Gonflement dôun ballon sphérique à paroi épaisse constituée dôun matériau élastoplastique de Von Mises, totalement isotrope (Elasticité et écrouissage)

Introduction

Cet exercice a pour objectif de vous faire utiliser les équations de lôélastoplasticité classique en grandes transformations, dans le cas dôune structure très simple, afin que vous ayez une meilleure vision de lôarticulation des différentes équations.
Pour cela nous considérons un ballon sphérique à paroi épaisse.
Nous nous intéressons aux évolutions isothermes.
On verra que, pour cette structure, deux champs scalaires principaux, fonctions de la seule variable scalaire R, vont sôimposer comme inconnues principales.
Lôobjectif de lôexercice sera dôétablir deux équations, la première différentielle, la seconde algébrique, portant sur ce couple de champs scalaires.
Nous nôessaierons pas de résoudre ces équations fortement non linéaires.
Bien sûr, la structure comprendra une zone « extérieure » en évolution élastique et une zone « intérieure » en évolution plastique. La frontière entre ces deux zones est donnée par un rayon R^p qui évoluera avec le chargement.
Le couple dôéquations sera bien sûr différent dans ces deux zones.
Nous verrons que lôéquation différentielle dans chacune des zones est du deuxième degré. Il nous faudra donc préciser les conditions aux limites ou dôinterface entre les deux zones qui permettront de déterminer 2 « constantes dôintégration » par zone. Il nous faudra déterminer aussi le « rayon plastique » R^p. Nous aurons donc besoin, outre les systèmes dôéquations ci-dessus, de 5 équations complémentaires issues des conditions aux limites du problème et des conditions dôinterface.
Ci-dessous je rappelle tout dôabord les équations écrites en cours pour le comportement classique élastoplastique en grandes transformations. A vous de les écrire dans lôhypothèse de symétrie sphérique de la solution.
Je précise ensuite la géométrie de la structure, puis je présente le chargement.
On passe ensuite aux questions avec comme premier objectif de vous faire réaliser que dans ce problème seuls deux champs scalaires, fonctions dôune seule variable dôespace, sont à déterminer.
Je vous tiens un peu la main pour que tout le monde ait les mêmes notations.
Bon courage.

Comportement

Le matériau constitutif du ballon est élastoplastique de Von Mises, totalement isotrope (Elasticité et écrouissage). Rappelons les équations établies dans le cours
La position $\underline{x}$ de la particule $\underline{X}$ à lôinstant t est donnée par la transformation $\underline{x} = \underline{\Phi}\left(\underline{X},t\right)$.
Avec les notations habituelles du cours, nous notons le gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}\left(\underline{X},t\right) = \underline{\underline{Grad}}\left(\underline{\Phi}\left(\underline{X},t\right)\right)$
On a la décomposition multiplicative du gradient de la transformation en une partie plastique et une partie élastique : $\underline{\underline{F}}\left(\underline{X},t\right) = \underline{\underline{E}}\left(\underline{X},t\right) \bullet \underline{\underline{P}}\left(\underline{X},t\right)$; ($\underline{\underline{E}}\left(\underline{X},t\right)$ symétrique)
Lôévolution plastique se fait sans variation de volume : $J = \det\left(\underline{\underline{F}}\right) = \det\left(\underline{\underline{E}}\right)$; $\det\left(\underline{\underline{P}}\right) = 1$ donc $tr\left(\dot{\underline{\underline{P}}}.\underline{\underline{P}}^{-1}\right) = 0$.
La partie élastique du comportement est donnée par la densité massique dôénergie libre
$\Psi\left(\underline{\underline{E}}\right) = \dfrac{1}{2\rho_{\mathrm{Re}l}}\left(\mu_0\left(\overline{I}_1 - 3\right) + k_0\left(J-1\right)^2\right)$ où $\overline{I}_1 = tr\left({}^t\overline{\underline{\underline{E}}}.\overline{\underline{\underline{E}}}\right)$ avec $\overline{\underline{\underline{E}}} = J^{-\frac{1}{3}}\underline{\underline{E}}$.
La partie plastique du comportement est donnée par la puissance massique dissipée dans une évolution plastique $D = \dfrac{k\left(p_{cum}\right)\dot{p}_{cum}}{\rho_{\mathrm{Re}l}}$ où $\dot{p}_{cum} = \sqrt{\dfrac{2}{3}\underline{\underline{d}}^p : \underline{\underline{d}}^p}$ est le taux de déformation plastique

cumulée, avec $\underline{\underline{d}}^p = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\dot{P}}}.\underline{\underline{P}}^{-1} + {}^t\underline{\underline{P}}^{-1}.{}^t\underline{\underline{\dot{P}}}\right)$ et ρ_{Rel} est la masse volumique dans la configuration relâchée (égale à la masse volumique initiale car $\det\left(\underline{\underline{P}}\right)=1$)

