$$\begin{aligned}\widehat{dM \cdot dM'} &= \underline{dM} \cdot \widehat{dM}' + \widehat{dM} \cdot \underline{dM}' \\ &= \underline{dM} \cdot \left[\underline{\nabla}_{\underline{x}} [V(\underline{x}, t)] + {}^T \underline{\nabla}_{\underline{x}} [V(\underline{x}, t)] \right] \cdot \underline{dM}'\end{aligned}\quad (3.11)$$

On voit que l'étude de l'évolution de la métrie de la matière met en évidence le champ tensoriel d'ordre deux symétrique $\underline{\nabla}_{\underline{x}} [V(\underline{x}, t)] + {}^T \underline{\nabla}_{\underline{x}} [V(\underline{x}, t)]$. Ce champ contient toute l'information nécessaire et suffisante pour décrire l'évolution de la déformation du matériau au voisinage de \underline{M} . Nous pouvons donc introduire la définition du taux de déformation noté $\underline{d}(\underline{x}, t)$:

$$\underline{d}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\underline{\nabla}_{\underline{x}} [V(\underline{x}, t)] + {}^T \underline{\nabla}_{\underline{x}} [V(\underline{x}, t)] \right)\quad (3.12)$$

Le taux de déformation est donc la partie symétrique du gradient de champ de vitesse dans la configuration actuelle. La partie antisymétrique (décomposition additive) du gradient du champ de vitesse dans la configuration actuelle est le taux de rotation de la matière pour l'observateur qui décrit le mouvement. Nous dirons plus loin que c'est un

champ non objectif, contrairement au taux de déformation. On peut dire de manière naïve et caricaturale que la particule, d'une part ne « sait » pas qu'elle est observée, que d'autre part elle n'a pas de boussole et ne peut donc « connaître » son orientation par rapport à l'observateur qui décrit son mouvement. Ainsi la seule information qu'elle « perçoit » de son environnement immédiat est le taux de déformation qui résume l'évolution, en vitesse, des distances et des angles par rapport aux particules de ce voisinage. Le concept de taux de déformation est le concept essentiel identifié dans une analyse eulérienne du mouvement des particules.

3.1.2 Description lagrangienne

Dans un milieu de Cauchy, la description lagrangienne du mouvement correspond à la donnée du champ des transformations donnant la position \underline{x} , à l'instant t , dans la configuration actuelle Ω_t , de la particule dont le « matricule » est la position \underline{X} de la particule dans la configuration de référence Ω_0 . On note le champ des transformation $\underline{\phi}$ définie comme suit :

$$\underline{\phi} : \begin{cases} \Omega_0 \times \mathbb{R}^+ & \rightarrow \Omega_t \\ (\underline{X}, t) & \mapsto \underline{\phi}(\underline{X}, t) = \underline{x} \end{cases} \quad (3.13)$$

Nous étudions tout d'abord comment le volume varie, puis comment les éléments de matière sont transportés et comment la métrique de la matière évolue dans le cadre de cette description du mouvement. Enfin nous présentons ces concepts dans le cadre de la description du mouvement par un champ de déplacements au lieu du champ des transformations.

Variation de volume

Considérons l'écriture du volume actuel Ω_t sous forme intégrale :

$$\Omega_t = \int_{\Omega_t} d\Omega \quad (3.14)$$

À l'instant t fixé, on effectue le changement de variable $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$, ainsi l'élément d'intégration s'écrit :

$$d\Omega = \underbrace{\det \left[\underline{\nabla}_{\underline{X}} \left[\underline{\phi}(\underline{X}, t) \right] \right]}_{J(\underline{X}, t)} d\Omega_0 \quad (3.15)$$

Où l'on a noté $J(\underline{X}, t)$ la jacobienne du changement de variable. On peut donc écrire $\Omega_t = \int_{\Omega_0} J(\underline{X}, t) d\Omega_0$. On obtient donc directement de (3.15) la relation locale :

$$\boxed{d\Omega = J(\underline{X}, t) d\Omega_0} \quad (3.16)$$

Transport d'un vecteur matériel

Considérons une particule \underline{M}_0 et un vecteur matériel $d\underline{M}_0$ dans la configuration de référence. La particule \underline{M}_0 est transporté en $\underline{M}(t) = \underline{\phi}(\underline{M}_0, t)$. Le vecteur matériel $d\underline{M}_0$ est transformé en $d\underline{M}(t)$. Par définition du gradient on a :

$$d\underline{M} = \underline{\nabla}_{\underline{X}} \left[\underline{\phi}(\underline{X}, t) \right] \cdot d\underline{M}_0 \quad (3.17)$$

Pour simplifier les notations dans toute la suite du cours, on pose :

$$\boxed{\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{X}} \left[\underline{\underline{\phi}}(\underline{X}, t) \right]} \quad (3.18)$$

Ainsi on a :

$$\underline{\underline{dM}} = \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{dM}}_0 = \underline{\underline{dM}}_0 \cdot {}^{\top}\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \quad (3.19)$$

Déformation

Comme nous l'avons vu, le concept de déformation est lié à l'évolution de la métrique de la matière. En utilisant les deux expressions en (3.19), pour deux vecteur matériels $\underline{\underline{dM}}$ et $\underline{\underline{dM}}'$ on obtient :

$$\underline{\underline{dM}} \cdot \underline{\underline{dM}}' = \underline{\underline{dM}}_0 \cdot \left({}^{\top}\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \right) \cdot \underline{\underline{dM}}'_0 \quad (3.20)$$

On voit que l'évolution de la métrique entre la configuration de référence Ω_0 et la configuration actuelle Ω_t est caractérisée par le champ de tenseurs d'ordre deux symétriques dans la configuration de référence ${}^{\top}\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$. Ce tenseur est appelé tenseur de dilatation de Cauchy, qu'on note :

$$\boxed{\underline{\underline{C}}(\underline{X}, t) = {}^{\top}\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)} \quad (3.21)$$

Ce champ contient toute l'information nécessaire et suffisante pour décrire l'évolution de la déformation du matériau au voisinage de $\underline{M0}$. Si nous considérons un mouvement rigidifiant des particules (translation plus rotation), le champ de gradient $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$ est un champ uniforme de tenseurs orthogonaux $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{Q}}(t)$ (où $\underline{\underline{Q}}(t)$ est orthogonal, c'est-à-dire ${}^{\top}\underline{\underline{Q}}(t) \cdot \underline{\underline{Q}}(t) = \underline{\underline{Q}}(t) \cdot {}^{\top}\underline{\underline{Q}}(t) = \underline{\underline{1}}$). Dans ce cas $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$ est l'inverse de $\underline{\underline{Q}}(t)$. Le tenseur de dilatation de Cauchy est donc égal à l'identité lorsqu'il n'y a pas déformation de la matière. Cette situation peut quelquefois être gênante puisque lorsque les déformations sont petites, le concept de tenseur de dilatation de Cauchy traduisant ces déformations est proche de l'identité et n'a donc pas que des composantes petites par rapport à l'unité. Pour éviter cette situation, on introduit un concept qui n'ajoute rien, du point de vue du fond, mais dont les composantes sont toutes petites par rapport à l'unité en cas de petites déformation du milieu. Il s'agit de la déformation de Green-Lagrange qu'on note :

$$\boxed{\underline{\underline{e}}(\underline{X}, t) = \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{C}}(\underline{X}, t) - \underline{\underline{1}} \right]} \quad (3.22)$$

Revenons sur l'étude du tenseur de dilatation de Cauchy. Tout tenseur d'ordre deux peut être décomposé en un produit d'un tenseur symétrique et d'un tenseur orthogonal. Ainsi, il existe $\underline{\underline{U}}(\underline{X}, t)$ symétrique et $\underline{\underline{R}}(\underline{X}, t)$ orthogonal tels que :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{R}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{U}}(\underline{X}, t) \quad (3.23)$$

Alors on obtient grâce à la définition du tenseur de dilatation de Cauchy en (3.21) et au fait que ${}^{\top}\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}^{-1}$, on a :

$$\underline{\underline{C}}(\underline{X}, t) = {}^{\top}\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = {}^{\top}\underline{\underline{U}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{U}}(\underline{X}, t) \quad (3.24)$$

Le tenseur orthogonal $\underline{R}(\underline{X}, t)$ est appelé rotation de la matière autour de la particule \underline{X} à l'instant t . Le tenseur $\underline{U}(\underline{X}, t)$ est la déformation pure de la particule \underline{X} à l'instant t . La partie orthogonale dans la décomposition multiplicative du gradient de la transformation dans la configuration de référence est la rotation de la matière pour l'observateur qui décrit le mouvement. C'est un champ non objectif, contrairement à la partie symétrique de la décomposition multiplicative qui décrit la déformation. On peut dire à nouveau de manière naïve et caricaturale que la particule, d'une part ne « sait » pas qu'elle est observée, et d'autre part elle n'a pas de boussole et ne peut donc « connaître » son orientation par rapport à l'observateur qui décrit son mouvement. Ainsi la seule information qu'elle « perçoit » de l'évolution de son environnement immédiat entre la configuration initiale et la configuration actuelle est la déformation pure $\underline{U}(\underline{X}, t)$ ou de manière équivalente le tenseur de dilatation de Cauchy ou encore, et toujours de manière équivalente, le tenseur de déformation de Green-Lagrange. Chacun de ces trois tenseurs résume l'évolution des distances et des angles entre la configuration initiale de référence et la configuration actuelle pour les particules au voisinage de \underline{M}_0 . Le concept de déformation de Green-Lagrange est le concept essentiel identifié dans une analyse lagrangienne du mouvement des particules.

Déplacement

Le déplacement est égal à la position actuelle moins la position initiale, soit :

$$\underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{\phi}(\underline{X}, t) - \underline{X} \quad (3.25)$$

A l'aide du déplacement, la déformation de Green-Lagrange (3.22) s'écrit :

$$\underline{e}(\underline{X}, t) = \frac{1}{2} \left[\underline{\nabla}_{\underline{X}} \underline{u} + {}^T \underline{\nabla}_{\underline{X}} \underline{u} + {}^T \underline{\nabla}_{\underline{X}} \underline{u} \cdot \underline{\nabla}_{\underline{X}} \underline{u} \right] \quad (3.26)$$

Lorsque les composantes du gradient sont petites par rapport à l'unité (disons pour fixer les idées inférieures à 10^{-2}), dans (3.26) le dernier terme (quadratique) est négligeable par rapport aux deux autres. On peut alors approcher la déformation de Green-Lagrange par la déformation linéarisée notée $\underline{\varepsilon}(\underline{X}, t)$. On a donc dans ce cas $\underline{e}(\underline{X}, t) \simeq \underline{\varepsilon}(\underline{X}, t)$. Elle a l'avantage d'être linéaire en fonction du déplacement, et s'écrit :

$$\underline{\varepsilon}(\underline{X}, t) = \frac{1}{2} \left[\underline{\nabla}_{\underline{X}} \underline{u} + {}^T \underline{\nabla}_{\underline{X}} \underline{u} \right] \quad (3.27)$$

3.1.3 Comparaison description lagrangienne-description eulérienne

La première étape de la comparaison concerne la description du mouvement proprement dit. À \underline{X} fixé, la transformation est une fonction du temps t qui décrit la trajectoire de la particule \underline{X} (i.e., $t \mapsto \underline{\Phi}(\underline{X}, t) = \underline{x}$). Ainsi on peut écrire la vitesse de la particule comme la dérivée partielle de $\underline{\Phi}$ par rapport à t (seconde variable). C'est un champ dans la configuration de référence. Par ailleurs, dans la description eulérienne du mouvement, la vitesse $\underline{V}(\underline{x}, t)$ est un champ de la configuration actuelle. On a donc la relation suivante :

$$\underline{V}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t}(\underline{X}, t) \quad (3.28)$$

Comparons les taux de variation volumique eulérien et lagrangien. Le point de vue lagrangien nous a permis d'écrire la relation (3.16). Le taux de variation dans le temps de ce volume élémentaire peut être calculé par dérivation de cette relation (où $d\Omega_0$ est indépendant du temps), on obtient :

$$\widehat{d\Omega} = \underline{j}(\underline{X}, t) d\Omega_0 \quad (3.29)$$

Par ailleurs, on avait montré la relation (3.5) dans le paragraphe sur la description eulérienne du mouvement qui fait intervenir la divergence de la vitesse dans la configuration actuelle. On obtient en combinant les relations (3.5) et (3.16) la relation suivante :

$$\widehat{d\Omega}_t = \text{div}_{\underline{x}} [\underline{V}(\underline{x}, t)] J d\Omega_0 \quad (3.30)$$