Nous avons vu en cours que l'équation des bilans thermodynamiques **valable pour toutes les évolutions possibles** permet alors d'établir les équations du comportement suivantes :

Cas particulier du comportement isotrope(élasticité et écrouissage)

$$\boxed{\underline{\underline{F}}\left(\underline{X},t\right)=\underline{\underline{E}}\left(\underline{X},t\right)\bullet\underline{\underline{P}}\left(\underline{X},t\right)} \qquad J=\det\left(\underline{\underline{F}}\right)=\det\left(\underline{\underline{E}}\right) \qquad \det\left(\underline{\underline{P}}\right)=1$$

$$tr\left(\underline{\underline{\dot{P}}}.\underline{\underline{P}}^{-1}\right)=0 \qquad \underline{\underline{d}}^p=\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\dot{P}}}.\underline{\underline{P}}^{-1}+{}^t\underline{\underline{P}}^{-1}.{}^t\underline{\underline{\dot{P}}}\right) \qquad \boxed{p_{cum}=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\frac{2}{3}\underline{\underline{d}}^p:\underline{\underline{d}}^p}\,dt}$$

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}}=\frac{\mu_0}{J^{\frac{5}{3}}}\underline{\underline{E}}.{}^t\underline{\underline{E}}+\left(k_0\left(J-1\right)-\frac{\mu_0}{J^{\frac{5}{3}}}\frac{tr\left(\underline{\underline{E}}.{}^t\underline{\underline{E}}\right)}{3}\right)\underline{\underline{I}}} \qquad \underline{\underline{\psi}}_{\mathrm{Rel}}=J\underline{\underline{\sigma}}$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{3}{2}\underline{\underline{\psi}}^{d,s}_{\mathrm{Rel}}:\underline{\underline{\psi}}^{d,s}_{\mathrm{Rel}}}\leq k\left(p_{cum}\right)} \qquad \boxed{\underline{\underline{d}}^p=\frac{3}{2}\frac{\dot{p}_{cum}}{k\left(p_{cum}\right)}\underline{\underline{\psi}}^{d,s}_{\mathrm{Rel}}}$$

$\dot{p}_{cum}=0$ en cas d'évolution élastique

Le comportement est donc donné par $\mu_0, k_0, k\left(p_{cum}\right)$

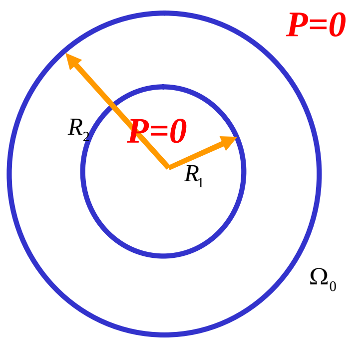
2015-2016
Séance 9 7/12/2015

MPM
Alain Ehrlacher

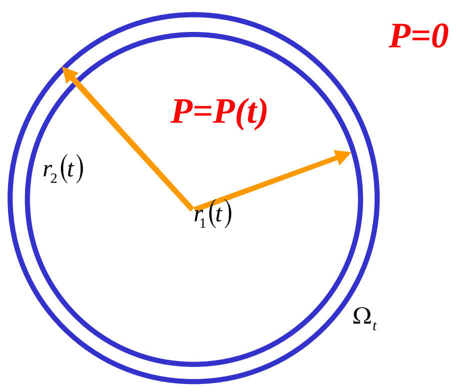
63/79

Géométrie et conditions initiales

Notons R_1 le rayon intérieur et R_2 le rayon extérieur dans la configuration de référence.
La configuration de référence est un état naturel (contraintes initiales nulles).
Le champ $\underline{\underline{P}}\left(\underline{X},t=0\right)=\underline{\underline{I}}$
Notons $r_1(t)$ le rayon intérieur et $r_2(t)$ le rayon extérieur dans la configuration actuelle.



Configuration de référence



Configuration actuelle

Chargement

La pression extérieure reste nulle.
La pression intérieure évolue de manière croissante et est égale à $Q(t)$ à l'instant t.
(On note $Q(t)$ la pression pour garder la liberté d'utiliser $P(R,t)$ comme variable de plasticité, voir plus loin)

Question 1 :

Nous recherchons les solutions du problème dꞌévolution à symétrie sphérique.