On obtient donc en combinant les relations (3.30) et (3.29) :

$$\boxed{\text{div}_{\underline{x}} [\underline{V}(\underline{x}, t)] = \underline{j}(\underline{X}, t) J^{-1}(\underline{X}, t)} \quad (3.31)$$

La relation (3.19) entre le vecteur matériel élémentaire actuel et le vecteur matériel élémentaire initial fait intervenir le gradient de la transformation. Le taux de variation dans le temps de ce vecteur matériel élémentaire peut être calculé par dérivation de cette relation (où $d\underline{M}_0$ est indépendant du temps), on obtient donc :

$$\widehat{d\underline{M}} = \underline{\dot{F}} \cdot d\underline{M}_0 \quad (3.32)$$

Par ailleurs, on avait montré la relation (3.10) dans le paragraphe sur la description eulérienne du mouvement à l'aide du gradient de la vitesse dans la configuration actuelle. On obtient en combinant les relations (3.10) et (3.19) la relation suivante :

$$\widehat{d\underline{M}} = \underline{\nabla}_{\underline{x}} [\underline{V}] \cdot \underline{F} \cdot d\underline{M}_0 \quad (3.33)$$

On obtient donc en combinant les relations (3.33) et (3.32) :

$$\boxed{\underline{\nabla}_{\underline{x}} [\underline{V}] = \underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1}} \quad (3.34)$$

La relation (3.20) synthétise l'étude de l'évolution de la métrique de la matière dans un point de vue lagrangien. Le taux de variation dans le temps de cette métrique de la matière peut être calculé par dérivation de cette relation (où $d\underline{M}_0$ est indépendant du temps), on obtient donc :

$$\widehat{d\underline{M} \cdot d\underline{M}'} = d\underline{M}_0 \cdot \underline{\dot{C}} \cdot d\underline{M}'_0 \quad (3.35)$$

Par ailleurs, on avait montré la relation (3.11) dans le paragraphe sur la description eulérienne du mouvement à l'aide du taux de déformation dans la configuration actuelle. On obtient en combinant les relations (3.11) et (3.20) la relation suivante :

$$\widehat{d\underline{M} \cdot d\underline{M}'} = 2 d\underline{M}_0 \cdot {}^{\top} \underline{F} \cdot \underline{d} \cdot \underline{F} \cdot d\underline{M}'_0 \quad (3.36)$$

On obtient donc en combinant les relations (3.36) et (3.35) et en remarquant que $\underline{\dot{C}} = 2 \underline{\dot{e}}$:

$$\boxed{\underline{d} = {}^{\top} \underline{F}^{-1} \cdot \underline{\dot{e}} \cdot \underline{F}^{-1}} \quad (3.37)$$

3.2 Niveau 2 : Définition des efforts

Rappelons que dans la méthode des puissances virtuelles que nous utilisons, la définition des efforts suppose de choisir tout d'abord l'espace vectoriel des mouvements virtuels (ainsi que le sous espace vectoriel des mouvements rigidifiant), puis les trois formes linéaires définissant respectivement les efforts extérieurs, les efforts d'accélération et les efforts intérieurs. Enfin, l'application du principe des puissances virtuelles (PPV) permet d'établir les équations d'équilibre et les conditions aux limites en contrainte sur la frontière de nos objets. Nous transporterons ensuite les contraintes dans la configuration de référence de deux manières, la première par l'énergie et la seconde par les forces.

3.2.1 Choix de l'espace vectoriel des mouvements virtuels

L'espace vectoriel des mouvements virtuels doit contenir l'espace vectoriel des champs de vitesses réelles à l'instant t , c'est-à-dire l'espace vectoriel des champs de vecteurs, puisque notre milieu de Cauchy est mono-particulaire et que les particules sont sans microstructure (particules ponctuelles). Il n'y a pas d'intérêt à choisir un espace vectoriel plus grand, ainsi le cinquième choix est le suivant. L'espace vectoriel des mouvements virtuels est l'espace vectoriel des champs de vecteurs $V^*(\underline{x})$, \mathcal{C}^1 par morceaux dans Ω_t . Le sixième choix est celui du sous-espace vectoriel des mouvements virtuels rigidifiant. Remarquons que le produit vectoriel entre un vecteur taux de rotation $\underline{\omega}$ et \underline{x} est équivalent au produit de \underline{x} par un tenseur antisymétrique $\underline{\underline{\omega}}$.

Chapitre 4

Écriture générale des relations constitutives dans les milieux de Cauchy

Chapitre 5

Comportement des polymères et des élastomères

Chapitre 6

Les origines physiques de la plasticité

Chapitre 7

Élasto-plasticité sous l'hypothèse des petites perturbations

Chapitre 8

Élasto-plasticité en grandes transformations

Contents

8.1	Rappels sur les convexes	94
8.2	Décomposition multiplicative du gradient de la transformation	96
8.3	Description du mouvement	99
8.4	Contraintes	100
8.5	Choix des variables d'état et hypothèses thermodynamiques	102
8.6	Analyse thermodynamique des processus de déformation	105
8.6.1	Intérieur du domaine d'élasticité	108
8.6.2	Frontière du domaine d'élasticité	108
8.6.3	Critère en contrainte	109
8.6.4	Loi d'écoulement	110
8.7	Isotropie (élasticité et écoulement) et Néo-Hookéen	111
8.8	Illustration en traction simple	114

Ce chapitre couvre la construction du modèle le plus standard d'élasto-plasticité en grandes transformations dans un milieu de Cauchy, c'est-à-dire le modèle de von Mises. Nous avons un triple objectif. Le premier objectif est de familiariser le lecteur à la construction d'un modèle de comportement non-linéaire à partir de l'analyse thermodynamique, ainsi une part importante de la discussion portera sur la notion d'évolution possible. Le second objectif est d'explicitier les hypothèses thermodynamiques qui sous-tendent l'écriture de ce comportement. Enfin, le troisième objectif est de synthétiser l'ensemble des équations nécessaires pour traiter des problèmes élasto-plastiques en grandes transformations.

Contrairement au chapitre précédent, nous construirons les concepts majeurs et les relations qui les relient à partir du choix des variables d'état et de l'analyse thermodynamique du processus de déformation, grâce à l'équation des bilans vue au chapitre 4. Comme nous l'avons vu au chapitre 5, se donner un comportement revient à définir deux potentiels thermodynamiques, c'est-à-dire la densité d'énergie libre massique Ψ et la puissance dissipée massique D en fonction des variables d'état. Dans ce chapitre, nous introduirons une analogie rhéologique de type « ressort-patin », pour justifier des choix que nous ferons sur ces potentiels thermodynamiques. Le concept de domaine d'élasticité convexe, le critère plastique et la loi d'écoulement apparaîtront naturellement au cours de l'analyse thermodynamique.

8.1 Rappels sur les convexes

Cette section est un bref rappel des différents outils mathématiques qui permettent de définir des domaines convexes dans un espace en dimension n . Ces rappels permettront, lorsque ces outils apparaîtront dans l'analyse thermodynamique, de les reconnaître et les utiliser correctement.

On peut définir un domaine convexe noté K dans un espace de dimension n noté Σ de manière implicite par une fonction $f_K(\underline{x})$ telle que :

$$K = \{\underline{x} \in \Sigma, f_K(\underline{x}) \leq 0\} \quad (8.1)$$

L'intérieur de K noté $\overset{\circ}{K}$:

$$\overset{\circ}{K} = \{\underline{x} \in \Sigma, f_K(\underline{x}) < 0\} \quad (8.2)$$

La frontière de K notée ∂K s'écrit :

$$\partial K = \{\underline{x} \in \Sigma, f_K(\underline{x}) = 0\} \quad (8.3)$$

Si la frontière est suffisamment régulière, le vecteur normal unitaire sortant \underline{n} en un point $\underline{x} \in \partial K$ s'écrit :

$$\underline{n} = \frac{\nabla f_K(\underline{x})}{\|\nabla f_K(\underline{x})\|} \quad (8.4)$$

Nous allons donner une définition alternative « duale », qui nous sera utile par la suite. On introduit en premier lieu la notion de fonction d'appui du convexe notée $\Pi(\underline{n})$. Considérons un vecteur normal sortant \underline{n} , en un point \underline{x}_0 de la frontière ∂K . On note $\underline{X} \in K$ le centre du domaine K . Le scalaire $\Pi(\underline{n})$ est défini comme la plus grande distance dans la direction \underline{n} entre les points de la frontière $\underline{x}^* \in \partial K$ et le centre \underline{X} du convexe.

(Attention cette distance est négative dans la direction opposée à \underline{n}). Ce maximum est atteint pour le point $\underline{x}_0 \in \partial K$. On voit à la figure 8.1 une représentation en plan du concept de fonction d'appui. On a donc la définition suivante de la fonction d'appui :

$$\Pi(\underline{n}) = \sup_{\underline{x}^* \in \partial K} \{(\underline{x}^* - \underline{X}) \cdot \underline{n}\} \quad (8.5)$$

Par ailleurs le point $\underline{x}_0 \in \partial K$ se lit :

$$\underline{x}_0 = \operatorname{argsup} \left[\sup_{\underline{x}^* \in \partial K} \{(\underline{x}^* - \underline{X}) \cdot \underline{n}\} \right] \quad (8.6)$$

Ce concept de fonction d'appui nous permet en premier lieu de définir un hyper-plan tangent en \underline{x}_0 noté $T_{\underline{x}_0}$. En effet, comme on peut le voir à la figure 8.1, l'équation de l'hyper-plan se lit $(\underline{x} - \underline{X}) \cdot \underline{n} - \Pi(\underline{n}) = 0$, plus précisément :

$$T_{\underline{x}_0} = \{\underline{x} \in \Sigma, (\underline{x} - \underline{X}) \cdot \underline{n} - \Pi(\underline{n}) = 0\} \quad (8.7)$$

On remarque que la fonction d'appui est positivement homogène de degré 1, c'est-à-dire que quelque soit $\alpha > 0$, $\Pi(\alpha \underline{n}) = \alpha \Pi(\underline{n})$. Cela nous permettra d'utiliser des vecteurs normaux \underline{n} qui ne soient pas nécessairement unitaires.

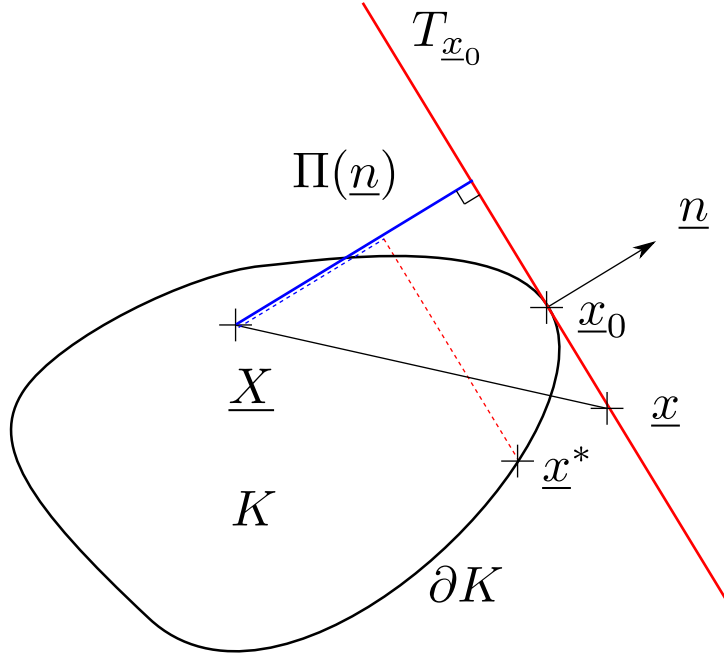


FIGURE 8.1 – Fonction d'appui d'un convexe

On peut ainsi définir comme suit le demi-espace sous l'hyper-plan tangent en \underline{x}_0 , que l'on note $DE_{\underline{x}_0}$:

$$DE_{\underline{x}_0} = \{\underline{x} \in \Sigma, (\underline{x} - \underline{X}) \cdot \underline{n} - \Pi(\underline{n}) \leq 0\} \quad (8.8)$$

On constate que quelque soit $\underline{x}_0 \in \partial K$, K est inclus dans le demi-espace sous l'hyper-plan tangent, soit $K \subset DE_{\underline{x}_0}$. Finalement on peut donner une définition duale du convexe K à

l'aide simplement du centre \underline{X} et de sa fonction d'appui, comme l'intersection de tous les hyper-plans tangents, soit :

$$K = \bigcap_{\underline{n} \neq 0} \{ \underline{x} \in \Sigma, (\underline{x} - \underline{X}) \cdot \underline{n} - \Pi(\underline{n}) \leq 0 \} \quad (8.9)$$

Par ailleurs il sera utile, pour un vecteur \underline{n} donné de déterminer le point de tangence noté \underline{x}_0 entre l'hyper-plan de normale sortante \underline{n} et le convexe K . La relation (8.6) permet de démontrer une relation ne faisant intervenir que la fonction d'appui :

$$\underline{x}_0 = \frac{d\Pi(\underline{n})}{d\underline{n}} \quad (8.10)$$

Bien entendu, nous pouvons faire le lien avec ce que nous avons vu en petites transformations au chapitre 7. En effet, cette définition duale d'un ensemble convexe dans un espace de dimension n a pour vocation à devenir le domaine d'élasticité en contrainte déviatorique (notée \underline{s}) dont le centre est noté \underline{X} . Il s'agit d'un espace de tenseurs d'ordre 2 symétriques de trace nulle (noté $\mathcal{T}_{\text{dev}}^S$) dont la dimension est 5. Nous conservons la notation tensorielle, et il faut donc se rappeler que la double contraction est un produit scalaire pour les tenseurs d'ordre 2. De plus, nous avons vu au chapitre 7, que pour les critères standards (ou associés) le taux de déformation plastique noté $\underline{\dot{\epsilon}}^P$, qui est un tenseur d'ordre 2 symétrique déviatorique, est normal à la frontière du domaine. On peut donc réécrire les développements précédents avec les notations utiles pour la mécanique. La définition de la fonction d'appui devient :

$$\Pi(\underline{\dot{\epsilon}}^P) = \sup_{\underline{s}^* \in \partial K} \{ (\underline{s}^* - \underline{X}) : \underline{\dot{\epsilon}}^P \} \quad (8.11)$$

Et la définition duale du convexe devient :

$$K = \bigcap_{\underline{\dot{\epsilon}}^P \in \mathcal{T}_{\text{dev}}^S} \{ \underline{s} \in \mathcal{T}_{\text{dev}}^S, (\underline{s} - \underline{X}) : \underline{\dot{\epsilon}}^P - \Pi(\underline{\dot{\epsilon}}^P) \leq 0 \} \quad (8.12)$$

8.2 Décomposition multiplicative du gradient de la transformation

On sait depuis la fin des années 1960 que le procédé le plus satisfaisant pour définir l'état thermodynamique d'un volume élémentaire d'un matériau devant subir de grandes transformations élastoplastiques consiste à introduire une configuration « relâchée », (Green et Naghdi (1965), Perzyna et Wojno (1968), Mandel (1971)).

Considérons le schéma de la figure 8.2. La configuration de référence est notée Ω_0 et la configuration actuelle est notée Ω_t . Considérons une particule $\underline{X} \in \Omega_0$ dans la configuration de référence et son voisinage immédiat, qui est transporté par la transformation $\underline{\Phi}(\underline{X}, t)$ en $\underline{x} \in \Omega_t$ dans la configuration actuelle et dont le voisinage s'est déformé grâce au gradient de la transformation $\underline{F}(\underline{X}, t)$. La configuration relâchée est obtenue en extrayant, par la pensée, la particule et son voisinage hors de Ω_t . On a donc une décharge élastique de ce volume de matière élémentaire, car ce dernier n'est plus soumis aux efforts

intérieurs exercés par le reste du domaine. Dans la configuration relâchée, le volume de matière élémentaire considéré est alors libre de contraintes. Cette décharge sur ce volume élémentaire se fait grâce à un tenseur élastique noté $\underline{\underline{E}}^{-1}(\underline{X}, t)$. Ainsi, pour passer de la configuration relâchée à la configuration actuelle il suffit d'appliquer l'opérateur $\underline{\underline{E}}(\underline{X}, t)$. Intuitivement, cette opération consiste à « forcer » le volume élémentaire relâché à rentrer dans la place qu'il occupait dans la configuration actuelle. Le tenseur $\underline{\underline{E}}(\underline{X}, t)$ a bien un statut élastique dans la mesure où il correspond à une décharge purement élastique du volume élémentaire.

Pour déformer le volume élémentaire de la configuration de référence vers la configuration relâchée, on introduit un tenseur noté $\underline{\underline{P}}(\underline{X}, t)$. Ce tenseur ne crée pas de contraintes, car comme nous l'avons vu, la configuration relâchée est libre de contraintes. Ce tenseur contient toute la partie irréversible de la déformation, et a donc un statut de tenseur plastique. On peut donc décomposer le gradient de la transformation comme suit :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{E}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{P}}(\underline{X}, t) \quad (8.13)$$

Il faut bien évidemment faire attention à l'ordre dans lequel s'enchaînent les opérateurs. En partant de la configuration de référence on applique d'abord le tenseur $\underline{\underline{P}}(\underline{X}, t)$ pour arriver dans la configuration relâchée, puis on applique le tenseur $\underline{\underline{E}}(\underline{X}, t)$ pour arriver dans la configuration actuelle.

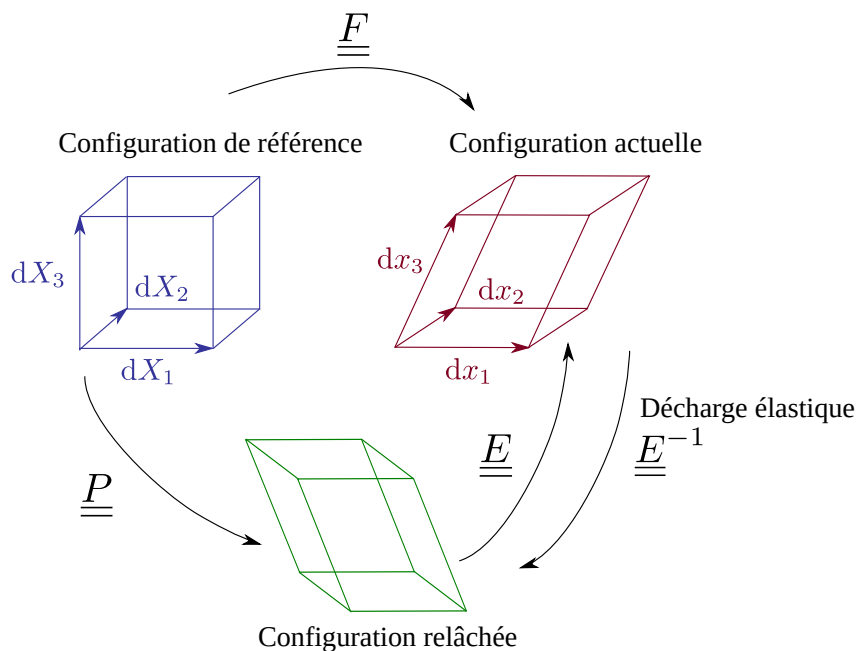


FIGURE 8.2 – Décomposition du gradient de la transformation

Il est très important de comprendre pourquoi nous avons considérés le voisinage élémentaire d'une particule \underline{X} pour établir la décomposition. En effet, pour chaque particule et son voisinage, la décharge élastique est différente si bien que l'on ne peut pas reconstruire un domaine complet associé à la configuration relâchée. On dit que les tenseurs $\underline{\underline{P}}(\underline{X}, t)$ et $\underline{\underline{E}}(\underline{X}, t)$ sont incompatibles. On peut voir cette notion d'incompatibilité à la figure 8.3. D'un point de vue plus mathématique, cela signifie qu'il n'existe pas de transformations dont $\underline{\underline{P}}(\underline{X}, t)$ et $\underline{\underline{E}}(\underline{X}, t)$ seraient les gradients.

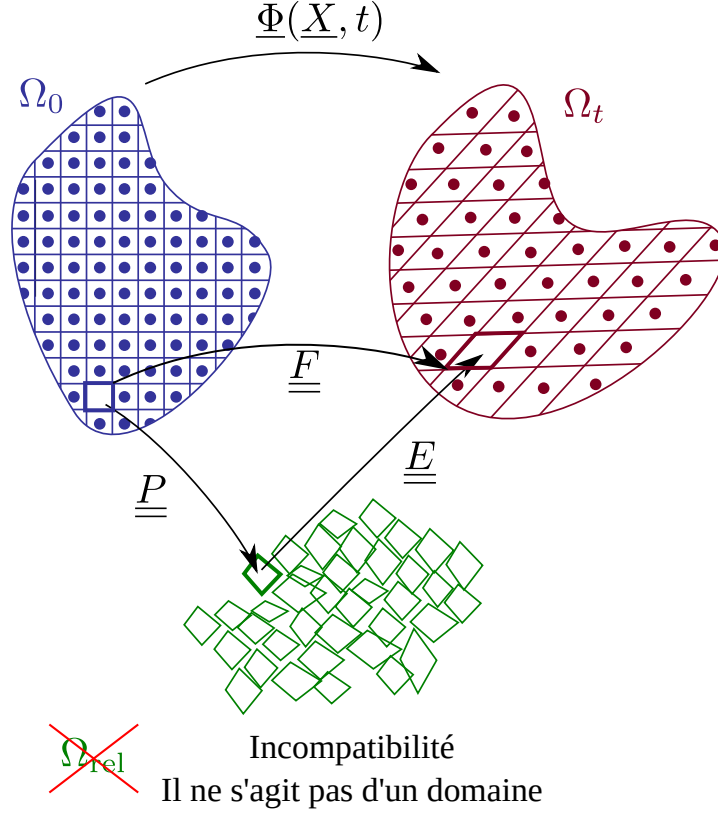


FIGURE 8.3 – Incompatibilité des tenseurs élastique et plastique

L'une des difficultés pour définir la configuration relâchée est que la décharge élastique n'est pas définie a priori de manière unique. En effet, si $\underline{\underline{E}}(\underline{X}, t)$ est un tenseur élastique possible, on peut construire $\underline{\underline{\tilde{E}}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{E}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{R}}(\underline{X}, t)$ et $\underline{\underline{\tilde{P}}}(\underline{X}, t) = {}^T \underline{\underline{R}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{P}}(\underline{X}, t)$, avec $\underline{\underline{R}}(\underline{X}, t)$ un tenseur orthogonal quelconque, de telle sorte que l'on conserve la décomposition :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{E}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{P}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\tilde{E}}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{\tilde{P}}}(\underline{X}, t) \quad (8.14)$$

Si l'on s'intéresse à la plasticité d'un mono-cristal on peut choisir la rotation $\underline{\underline{R}}(\underline{X}, t)$ en fonction des plans de glissement du cristal. Jean Mandel introduit notamment la notion de trièdre directeur associé aux plans de glissement qui permet d'orienter le tenseur élastique. Cependant pour un polycristal, dont chaque grain a sa propre orientation cristalline, on ne peut pas identifier de direction privilégiée qui a du sens du point de vue de la plasticité. Nous allons donc définir le tenseur élastique de manière unique en ajoutant une condition de symétrie. En effet, un tenseur élastique quelconque possible $\underline{\underline{\tilde{E}}}(\underline{X}, t)$ est a priori non symétrique, ainsi le théorème de la décomposition polaire assure que ce tenseur peut s'écrire de manière unique comme le produit d'un tenseur symétrique (défini positif) et d'un tenseur orthogonal. On choisit donc comme tenseur élastique $\underline{\underline{E}}(\underline{X}, t)$ l'unique tenseur symétrique qui permet d'écrire la décharge entre la configuration actuelle et la configuration relâchée. Ainsi, cette condition de symétrie, est non seulement utile pour la suite des développements, mais permet en outre de définir de manière univoque le tenseur élastique.