Ainsi en notant $\underline{X} = R\underline{e}_r(\theta,\varphi)$ on cherche $\underline{\Phi}(\underline{X},t)$ sous la forme $\underline{\Phi}(\underline{X},t) = \Phi_r(R,t)\underline{e}_r(\theta,\varphi)$.

Seul le champ scalaire $\Phi_r(R,t)$ intervient donc

On rappelle que, en coordonnées sphériques :

$$\underline{\underline{Grad}}(\underline{\Phi}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Phi_r}{\partial R} & \dfrac{1}{R}\left[\dfrac{\partial \Phi_r}{\partial \varphi} - \Phi_\varphi\right] & \dfrac{1}{R}\left[\dfrac{1}{\sin\varphi}\dfrac{\partial \Phi_r}{\partial \theta} - \Phi_\theta\right] \\ \dfrac{\partial \Phi_\varphi}{\partial R} & \dfrac{1}{R}\left[\dfrac{\partial \Phi_\varphi}{\partial \varphi} + \Phi_r\right] & \dfrac{1}{R}\left[\dfrac{1}{\sin\varphi}\dfrac{\partial \Phi_\varphi}{\partial \theta} - \Phi_\theta \cot\varphi\right] \\ \dfrac{\partial \Phi_\theta}{\partial R} & \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial \Phi_\theta}{\partial \varphi} & \dfrac{1}{R}\left[\dfrac{1}{\sin\varphi}\dfrac{\partial \Phi_\theta}{\partial \theta} + \Phi_\varphi \cot\varphi + \Phi_r\right] \end{bmatrix}$$

Donnez la matrice des composantes du tenseur gradient de la transformation dans la base $\left(\underline{e}_r(\theta,\varphi), \underline{e}_\theta(\theta,\varphi), \underline{e}_\varphi(\theta,\varphi)\right)$, puis lꞌexpression de $J = \det\left(\underline{\underline{F}}\right)$ en fonction des champs scalaires $\Phi_r(R,t)$ et $\dfrac{\partial \Phi_r}{\partial R}(R,t)$ (et de R)

Réponse 1

En tenant compte de la symétrie sphérique (champs ne dépendant que de R, $\Phi_\theta = \Phi_\varphi = 0$), il vient

$$\underline{\underline{F}}(R,t) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Phi_r}{\partial R}(R,t) & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\Phi_r(R,t)}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\Phi_r(R,t)}{R} \end{bmatrix} \quad ; \qquad J(R,t) = \frac{\partial \Phi_r}{\partial R}(R,t)\left(\frac{\Phi_r(R,t)}{R}\right)^2$$

Question 2 :
La symétrie sphérique implique que la matrice des composantes du tenseur de transformation plastique $\underline{\underline{P}}$ dans la base $\left(\underline{e}_r(\theta,\varphi),\underline{e}_\theta(\theta,\varphi),\underline{e}_\varphi(\theta,\varphi)\right)$ est un tenseur diagonal. Chacune des composantes ne dépend que de R. De plus $P_{\theta\theta}=P_{\varphi\varphi}$. Enfin $\det\left(\underline{\underline{P}}\right)=1$.
Ainsi on a la forme suivante pour la matrice des composantes du tenseur de transformation plastique dans la base $\left(\underline{e}_r(\theta,\varphi),\underline{e}_\theta(\theta,\varphi),\underline{e}_\varphi(\theta,\varphi)\right)$

$$\underline{\underline{P}}(R,t)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{P^2(R,t)} & 0 & 0 \\ 0 & P(R,t) & 0 \\ 0 & 0 & P(R,t) \end{bmatrix},$$

Seul le champ scalaire $P(R,t)$ intervient donc.
$\Phi_r(R,t)$ **et** $P(R,t)$ **seront les deux champs scalaires, inconnues principales, dans notre problème.**
Donnez la matrice des composantes du tenseur de transformation élastique $\underline{\underline{E}}$ dans la base $\left(\underline{e}_r(\theta,\varphi),\underline{e}_\theta(\theta,\varphi),\underline{e}_\varphi(\theta,\varphi)\right)$ en fonction des champs scalaires $\Phi_r(R,t)$, $\dfrac{\partial\Phi_r}{\partial R}(R,t)$ et $P(R,t)$ (et de R)