Il est important de noter que le formalisme multiplicatif obtenu en (8.13) s'obtient

simplement en enchaînant les opérateurs tensoriels. On peut évidemment faire le lien avec le formalisme additif en petites transformations vu au chapitre 7. En effet, il suffit d'écrire que les tenseurs sont proches de l'identité, soit $\underline{\underline{F}}(\underline{\underline{X}}, t) \approx \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\varepsilon}}$, $\underline{\underline{E}}(\underline{\underline{X}}, t) \approx \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^e$ et $\underline{\underline{P}}(\underline{\underline{X}}, t) \approx \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^p$ pour obtenir la décomposition additive des déformation en petites transformations :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad (8.15)$$

Dans la plupart des métaux, du fait des mécanismes de mouvement de dislocation vus au chapitre 6, les phénomènes plastiques isochores, c'est-à-dire sans variation de volume. Cela se traduit par la relation :

$$\det(\underline{\underline{P}}) = 1 \Leftrightarrow \text{tr}(\underline{\underline{\dot{P}}}\underline{\underline{P}}^{-1}) = 0 \quad (8.16)$$

Ainsi la variation de volume J est uniquement d'origine élastique. En effet, en utilisant le fait que le déterminant est une application multilinéaire on obtient $J = \det(\underline{\underline{E}})$, car :

$$J = \det(\underline{\underline{F}}) = \det(\underline{\underline{E}}\underline{\underline{P}}) = \det(\underline{\underline{E}}) \times \underbrace{\det(\underline{\underline{P}})}_{=1} = \det(\underline{\underline{E}}) \quad (8.17)$$

8.3 Description du mouvement

Pour la description du mouvement, nous allons reprendre la démarche vue au chapitre 3, mais en introduisant la décomposition multiplicative du gradient de la transformation (8.13). On a donc le gradient du champ de vitesse $\underline{\underline{V}}(\underline{\underline{x}}, t)$ qui s'écrit :

$$\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{\underline{x}}} \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{\dot{F}}}\underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{\dot{E}}}\underline{\underline{E}}^{-1} + \underline{\underline{E}}\underline{\underline{\dot{P}}}\underline{\underline{P}}^{-1}\underline{\underline{E}}^{-1} \quad (8.18)$$

On introduit donc classiquement le taux de déformation $\underline{\underline{d}} = (1/2)(\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{\underline{x}}} \underline{\underline{V}} + {}^\top \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{\underline{x}}} \underline{\underline{V}})$. Puisque la partie plastique est isochore (8.16), on remarque que la trace de $\underline{\underline{d}}$ ne dépend bien que de la partie élastique du gradient de la transformation $\text{tr}(\underline{\underline{d}}) = \text{tr}(\underline{\underline{\dot{E}}}\underline{\underline{E}}^{-1})$. Par ailleurs, la décomposition (8.18) suggère d'introduire la partie élastique du taux de déformation $\underline{\underline{d}}^e$ comme suit :

$$\underline{\underline{d}}^e = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\dot{E}}}\underline{\underline{E}}^{-1} + {}^\top \left(\underline{\underline{\dot{E}}}\underline{\underline{E}}^{-1} \right) \right) \quad (8.19)$$

Puisque $\underline{\underline{d}}^e$ ne fait intervenir que le tenseur $\underline{\underline{E}}$, cette entité est donc intéressante pour décrire le mouvement entre la configuration relâchée et la configuration actuelle. On pourrait être tenté de définir un taux de déformation plastique comme la partie symétrique du second terme de (8.18) $\underline{\underline{E}}\underline{\underline{\dot{P}}}\underline{\underline{P}}^{-1}\underline{\underline{E}}^{-1}$. Cependant, cette entité fait intervenir à la fois le tenseur $\underline{\underline{E}}$ et le tenseur $\underline{\underline{P}}$, on n'isole donc pas la partie plastique, ce qui rendrait difficile l'analyse des évolutions possibles dans l'équation des bilans thermodynamique. C'est la raison pour laquelle on introduit la partie plastique du taux de déformation comme suit :

$$\underline{\underline{d}}^p = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\dot{P}}}\underline{\underline{P}}^{-1} + {}^\top \left(\underline{\underline{\dot{P}}}\underline{\underline{P}}^{-1} \right) \right) \quad (8.20)$$

Nous pouvons remarquer que $\underline{\underline{d}}^p$ est déviatorique du fait de (8.16). Cette définition s'avérera utile par la suite et émergera naturellement des développements.

8.4 Contraintes

La configuration relâchée joue un rôle privilégié dans la mesure où elle se situe entre la partie plastique et la partie élastique et permet donc de bien distinguer ces contributions. Nous avons vu au chapitre 4 l'équation des bilans thermodynamique écrite dans la configuration actuelle. Nous rappelons que cette équation s'obtient en écrivant le bilan locale d'énergie interne associé au premier principe de la thermodynamique et le bilan d'entropie associé au second principe de la thermodynamique (qui se lit $p_s \geq 0$).

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - \rho (\dot{\Psi} + \dot{T}s) - \frac{q \cdot \nabla_x (T)}{T} - T p_s = 0 \quad (8.21)$$

Nous allons réécrire cette relation dans la configuration relâchée pour faire apparaître les concepts de contrainte pertinent dans cette configuration. (Il s'agit d'une approche similaire à ce qui a été présenté au chapitre 3 pour introduire le concept de contrainte de Piola-Kirchoff).

Dans un comportement élasto-plastique, la seule partie dissipative, c'est-à-dire de production d'entropie, est due aux phénomènes plastiques. Pour simplifier les notations, on introduit la puissance massique dissipée par les phénomènes plastique D qui se lit :

$$D = \frac{T p_s}{\rho} \quad (8.22)$$

Dans la suite de la présentation nous ne considérerons que les états isothermes, c'est-à-dire en simplifiant le gradient et la dérivée temporelle du champ de température dans (8.21). Puisque l'équation des bilans doit être vraie pour tout état possible du système et toute évolution possible à partir de cet état, les conclusions que nous allons tirer des cette analyse partielle isotherme, resterons valable même pour les états non isotherme. Une analyse complète, permettrait en outre de poser les bases de l'auto-échauffement dû aux phénomène plastiques. Ainsi, l'équation des bilans (8.21) se lit sous forme massique :

$$\frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \underline{\underline{d}}(\underline{x}, t)}{\rho(\underline{x}, t)} - (\dot{\Psi}(\underline{x}, t) + D(\underline{x}, t)) = 0 \quad (8.23)$$

Il est clair que le concept de contrainte associé à l'écriture énergétique (8.23) est issu du terme $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) / \rho(\underline{x}, t)$. Nous allons donc travailler sur ce terme pour faire apparaître les concepts de contrainte dans la configuration relâchée. Le tenseur de contrainte de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ étant symétrique on a (la partie anti-symétrique du gradient du champ de vitesse double contractée avec $\underline{\underline{\sigma}}$ est nulle) :

$$\frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \underline{\underline{d}}(\underline{x}, t)}{\rho(\underline{x}, t)} = \frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)}{\rho(\underline{x}, t)} : \nabla_{\underline{x}} V(\underline{x}, t) \quad (8.24)$$

Ainsi, on a grâce à (8.18) :

$$\frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \underline{\underline{d}}(\underline{x}, t)}{\rho(\underline{x}, t)} = \underbrace{\frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)}{\rho(\underline{x}, t)} : \left(\underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1} \right)}_{\text{contribution 1}} + \underbrace{\frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)}{\rho(\underline{x}, t)} : \left(\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\dot{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1} \right)}_{\text{contribution 2}} \quad (8.25)$$

Cette dernière formulation permet clairement d'identifier deux contributions, qui vont donner naissance à deux concepts de contrainte distincts. Pour la première contribution (8.25) nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{x}, t)} : (\underline{\underline{\dot{E}}}.E^{-1}) &= \text{tr} \left(\frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{x}, t)} \cdot \underline{\underline{\dot{E}}}.E^{-1} \right) = \text{tr} \left(E^{-1} \cdot \frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{x}, t)} \cdot \underline{\underline{\dot{E}}} \right) \\
&= \text{tr} \left(E^{-1} \cdot \frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{x}, t)} \cdot \underbrace{\overset{\top}{E^{-1}} \cdot \overset{\top}{E} \cdot \underline{\underline{\dot{E}}}}_{\underline{\underline{1}}} \right) \\
&= \underbrace{\left(E^{-1} \cdot \frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{x}, t)} \cdot \overset{\top}{E^{-1}} \right)}_{\underline{\underline{\Pi}}_{\text{rel}} / \rho_{\text{rel}}} : \left(\overset{\top}{E} \cdot \underline{\underline{\dot{E}}} \right)
\end{aligned} \tag{8.26}$$

En se rappelant le travail effectué au chapitre 3 on identifie le tenseur de Piola-Kirchoff dans la configuration relâchée $\underline{\underline{\Pi}}_{\text{rel}}$:

$$\frac{\underline{\underline{\Pi}}_{\text{rel}}}{\rho_{\text{rel}}} = \left(E^{-1} \cdot \frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{x}, t)} \cdot \overset{\top}{E^{-1}} \right) \tag{8.27}$$

Où l'on a posé ρ_{rel} la masse volumique dans la configuration relâchée qui est aussi la masse volumique dans la configuration de référence puisque le tenseur plastique est isochore. Par ailleurs, on introduit la déformation de Green-Lagrange entre la configuration relâchée et la configuration actuelle notée $\underline{\underline{e}}_{\text{rel}}$:

$$\underline{\underline{e}}_{\text{rel}} = \frac{1}{2} \left(\overset{\top}{E} \cdot \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{1}} \right) \tag{8.28}$$

On écrit donc le taux de déformation de Green-Lagrange :

$$\underline{\underline{\dot{e}}}_{\text{rel}} = \frac{1}{2} \left(\overset{\top}{\dot{E}} \cdot \underline{\underline{E}} + \overset{\top}{E} \cdot \underline{\underline{\dot{E}}} \right) \tag{8.29}$$

Ce tenseur est évidemment symétrique et apparaît comme la partie symétrique du terme $\overset{\top}{E} \cdot \underline{\underline{\dot{E}}}$ dans (8.26). On peut donc puisque le tenseur de Piola-Kirchoff est symétrique réécrire la relation (8.26) comme suit :

$$\frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{x}, t)} : (\underline{\underline{\dot{E}}}.E^{-1}) = \frac{\underline{\underline{\Pi}}_{\text{rel}}}{\rho_{\text{rel}}} : \underline{\underline{\dot{e}}}_{\text{rel}} \tag{8.30}$$

Cette relation (8.30) permet d'écrire la première contribution de (8.25) dans la configuration relâchée, et il apparaît clairement par l'introduction du tenseur de déformation de Green-Lagrange, que ce terme est associé à la partie élastique du gradient de la transformation.

Pour la seconde contribution de (8.25) nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{x}, t)} : (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\dot{P}}}.P^{-1} \cdot E^{-1}) &= \text{tr} \left(\frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{x}, t)} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\dot{P}}}.P^{-1} \cdot E^{-1} \right) = \text{tr} \left(E^{-1} \cdot \frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{x}, t)} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\dot{P}}}.P^{-1} \right) \\
&= \left(E^{-1} \cdot \frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{x}, t)} \cdot \underline{\underline{E}} \right) : (\underline{\underline{\dot{P}}}.P^{-1})
\end{aligned} \tag{8.31}$$

Cette écriture fait apparaître un nouveau tenseur de contrainte dans la configuration relâchée, que l'on nomme tenseur de contrainte plastique et que l'on note $\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}$:

$$\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}} = \underline{\underline{E}}^{-1} \cdot \frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{\underline{x}}, t)} \cdot \underline{\underline{E}} \quad (8.32)$$

Ce tenseur est fondamentalement nouveau par rapport aux autres concepts utilisés dans les chapitres précédents, à savoir le tenseur de contrainte de Piola-Kirchoff, le tenseur de contrainte de Boussinesq et le tenseur de contrainte de Cauchy. Le tenseur de contrainte plastique dans la configuration relâchée n'est pas nécessairement symétrique, quoique dans un certain nombre de cas on obtient un tenseur symétrique (notamment si $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{E}}$ commutent, ce qui est le cas pour les matériaux isotrope comme nous le verrons dans la suite de ce chapitre).

Ainsi d'après l'analyse qui précède nous pouvons réécrire (8.25) dans la configuration relâchée comme suit

$$\frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t) : \underline{\underline{d}}(\underline{\underline{x}}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{\underline{x}}, t)} = \frac{\underline{\underline{\Pi}}}{\underline{\underline{\rho}}_{\text{rel}}} : \underline{\underline{\dot{e}}}_{\text{rel}} + \frac{\underline{\underline{\Psi}}}{\underline{\underline{\rho}}_{\text{rel}}} : \left(\underline{\underline{\dot{P}}}, \underline{\underline{P}}^{-1} \right) \quad (8.33)$$

Comme nous manipulons ici un tenseur de contrainte $\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}$ non-symétrique nous introduisons sa partie symétrique $\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S}}$ et sa partie anti-symétrique $\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{A}}$. De même nous avons noté $\underline{\underline{d}}^{\text{P}}$ la partie symétrique de $\underline{\underline{\dot{P}}}, \underline{\underline{P}}^{-1}$, et nous notons $\underline{\underline{\omega}}^{\text{P}}$ sa partie anti-symétrique. Par ailleurs, $\underline{\underline{d}}^{\text{P}}$ étant déviatorique, il est utile d'introduire la partie déviatorique de $\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S}}$ que l'on note $\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}}$. Ainsi, en se rappelant que les tenseurs symétriques et anti-symétriques sont orthogonaux entre eux, et que les tenseurs isotropes (i.e., proportionnels à l'identité) et déviatoriques sont également orthogonaux entre eux, nous pouvons réécrire (8.33) comme suit :

$$\frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t) : \underline{\underline{d}}(\underline{\underline{x}}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{\underline{x}}, t)} = \frac{\underline{\underline{\Pi}}}{\underline{\underline{\rho}}_{\text{rel}}} : \underline{\underline{\dot{e}}}_{\text{rel}} + \frac{\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}}}{\underline{\underline{\rho}}_{\text{rel}}} : \underline{\underline{d}}^{\text{P}} + \frac{\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{A}}}{\underline{\underline{\rho}}_{\text{rel}}} : \underline{\underline{\omega}}^{\text{P}} \quad (8.34)$$

Cette dernière relation sera utile pour étudier les processus de déformation grâce à l'équation des bilans. Il reste encore à travailler sur les termes de puissance dissipée massique D et de taux d'énergie libre massique $\dot{\Psi}$ dans l'équation de bilans. Pour cela nous avons besoin de définir les variables d'état dont dépendent ces deux potentiels thermodynamiques.

8.5 Choix des variables d'état et hypothèses thermodynamiques

Dans cette présentation, nous ne retiendrons que le minimum de variable d'état possible. Cela convient pour l'essentiel des métaux, mais certains matériaux nécessitent d'introduire davantage de variables d'état pour décrire correctement leur comportement. D'après ce qui précède, il est clair que le tenseur élastique $\underline{\underline{E}}$ et le tenseur plastique $\underline{\underline{P}}$ sont essentiels pour décrire l'état du système. Par ailleurs, comme nous l'avons fait dans

le chapitre 7 nous introduisons une troisième variable d'état nommée déformation plastique cumulée et notée p_{cum} qui est toujours positive et donne une mesure en norme de l'histoire des déformations plastiques. Cette variable d'état est nécessaire dans la mesure où le tenseur $\underline{\underline{P}}$ ne donne une information que sur l'état actuel, et non sur l'histoire de la transformation, dont dépend fortement les phénomènes plastiques. Plus précisément on définit le taux de déformation plastique cumulée \dot{p}_{cum} comme suit :

$$\dot{p}_{\text{cum}} = \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{d}}^{\text{p}} : \underline{\underline{d}}^{\text{p}}} \geq 0 \quad (8.35)$$

Ainsi, la déformation plastique cumulée se lit comme l'intégrale au cours de la transformation de \dot{p}_{cum} :

$$p_{\text{cum}} = \int_0^t \dot{p}_{\text{cum}} dt \geq 0 \quad (8.36)$$

Nous rappelons ici que le temps t est un temps chronologique et non un temps physique. Les phénomènes plastiques ne dépendent pas du temps physique (par l'intermédiaire d'une vitesse de déformation par exemple). Le temps t est ici compris comme une variable permettant de traduire la succession des phénomènes plastiques dont l'ordre a une importance.

Comme nous l'avons déjà évoqué au chapitre 7, le tenseur $\underline{\underline{P}}$ sera associé à l'écroutissage cinématique et la déformation plastique cumulée p_{cum} sera associée à l'écroutissage isotrope. Cependant contrairement au chapitre précédent, ces notions émergeront naturellement d'hypothèses thermodynamiques raisonnables.

Comme nous l'avons dit plus haut, l'analyse thermodynamique consiste à spécifier la densité massique d'énergie libre Ψ et la puissance dissipée massique D en fonction des variables d'état que nous avons choisies. Pour cela, nous introduisons une analogie ressort/patin (modèle rhéologique simple) présenté à la figure 8.4. Le matériau est supposé se comporter comme un ressort en parallèle d'un patin qui peut glisser (avec un seuil de glissement qui représente la limite d'élasticité) auquel est fixé un autre ressort, qui représente l'élasticité du matériau. À l'échelle des dislocations, l'analogie du patin se justifie par le fait que les mécanismes plastiques sont des mouvements de dislocations qui génèrent des glissements dissipatifs de plans atomiques. Par ailleurs, le ressort en parallèle du patin se justifie par le fait que les dislocations stockent de l'énergie élastique car il s'agit de lignes en tension. Ainsi, lorsque de nouvelles dislocations sont créées, on stocke davantage d'énergie dans la microstructure. Enfin, le ressort représentant la partie élastique correspond à la distorsion globale du réseau atomique sous chargement.

Sur la base de cette analogie, on voit que deux contributions distinctes d'énergie libre doivent être considérées, correspondant à chacun des ressorts. Comme nous l'avons dit, l'énergie du ressort en parallèle du patin est bloquée dans la microstructure, car le glissement du patin est irréversible, nous nommons donc cette contribution énergétique Ψ_{blo} (blo pour bloquée). Par ailleurs, cette contribution dépend manifestement du glissement actuel du patin, nous faisons donc l'hypothèse que Ψ_{blo} ne dépend que du tenseur $\underline{\underline{P}}$ et non de p_{cum} . La seconde contribution énergétique est portée par l'allongement du second ressort qui correspond comme nous l'avons dit à la distorsion globale du réseau atomique, nous nommons donc ce terme Ψ_{dis} (dis pour distorsion). Puisque ce ressort peut être sollicité indépendamment d'un quelconque glissement du patin (si on ne dépasse pas le seuil

en effort qui permet au patin de glisser) on comprend qu'il s'agit d'une contribution purement élastique et réversible. On fait donc l'hypothèse que Ψ_{dis} ne dépende que de la déformation de Green-Lagrange de la configuration relâchée à la configuration actuelle $\underline{e}_{\text{rel}}$. Ayant considéré ces deux contribution d'énergie libre, nous pouvons écrire :

$$\Psi(\underline{E}, \underline{P}) = \Psi_{\text{dis}}(\underline{e}_{\text{rel}}) + \Psi_{\text{blo}}(\underline{P}) \quad (8.37)$$

Cette formulation de la densité massique d'énergie libre en fonction des variables d'état porte le nom d'hypothèse des contraintes élastiques, car nous verrons dans la suite de cette présentation, que cela implique que les contraintes sont toujours liées à la partie élastique du gradient de la transformation.

Par ailleurs, il sera nécessaire de dériver par rapport au temps cette expression car $\dot{\Psi}$ intervient dans l'équation des bilans thermodynamique. On a donc :

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi_{\text{dis}}}{\partial \underline{e}_{\text{rel}}} : \dot{\underline{e}}_{\text{rel}} + \frac{\partial \Psi_{\text{blo}}}{\partial \underline{P}} : \dot{\underline{P}} \quad (8.38)$$

Cette dernière expression est un peu inélégante, car on voit apparaître $\dot{\underline{P}}$ au lieu de $\dot{\underline{P}} \cdot \underline{P}^{-1}$. On modifie donc légèrement cette expression en contractant à gauche par \underline{P} et à droite par \underline{P}^{-1} :

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi_{\text{dis}}}{\partial \underline{e}_{\text{rel}}} : \dot{\underline{e}}_{\text{rel}} + \left(\underline{P} \cdot \frac{\partial \Psi_{\text{blo}}}{\partial \underline{P}} \right) : \left(\dot{\underline{P}} \cdot \underline{P}^{-1} \right) \quad (8.39)$$

Il faut noter comme nous l'avons démontré au chapitre 5, que le terme $\partial \Psi_{\text{dis}} / \partial \underline{e}_{\text{rel}}$ peut toujours être choisi symétrique du fait que $\underline{e}_{\text{rel}}$ est symétrique.

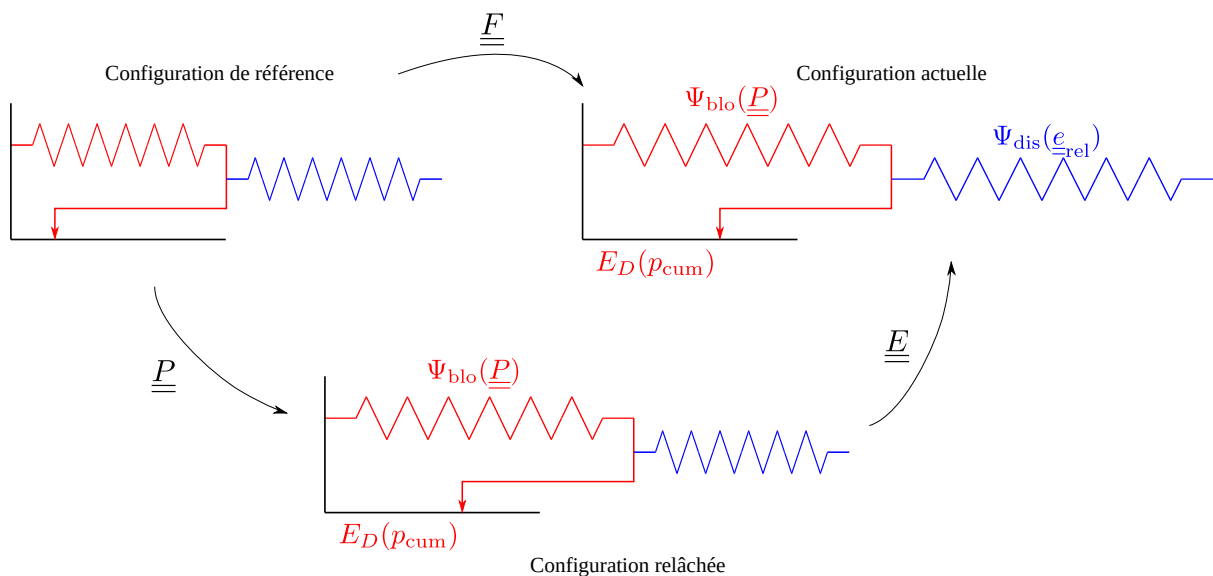


FIGURE 8.4 – Modèle rhéologique simple.

L'analogie présentée en figure 8.4 permet aussi d'écrire que l'énergie dissipée par le patin en glissant notée E_D , dépend linéairement de la distance de glissement cumulée positivement (c'est-à-dire sans se préoccuper du sens de glissement). Ainsi, on est bien

justifié à faire l'hypothèse que l'énergie dissipée est proportionnelle à p_{cum} , ce qui revient à dire que la puissance dissipée massique D est proportionnelle à \dot{p}_{cum} .

On peut remarquer, que cette relation de proportionnalité est nécessaire du fait que les phénomènes plastiques ne dépendent pas du temps physique, c'est-à-dire que les lois doivent être invariantes par un changement de variable du type $s = f(t)$ avec f une fonction strictement croissante. En effet, par exemple une loi puissance du type $D \propto \dot{p}_{\text{cum}}^\alpha$, n'est pas invariante par un changement de variable temporelle $s = f(t)$, à moins que $\alpha = 1$. Pour s'en rendre compte, il suffit de poser les différentielles $ds = \dot{f}(t)dt$ (avec $\dot{f}(t) > 0$), et l'on obtient :

$$\frac{dE_D}{dt} = \dot{f}(t) \frac{dE_D}{ds} \propto \frac{dp_{\text{cum}}}{dt}^\alpha = \left(\dot{f}(t) \frac{dp_{\text{cum}}}{ds} \right)^\alpha \Rightarrow \frac{dE_D}{ds} \propto \dot{f}(t)^{\alpha-1} \frac{dp_{\text{cum}}}{ds}^\alpha \quad (8.40)$$

Il est clair que la loi n'est conservée que si $\alpha = 1$.

Le facteur de proportionnalité noté $k \geq 0$ entre la puissance dissipée massique D et le taux de déformation plastique cumulée \dot{p}_{cum} dépend a priori de l'état du système, c'est-à-dire $\underline{E}, \underline{P}, p_{\text{cum}}$. Cependant, pour une grande majorité de métaux, il est suffisant de considérer p_{cum} . Ainsi dans la suite nous poserons la puissance dissipée massique comme suit :

$$D = \frac{k(p_{\text{cum}})\dot{p}_{\text{cum}}}{\rho_{\text{rel}}} \quad (8.41)$$

Le scalaire positif $k(p_{\text{cum}})$ joue le rôle de limite d'élasticité qui dépend de p_{cum} , c'est-à-dire prenant en compte un écrouissage isotrope.

Avec l'analyse qui précède, nous pouvons réécrire l'équation des bilans thermodynamique (8.21) sous la forme :

$$\frac{\Pi}{\rho_{\text{rel}}} : \dot{\underline{e}}_{\text{rel}} + \frac{\Psi^{\text{S,dev}}}{\rho_{\text{rel}}} : \underline{d}^{\text{p}} + \frac{\Psi^{\text{A}}}{\rho_{\text{rel}}} : \underline{\omega}^{\text{p}} - \frac{\partial \Psi_{\text{dis}}}{\partial \underline{e}_{\text{rel}}} : \dot{\underline{e}}_{\text{rel}} - \left(\underline{P} : \frac{\partial \Psi_{\text{blo}}}{\partial \underline{P}} \right) : \left(\underline{\dot{P}} \cdot \underline{P}^{-1} \right) - \frac{k(p_{\text{cum}})\dot{p}_{\text{cum}}}{\rho_{\text{rel}}} = 0 \quad (8.42)$$

Il est important de noter que cette écriture est une somme de produits, dont le premier terme ne dépend que de l'état du système et le second ne dépend que de l'évolution possible du système (dérivée temporelle).

8.6 Analyse thermodynamique des processus de déformation

L'égalité (8.42) doit être vérifiée quelque soit l'état du système et quelque soit l'évolution possible à partir de cet état. Nous allons discuter en détails, la notion d'évolution possible, car à partir d'un état donné, toutes les évolutions ne sont pas possibles. Il est donc important de réfléchir de manière explicite à ce qui est autorisé dans le modèle, et ne pas faire avancer dans les développements de manière mécanique.

Nous ferons une première hypothèse, qui consiste à affirmer que quelque soit l'état du système il est toujours possible d'envisager une décharge de telle sorte que $\underline{\dot{P}} = \mathbf{0}$ et $\dot{p}_{\text{cum}} = 0$. Pour ces évolutions possibles, il n'est en revanche pas possible de considérer n'importe quelle évolution $\dot{\underline{e}}_{\text{rel}}$. En effet, il est nécessaire de considérer les évolutions $\dot{\underline{e}}_{\text{rel}}$

qui réalisent la décharge de telle sorte qu'il n'y a pas d'évolution des variables plastiques. Si l'on se réfère à un diagramme contrainte-déformation uni-axial, on voit que lorsque l'on est sur la courbe d'écrouissage, il existe une unique manière de décharger. Donc il est raisonnable de faire l'hypothèse que pour chacune des 6 composantes de déformation il existe une manière de décharger, et que globalement il existe au moins 6 évolutions $\underline{\dot{e}}_{\text{rel}}$ indépendantes qui permettent de décharger de telle sorte que $\underline{\dot{p}} = \mathbf{0}$ et $\dot{p}_{\text{cum}} = 0$. Pour ces évolutions possibles, l'équation des bilans (8.42) devient :

$$\left(\begin{array}{c} \underline{\Pi}_{\text{rel}} \\ \underline{\rho}_{\text{rel}} \end{array} - \frac{\partial \Psi_{\text{dis}}}{\partial \underline{e}_{\text{rel}}} \right) : \underline{\dot{e}}_{\text{rel}} = 0 \quad (8.43)$$

Comme nous l'avons dit, cette égalité doit être vraie quelque soit l'état et pour au moins 6 évolutions indépendantes $\underline{\dot{e}}_{\text{rel}}$. Comme la dimension des tenseurs symétriques d'ordre 2 est 6, nous pouvons conclure que $\underline{\Pi}_{\text{rel}} / \underline{\rho}_{\text{rel}} - \partial \Psi_{\text{dis}} / \partial \underline{e}_{\text{rel}}$ est anti-symétrique. Or, ce tenseur étant symétrique, il est nécessairement nul, soit :

$$\frac{\underline{\Pi}_{\text{rel}}}{\underline{\rho}_{\text{rel}}} = \frac{\partial \Psi_{\text{dis}}}{\partial \underline{e}_{\text{rel}}} \quad (8.44)$$

On retrouve la relation que l'on avait déjà trouvé au chapitre 5 pour l'hyper-élasticité. Il faut noter que la relation (8.44) est vraie quelque soit l'état du système et peut donc être directement réinjectée dans l'équation des bilans (8.42) qui devient alors :

$$\frac{\underline{\Psi}^{\text{S,dev}}}{\underline{\rho}_{\text{rel}}} : \underline{d}^{\text{p}} + \frac{\underline{\Psi}^{\text{A}}}{\underline{\rho}_{\text{rel}}} : \underline{\omega}^{\text{p}} - \left(\underline{P} \cdot \frac{\partial \Psi_{\text{blo}}}{\partial \underline{P}} \right) : (\underline{\dot{P}} \cdot \underline{P}^{-1}) - \frac{k(p_{\text{cum}}) \dot{p}_{\text{cum}}}{\underline{\rho}_{\text{rel}}} = 0 \quad (8.45)$$

Pour simplifier les notations nous introduisons le tenseur \underline{X} suivant :

$$\underline{X} = \underline{\rho}_{\text{rel}} \underline{P} \cdot \frac{\partial \Psi_{\text{blo}}}{\partial \underline{P}} \quad (8.46)$$

Nous notons également \underline{X}^{S} et \underline{X}^{A} les parties symétrique et anti-symétrique de \underline{X} . Par ailleurs on note $\underline{X}^{\text{S,dev}}$ la partie déviatorique de \underline{X}^{S} . On ré-écrit donc (8.45) sous la forme :

$$\left(\underline{\Psi}^{\text{S,dev}} - \underline{X}^{\text{S,dev}} \right) : \underline{d}^{\text{p}} + \left(\underline{\Psi}^{\text{A}} - \underline{X}^{\text{A}} \right) : \underline{\omega}^{\text{p}} - k(p_{\text{cum}}) \dot{p}_{\text{cum}} = 0 \quad (8.47)$$

Une fois encore cette relation doit être vérifiée quelque soit l'état du système et quelque soit l'évolution possible à partir de cet état. Nous supposons que quelque soit l'état, il est toujours possible de concevoir au moins 3 évolutions indépendantes $\text{tens}\omega^{\text{p}}$ telles que $\underline{d}^{\text{p}} = \mathbf{0}$ (ce qui implique $\dot{p}_{\text{cum}} = 0$). On a alors pour ces évolutions :

$$\left(\underline{\Psi}^{\text{A}} - \underline{X}^{\text{A}} \right) : \underline{\omega}^{\text{p}} = 0 \quad (8.48)$$

Comme l'espace des tenseurs d'ordre 2 anti-symétrique est de dimension 3, on peut conclure que le tenseur $\underline{\Psi}^{\text{A}} - \underline{X}^{\text{A}}$ est symétrique (orthogonal des tenseurs symétrique), or comme ce tenseur est anti-symétrique il est nécessairement nul, soit :

$$\underline{\Psi}^{\text{A}} = \underline{X}^{\text{A}} \quad (8.49)$$

Comme cette relation est vraie quelque soit l'état du système on peut la réinjecter directement dans (8.47), qui devient :

$$\left(\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}} - \underline{\underline{X}}^{\text{S,dev}} \right) : \underline{\underline{d}}^{\text{P}} - k(p_{\text{cum}}) \dot{p}_{\text{cum}} = 0 \quad (8.50)$$

Pour aider la compréhension géométrique de cette équation des bilans (8.50) et faire le lien avec l'analyse des ensembles convexe que nous avons faite en début de chapitre, nous introduisons la fonction scalaire $\Pi(\underline{\underline{d}}^{\text{P}})$ telle que :

$$\Pi(\underline{\underline{d}}^{\text{P}}) = k(p_{\text{cum}}) \dot{p}_{\text{cum}} \quad (8.51)$$

Il est clair, compte tenu de la définition du taux de déformation plastique cumulée (8.35) que Π dépend bien de $\underline{\underline{d}}^{\text{P}}$. Cependant, il faut noter que la fonction Π ne dépend pas uniquement de l'évolution possible $\underline{\underline{d}}^{\text{P}}$ mais également de l'état du système par l'intermédiaire de $k(p_{\text{cum}})$. Cette fonction a pour vocation à devenir la fonction d'appui d'un espace convexe qui sera le domaine d'élasticité et $\underline{\underline{X}}^{\text{S,dev}}$ a pour vocation à devenir son centre. Le fait que le centre $\underline{\underline{X}}^{\text{S,dev}}$ et la fonction d'appui $\Pi(\underline{\underline{d}}^{\text{P}})$ dépendent de l'état du système montre que le domaine peut évoluer au cours de la déformation. Nous ré-écrivons l'équation des bilans (8.50) sous la forme :

$$\left(\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}} - \underline{\underline{X}}^{\text{S,dev}} \right) : \underline{\underline{d}}^{\text{P}} - \Pi(\underline{\underline{d}}^{\text{P}}) = 0 \quad (8.52)$$

Avec cette écriture on reconnaît l'équation d'un hyper-plan pour $\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}}$ dont la normale est $\underline{\underline{d}}^{\text{P}}$. Ainsi quelque soit l'état de contrainte $\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}}$, l'équation des bilans impose que cette contrainte soit à l'intersection de tous les hyper-plans dont les normales sont les évolutions possibles $\underline{\underline{d}}^{\text{P}}$. On s'attend donc à ce que le nombre d'évolutions possibles $\underline{\underline{d}}^{\text{P}}$ soit très réduit dans la mesure où l'intersection des hyper-plans correspondants doit être non vide et contenir $\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}}$.

Pour formaliser cela, introduisons l'ensemble convexe suivant dans l'espace des tenseurs d'ordre 2 symétrique et déviatorique noté $\mathcal{T}_{\text{dev}}^{\text{S}}$ de dimension 5 (on note également $\mathcal{T}_{\text{dev}}^{\text{S,*}}$ l'ensemble des tenseurs d'ordre 2 symétriques déviatoriques non nuls) :

$$K = \bigcap_{\underline{\underline{N}} \in \mathcal{T}_{\text{dev}}^{\text{S,*}}} \left\{ \underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}} \in \mathcal{T}_{\text{dev}}^{\text{S}}, \left(\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}} - \underline{\underline{X}}^{\text{S,dev}} \right) : \underline{\underline{N}} - \Pi(\underline{\underline{N}}) \leq 0 \right\} \quad (8.53)$$

Cette définition fait bien sûr écho à l'écriture que nous avons proposée en section 8.1. L'intérieur de ce convexe s'écrit :

$$\overset{\circ}{K} = \bigcap_{\underline{\underline{N}} \in \mathcal{T}_{\text{dev}}^{\text{S,*}}} \left\{ \underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}} \in \mathcal{T}_{\text{dev}}^{\text{S}}, \left(\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}} - \underline{\underline{X}}^{\text{S,dev}} \right) : \underline{\underline{N}} - \Pi(\underline{\underline{N}}) < 0 \right\} \quad (8.54)$$

Lorsque le matériau est vierge de contrainte et n'a pas encore subit d'écrouissage, on a $\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}} = 0$ et $\underline{\underline{X}}^{\text{S,dev}} = 0$. Par ailleurs, comme quelque soit $\underline{\underline{N}} \in \mathcal{T}_{\text{dev}}^{\text{S,*}}$ on a $\Pi(\underline{\underline{N}}) > 0$. L'état initial en contrainte est donc dans l'intérieur de K . Au cours du processus de déformation, l'état en contrainte peut atteindre la frontière de K et nous verrons que l'équation des bilans (8.52) interdit d'en sortir. Étudions donc les évolutions possibles à partir d'un état intérieur au domaine K et d'un état sur la frontière du domaine K .

8.6.1 Intérieur du domaine d'élasticité

Considérons un état du système de telle sorte que la contrainte $\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}}$ soit dans l'intérieur du convexe K , soit $\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}} \in \overset{\circ}{K}$. Nous nous posons la question des évolutions possibles à partir de cet état. D'après ce que nous avons dit au chapitre 7 nous nous attendons à ce que la seule évolution possible soit $\underline{\underline{d}}^{\text{P}} = \mathbf{0}$. Démontrons cela en appliquant la définition de l'intérieur du convexe (8.54) on a :

$$\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}} \in \overset{\circ}{K} \Rightarrow \forall \underline{\underline{N}} \in \mathcal{T}_{\text{dev}}^{\text{S,*}}, \left(\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}} - \underline{\underline{X}}^{\text{S,dev}} \right) : \underline{\underline{N}} - \Pi(\underline{\underline{N}}) < 0 \quad (8.55)$$

Aucun des tenseurs $\underline{\underline{N}} \in \mathcal{T}_{\text{dev}}^{\text{S,*}}$ ne peut être une évolution possible pour le système, car il faudrait alors vérifier l'équation des bilans (8.52) en prenant $\underline{\underline{d}}^{\text{P}} = \underline{\underline{N}}$, ce qui est incompatible avec (8.55). Ainsi aucun tenseur symétrique déviatorique non nul ne peut être une évolution possible. Il en résulte que la seule évolution possible, depuis un état, dont la contrainte $\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}}$ est dans l'intérieur du domaine K , est bien $\underline{\underline{d}}^{\text{P}} = \mathbf{0}$. Cette constatation donne au convexe K son statut de domaine d'élasticité.

8.6.2 Frontière du domaine d'élasticité

Par ailleurs, considérons un état du système tel que la contrainte $\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}}$ soit sur la frontière du convexe K , soit $\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}} \in \partial K$. Ainsi il existe un unique tenseur $\underline{\underline{N}}_0 \in \mathcal{T}_{\text{dev}}^{\text{S,*}}$ unitaire (i.e., de norme égale à 1) tel que la contrainte $\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}}$ soit dans l'hyper-plan tangent de normale sortante $\underline{\underline{N}}_0$. Évidemment, tout tenseur du type $\alpha \underline{\underline{N}}_0$ (avec $\alpha > 0$) est aussi une normale sortante pour l'hyper-plan tangent. Nous pouvons résumer cela par la formulation suivante :

$$\exists! \underline{\underline{N}}_0 \in \mathcal{T}_{\text{dev}}^{\text{S,*}}, \forall \alpha > 0, \left(\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}} - \underline{\underline{X}}^{\text{S,dev}} \right) : \left(\alpha \underline{\underline{N}}_0 \right) - \Pi \left(\alpha \underline{\underline{N}}_0 \right) = 0 \quad (8.56)$$

Il est toujours possible de considérer une évolution telle que $\underline{\underline{d}}^{\text{P}} = \mathbf{0}$, car l'équation des bilans (8.52) est bien vérifiée dans ce cas, qui correspond bien entendu à une décharge élastique du matériau. Supposons maintenant qu'il existe une évolution possible $\underline{\underline{d}}^{\text{P}} \neq \mathbf{0}$, à partir d'un état pour lequel la contrainte $\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}} \in \partial K$. Nous devons vérifier l'équation des bilans (8.52), ce qui implique par unicité dans (8.56) que :

$$\exists \lambda > 0, \underline{\underline{d}}^{\text{P}} = \lambda \underline{\underline{N}}_0 \quad (8.57)$$

Nous venons de démontrer, qu'avec les hypothèses thermodynamiques et les variables d'état que nous avons choisies à la section 8.5, nous avons créé un matériau standard (ou encore un critère associé), c'est-à-dire que l'écoulement plastique $\underline{\underline{d}}^{\text{P}}$ se fait de manière colinéaire à la normale du domaine d'élasticité au point de contrainte considéré.

Comme nous l'avons dit plus haut, l'équation des bilans (8.52) interdit à l'état de contrainte de sortir du domaine K . En effet, nous venons de montrer que pour plastifier, à chaque instant l'état de contrainte $\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}}$ se situe sur un hyper-plan tangent de normale $\underline{\underline{d}}^{\text{P}}$, donc cet état de contrainte ne peut qu'évoluer sur les hyper-plans tangents successifs,

si l'on continue à plastifier. Du point de vue géométrique, on se convainc facilement que cela ne permet que de circuler sur la frontière du domaine sans pouvoir en sortir.

Bien sûr comme nous l'avons dit, des états de contraintes en dehors du domaine d'élasticité initial sont accessibles, car ce dernier peut évoluer pendant la phase plastique, c'est l'écrouissage. Comme nous l'avons dit plus haut, cela se traduit par le fait que le centre du domaine $\underline{\underline{X}}^{S,\text{dev}}$ et la fonction d'appui $\Pi(\underline{\underline{d}}^p)$ dépendent de l'état du système. Une évolution du centre du domaine est appelé écrouissage cinématique et une évolution de la fonction d'appui est appelé écrouissage isotrope. En résumé, l'état de contrainte ne peut pas sortir du domaine, mais le domaine peut évoluer pendant l'écoulement plastique.

8.6.3 Critère en contrainte

Le domaine d'élasticité K introduit à la section précédente est défini par son centre et sa fonction d'appui. Mais il commode de le définir de manière directe grâce à une fonction implicite $f_K(\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{S,\text{dev}}) \leq 0$. Pour cela il convient d'écrire que l'ensemble des contraintes $\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{S,\text{dev}}$ formant la frontière ∂K du domaine d'élasticité, s'obtient comme l'enveloppe des hyper-plans tangents suivants :

$$\forall \underline{\underline{N}} \in \mathcal{F}_{\text{dev}}^{S,*}, \left(\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{S,\text{dev}} - \underline{\underline{X}}^{S,\text{dev}} \right) : \underline{\underline{N}} - \Pi(\underline{\underline{N}}) = 0 \quad (8.58)$$

Par ailleurs, comme nous l'avons évoqué à la section 8.1 consacrée aux rappels sur les convexes, pour déterminer les points de tangence avec le convexe, c'est-à-dire déterminer les points $\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{S,\text{dev}}$ formant la frontière ∂K , il convient de dériver cette expression par rapport à $\underline{\underline{N}}$, soit :

$$\left(\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{S,\text{dev}} - \underline{\underline{X}}^{S,\text{dev}} \right) - \frac{d\Pi}{d\underline{\underline{N}}} = 0 \quad (8.59)$$

Cette dérivation est licite dans la mesure où l'on balaie tous les tenseurs $\underline{\underline{N}} \in \mathcal{F}_{\text{dev}}^{S,*}$ pour construire l'enveloppe des hyper-plans tangents. En réinjectant la définition de la fonction d'appui (8.51) et celle du taux de déformation plastique cumulé (8.35), on obtient :

$$\begin{cases} \left(\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{S,\text{dev}} - \underline{\underline{X}}^{S,\text{dev}} \right) : \underline{\underline{N}} - k(p_{\text{cum}}) \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{N}}} = 0 \\ \left(\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{S,\text{dev}} - \underline{\underline{X}}^{S,\text{dev}} \right) - k(p_{\text{cum}}) \frac{\underline{\underline{N}}}{\sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{N}}}} = 0 \end{cases} \quad (8.60)$$

Ce système d'équation traduit le fait que les points de la frontière appartiennent aux hyper-plans tangents de normale $\underline{\underline{N}}$ et au domaine K , il s'agit des points de tangence avec le domaine. En éliminant $\underline{\underline{N}}$ entre les deux équations de (8.60) on obtient une relation en contrainte :

$$\sqrt{\frac{3}{2} \left(\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{S,\text{dev}} - \underline{\underline{X}}^{S,\text{dev}} \right) : \left(\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{S,\text{dev}} - \underline{\underline{X}}^{S,\text{dev}} \right)} = k(p_{\text{cum}}) \quad (8.61)$$

Cette relation permet de déterminer les états de contrainte $\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{S,\text{dev}}$ qui composent la frontière ∂K du domaine d'élasticité (sans référence aux normales des hyper-plans tangents),

ce que détermine la fonction implicite f_K du domaine d'élasticité et correspond à un critère de von Mises. On a donc :

$$f_K(\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}}) = \sqrt{\frac{3}{2}(\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}} - \underline{\underline{X}}^{\text{S,dev}}) : (\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}} - \underline{\underline{X}}^{\text{S,dev}})} - k(p_{\text{cum}}) \quad (8.62)$$

Bien entendu, le choix des variables d'état et les hypothèses thermodynamiques que nous avons faites à la section 8.5 sont liées au fait que l'on obtient un domaine d'élasticité de von Mises. D'autres choix auraient conduit à d'autres types de critères, comme le critère de Tresca par exemple.

8.6.4 Loi d'écoulement

Nous nous intéressons dans cette section à un état de contrainte $\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}}$ particulier sur la frontière ∂K du domaine d'élasticité, et à une évolution $\underline{\underline{d}}^{\text{p}} \neq \mathbf{0}$. Nous avons vu grâce à l'analyse thermodynamique du processus de déformation que l'écoulement plastique est associé et suit la loi (8.57) où $\underline{\underline{N}}_0$ est la normale sortante au domaine en $\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}}$. Nous cherchons ici à expliciter la valeur de λ en fonction des grandeurs mécaniques déjà introduites. On a, d'après la définition du taux de déformation plastique cumulé (8.35) et de l'écoulement plastique associé (8.57) :

$$\lambda = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}\underline{\underline{N}}_0 : \underline{\underline{N}}_0}}{\dot{p}_{\text{cum}}} \quad (8.63)$$

Nous pouvons ainsi déduire une loi d'écoulement du type (8.57), qui ne porte que sur les grandeurs mécaniques que nous avons introduite. Pour l'état $\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}} \in \partial K$ particulier que nous avons choisi, la relation (8.56) reste valable pour $\underline{\underline{N}} = \lambda \underline{\underline{N}}_0 = \underline{\underline{d}}^{\text{p}}$, on a donc :

$$\begin{cases} \left(\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}} - \underline{\underline{X}}^{\text{S,dev}} \right) : \underline{\underline{d}}^{\text{p}} - k(p_{\text{cum}}) \sqrt{\frac{2}{3}\underline{\underline{d}}^{\text{p}} : \underline{\underline{d}}^{\text{p}}} = 0 \\ \left(\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}} - \underline{\underline{X}}^{\text{S,dev}} \right) - k(p_{\text{cum}}) \frac{\underline{\underline{d}}^{\text{p}}}{\sqrt{\frac{2}{3}\underline{\underline{d}}^{\text{p}} : \underline{\underline{d}}^{\text{p}}}} = 0 \end{cases} \quad (8.64)$$

On en déduit la loi d'écoulement suivante :

$$\underline{\underline{d}}^{\text{p}} = \frac{3}{2} \frac{\dot{p}_{\text{cum}}}{k(p_{\text{cum}})} \left(\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}} - \underline{\underline{X}}^{\text{S,dev}} \right) \quad (8.65)$$

On peut noter que cette loi d'écoulement est également vraie pour $\underline{\underline{d}}^{\text{p}} = \mathbf{0}$ car dans ce cas $\dot{p}_{\text{cum}} = 0$.

Résumé

- Configuration relâchée
- Décomposition multiplicative du gradient $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{P}}$
- Choix des variables d'état : $\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{P}}, p_{\text{cum}}$
- Hypothèse thermodynamique : $\Psi(\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{P}}, p_{\text{cum}}) = \Psi_{\text{dis}}(\underline{\underline{e}}_{\text{rel}}) + \Psi_{\text{blo}}(\underline{\underline{P}})$
- Hypothèse thermodynamique : $D(\dot{p}_{\text{cum}}) = k(p_{\text{cum}}) \dot{p}_{\text{cum}} / \rho_{\text{rel}}$
- Deux concepts de contrainte dans la configuration relâchée :

$$\frac{\underline{\underline{\Pi}}_{\text{rel}}}{\rho_{\text{rel}}} = \left(\underline{\underline{E}}^{-1} \cdot \frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t)}{\rho(\underline{\underline{x}}, t)} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1} \right) \left| \frac{\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}}{\rho_{\text{rel}}} = \underline{\underline{E}}^{-1} \cdot \frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t)}{\rho(\underline{\underline{x}}, t)} \cdot \underline{\underline{E}} \right. \quad (8.66)$$

- Analyse thermodynamique :

$$\frac{\underline{\underline{\Pi}}_{\text{rel}}}{\rho_{\text{rel}}} = \frac{\partial \Psi_{\text{dis}}}{\partial \underline{\underline{e}}_{\text{rel}}} \left| \frac{\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^A}{\underline{\underline{\rho}}_{\text{rel}}} = \underline{\underline{X}}^A \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{X}} = \rho_{\text{rel}} \underline{\underline{P}} \cdot \frac{\partial \Psi_{\text{blo}}}{\partial \underline{\underline{P}}} \right. \quad (8.67)$$

- Critère de plasticité

$$\sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}}}{\underline{\underline{\rho}}_{\text{rel}}} - \underline{\underline{X}}^{\text{S,dev}} \right) : \left(\frac{\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}}}{\underline{\underline{\rho}}_{\text{rel}}} - \underline{\underline{X}}^{\text{S,dev}} \right)} = k(p_{\text{cum}}) \quad (8.68)$$

- Loi d'écoulement plastique ($\dot{p}_{\text{cum}} = \sqrt{2/3} \underline{\underline{d}}^{\text{p}} : \underline{\underline{d}}^{\text{p}}$)

$$\underline{\underline{d}}^{\text{p}} = \frac{3}{2} \frac{\dot{p}_{\text{cum}}}{k(p_{\text{cum}})} \left(\frac{\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}}^{\text{S,dev}}}{\underline{\underline{\rho}}_{\text{rel}}} - \underline{\underline{X}}^{\text{S,dev}} \right) \quad (8.69)$$

8.7 Isotropie (élasticité et écrouissage) et Néo-Hookéen

Dans cette section nous allons dériver un comportement élasto-plastique en grande transformation isotrope. Cette isotropie porte non seulement sur le tenseur de raideur, qui ne dépend alors que de deux coefficients (e.g., le coefficient d'incompressibilité k_0 et le module de cisaillement μ_0), mais aussi sur l'écrouissage du matériau en supposant que l'écrouissage cinématique est négligeable (il ne reste donc que l'écrouissage isotrope). Ainsi, en considérant (8.37) on a :

$$\Psi(\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{P}}) = \Psi_{\text{dis}}(\underline{\underline{e}}_{\text{rel}}) \quad (8.70)$$

En effet, le terme d'énergie bloquée $\Psi_{\text{blo}}(\underline{\underline{P}})$ correspond à l'écrouissage cinématique. L'hypothèse d'isotropie de l'écrouissage revient donc à négliger les effets de cette énergie bloquée dans la microstructure.

Par ailleurs comme nous l'avons vu au chapitre 5, l'isotropie du tenseur de raideur permet d'écrire l'énergie libre massique de distorsion Ψ_{dis} comme une fonction des in-

variants du tenseur de Cauchy entre la configuration relâchée et actuelle $\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}$. On pose alors comme au chapitre 4 la partie isochore :

$$\underline{\underline{E}} = J^{-\frac{1}{3}} \underline{\underline{E}} \quad (8.71)$$

Nous avons bien $\det(\underline{\underline{E}}) = 1$. On pose donc les invariants $J = \det(\underline{\underline{E}})$ et $\bar{I}_1 = \text{tr}(\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}})$. Nous n'introduisons pas le second invariants \bar{I}_2 car dans la suite de cette présentation nous ferons l'hypothèse d'un modèle Noé-Hookéen pour la partie élastique du comportement, qui ne dépend que de J et \bar{I}_1 , car les déformations élastiques sont suffisamment faibles dans les métaux. On a donc :

$$\Psi_{\text{dis}}(\underline{\underline{e}}_{\text{rel}}) = \frac{1}{2\rho_{\text{rel}}} \left(\mu_0 (\bar{I}_1 - 3) + k_0 (J - 1)^2 \right) \quad (8.72)$$

On avait déjà établi au chapitre 4 qu'en cas d'isotropie on a :

$$\dot{\Psi}_{\text{dis}}(\underline{\underline{e}}_{\text{rel}}) = 2 \underbrace{\frac{\partial \Psi_{\text{dis}}}{\partial \bar{I}_1}}_{\frac{\mu_0}{\rho_{\text{rel}}}} (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}) : \text{dev}(\underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1}) + \underbrace{\frac{\partial \Psi_{\text{dis}}}{\partial J}}_{\frac{k_0(J-1)}{\rho_{\text{rel}}}} J \text{tr}(\underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1}) \quad (8.73)$$

En reprenant l'équation des bilans (8.42) on obtient donc :

$$\frac{\underline{\underline{\sigma}}}{\rho} : (\underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1}) + \frac{\Psi_{\text{rel}}}{\rho_{\text{rel}}} : (\underline{\underline{\dot{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}) - \frac{\mu_0}{\rho_{\text{rel}}} (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}) : \text{dev}(\underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1}) - \frac{k_0(J-1)}{\rho_{\text{rel}}} J \text{tr}(\underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1}) - \frac{k(p_{\text{cum}}) \dot{p}_{\text{cum}}}{\rho_{\text{rel}}} = 0 \quad (8.74)$$

Cette relation doit être vérifiée pour n'importe quel état et n'importe quelle évolution à partir de cet état. Dans la suite on ne va s'intéresser qu'aux décharges telles que $\underline{\underline{\dot{P}}} = \mathbf{0}$, car on cherche à donner une relation entre $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{E}}$. Ce qui a été établi pour la partie plastique dans les sections précédentes reste évidemment valable, à savoir l'écriture du critère de von Mises et la loi d'écoulement.

Puisque l'on sait que la variation de volume est élastique, il est toujours possible à partir d'un état donnée, de considérer une évolution de pure variation de volume élastique, c'est-à-dire telle que $\underline{\underline{\dot{P}}} = \mathbf{0}$ ce qui implique \dot{p}_{cum} et $\text{dev}(\underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1}) = \mathbf{0}$ et $\text{tr}(\underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1}) \neq 0$.

On décompose le tenseur de contrainte de Cauchy en partie isotrope et partie déviatorique $\underline{\underline{s}}$:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})}{3} \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{s}} \quad (8.75)$$

De même on décompose le tenseur $\underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1}$:

$$\underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1} = \frac{\text{tr}(\underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1})}{3} \underline{\underline{1}} + \text{dev}(\underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1}) \quad (8.76)$$

On obtient donc pour cette évolution possible (en se rappelant que les tenseurs déviatoriques et isotropes sont orthogonaux vis-à-vis de la double contraction) :

$$\left(\frac{\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})}{3\rho} - \frac{k_0(J-1)}{\rho_{\text{rel}}} J \right) \underbrace{\text{tr}(\underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1})}_{\neq 0} = 0 \quad (8.77)$$

Ainsi en notant se rappelant que $J = \rho_{\text{rel}}/\rho$ on obtient :

$$\frac{\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})}{3} = k_0(J - 1) \quad (8.78)$$

L'équation des bilans (8.74) devient donc :

$$\left(\frac{\underline{\underline{s}}}{\rho} - \frac{\mu_0}{\rho_{\text{rel}}} \text{dev}(\underline{\underline{E}} \cdot^\top \underline{\underline{E}}) \right) : \text{dev}(\underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1}) + \frac{\Psi_{\text{rel}}}{\rho_{\text{rel}}} : (\underline{\underline{\dot{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}) - \frac{k(p_{\text{cum}}) \dot{p}_{\text{cum}}}{\rho_{\text{rel}}} = 0 \quad (8.79)$$

Comme précédemment il est toujours possible quelque soit l'état de considérer une décharge, c'est-à-dire une évolution telle que $\underline{\underline{\dot{P}}} = \mathbf{0}$ ce qui implique $\dot{p}_{\text{cum}} = 0$. Ainsi dans ce cas, l'équation des bilans (8.79) devient :

$$\left(\frac{\underline{\underline{s}}}{\rho} - \frac{\mu_0}{\rho_{\text{rel}}} \text{dev}(\underline{\underline{E}} \cdot^\top \underline{\underline{E}}) \right) : \text{dev}(\underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1}) = 0 \quad (8.80)$$

Cette dernière relation implique que le tenseur $\left(\underline{\underline{s}}/\rho - (\mu_0/\rho_{\text{rel}}) \text{dev}(\underline{\underline{E}} \cdot^\top \underline{\underline{E}}) \right)$ est isotrope, or comme ce tenseur est déviateur il vient que :

$$\underline{\underline{s}} = \frac{\mu_0}{J} \text{dev}(\underline{\underline{E}} \cdot^\top \underline{\underline{E}}) \quad (8.81)$$

En combinant la partie isotrope (8.78) et déviateur (8.81) du tenseur de contrainte de Cauchy et en appliquant la définition (8.71) on obtient la relation :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\mu_0}{J^{\frac{5}{3}}} \underline{\underline{E}} \cdot^\top \underline{\underline{E}} + \left(k_0(J - 1) - \frac{\mu_0}{J^{\frac{5}{3}}} \frac{\text{tr}(\underline{\underline{E}} \cdot^\top \underline{\underline{E}})}{3} \right) \underline{\underline{1}} \quad (8.82)$$

Ainsi, en reprenant la définition de la contrainte plastique (8.32) et en se rappelant du fait que $\underline{\underline{E}}$ est choisi symétrique (i.e., ${}^\top \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}$) on a :

$$\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}} = J \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\mu_0}{J^{\frac{2}{3}}} \underline{\underline{E}} \cdot^\top \underline{\underline{E}} + \left(k_0 J(J - 1) - \frac{\mu_0}{J^{\frac{2}{3}}} \frac{\text{tr}(\underline{\underline{E}} \cdot^\top \underline{\underline{E}})}{3} \right) \underline{\underline{1}} \quad (8.83)$$

Résumé

- Isotropie de l'écoulement : $\Psi_{\text{blo}}(\underline{P}) \approx 0 \Rightarrow \underline{X} \approx 0$
- Isotropie du tenseur de raideur :

$$\underline{\underline{\Psi}}_{\text{rel}} = \frac{\mu_0}{J^{\frac{2}{3}}} \underline{\underline{E}} \cdot^{\top} \underline{\underline{E}} + \left(k_0 J (J - 1) - \frac{\mu_0}{J^{\frac{2}{3}}} \frac{\text{tr}(\underline{\underline{E}} \cdot^{\top} \underline{\underline{E}})}{3} \right) \underline{\underline{1}} \quad (8.84)$$

- Critère de plasticité

$$\sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{\Psi}}_{\text{S,dev}} : \underline{\underline{\Psi}}_{\text{S,dev}}} = k(p_{\text{cum}}) \quad (8.85)$$

- Loi d'écoulement plastique ($\dot{p}_{\text{cum}} = \sqrt{2/3} \underline{\underline{d}}^{\text{p}} : \underline{\underline{d}}^{\text{p}}$)

$$\underline{\underline{d}}^{\text{p}} = \frac{3}{2} \frac{\dot{p}_{\text{cum}}}{k(p_{\text{cum}})} \underline{\underline{\Psi}}_{\text{S,dev}} \quad (8.86)$$

Chapitre 9

Contraintes résiduelles

Chapitre 10

Microstructures et transitions de phase