Réponse 2.
Nous savons que $\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)=\underline{\underline{E}}(\underline{X},t)\bullet\underline{\underline{P}}(\underline{X},t)$, donc $\underline{\underline{E}}(\underline{X},t)=\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)\bullet\underline{\underline{P}}^{-1}(\underline{X},t)$

$$\underline{\underline{E}}(R,t)=\begin{bmatrix} P^2(R,t)\dfrac{\partial\Phi_r}{\partial R}(R,t) & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\Phi_r(R,t)}{RP(R,t)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\Phi_r(R,t)}{RP(R,t)} \end{bmatrix}$$

Question 3 :

Nous avons vu en cours que pour ce comportement $\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\mu_0}{J^{\frac{5}{3}}} \underline{\underline{E}}.^t\underline{\underline{E}} + \left(k_0 \left(J-1 \right) - \frac{\mu_0}{J^{\frac{5}{3}}} \frac{tr\left(\underline{\underline{E}}.^t\underline{\underline{E}} \right)}{3} \right) \underline{\underline{I}}$.

Le tenseur de contrainte de Cauchy est donc diagonal dans la base $\left(\underline{e}_r\left(\theta,\varphi\right), \underline{e}_\theta\left(\theta,\varphi\right), \underline{e}_\varphi\left(\theta,\varphi\right) \right)$ De plus les composantes ne dépendent que de R et $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$.

Donnez lœexpression des composantes $\sigma_{rr}\left(R,t\right)$ et $\sigma_{\theta\theta}\left(R,t\right)$ en fonction des champs scalaires $\Phi_r\left(R,t\right)$, $\frac{\partial \Phi_r}{\partial R}\left(R,t\right)$ et $P\left(R,t\right)$ (et de R)

Pour alléger lœcriture ne faites pas apparaitre la dépendance en R et t des champs. Elle sera sous entendue.

Vérifiez vos calculs à lœaide de lœexpression de $\sigma_{rr}\left(R,t\right) + 2\sigma_{\theta\theta}\left(R,t\right)$ et de $\sigma_{rr}\left(R,t\right) - \sigma_{\theta\theta}\left(R,t\right)$

Réponse 3)

$$\sigma_{rr}\left(R,t\right) = k_0 \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial R} \left(\frac{\Phi_r}{R} \right)^2 - 1 \right) + \frac{2\mu_0}{3\left[\frac{\partial \Phi_r}{\partial R} \left(\frac{\Phi_r}{R} \right)^2 \right]^{\frac{5}{3}}} \left(\left(P^2 \frac{\partial \Phi_r}{\partial R} \right)^2 - \left(\frac{\Phi_r}{RP} \right)^2 \right)$$

$$\sigma_{\theta\theta}\left(R,t\right) = k_0 \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial R} \left(\frac{\Phi_r}{R} \right)^2 - 1 \right) - \frac{\mu_0}{3\left[\frac{\partial \Phi_r}{\partial R} \left(\frac{\Phi_r}{R} \right)^2 \right]^{\frac{5}{3}}} \left(\left(P^2 \frac{\partial \Phi_r}{\partial R} \right)^2 - \left(\frac{\Phi_r}{RP} \right)^2 \right)$$

$\sigma_{rr}\left(R,t\right) + 2\sigma_{\theta\theta}\left(R,t\right) = 3\left[k_0 \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial R} \left(\frac{\Phi_r}{R} \right)^2 - 1 \right) \right]$ ne dépend que du module dœincompressibilité k_0

$\sigma_{rr}\left(R,t\right) - \sigma_{\theta\theta}\left(R,t\right) = \frac{\mu_0}{\left[\frac{\partial \Phi_r}{\partial R} \left(\frac{\Phi_r}{R} \right)^2 \right]^{\frac{5}{3}}} \left(\left(P^2 \frac{\partial \Phi_r}{\partial R} \right)^2 - \left(\frac{\Phi_r}{RP} \right)^2 \right)$ ne dépend que du module de cisaillement μ_0

Question 4:

On rappelle qu’en coordonnées sphériques

$$\underline{div\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)} = \left[\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{r\varphi}\cot\varphi}{r}\right]\underline{e}_r$$

$$+\left[\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{\left(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta}\right)\cot\varphi + 3\sigma_{r\varphi}}{r}\right]\underline{e}_\varphi$$

$$+\left[\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{3\sigma_{r\theta} + 2\sigma_{\varphi\theta}\cot\varphi}{r}\right]\underline{e}_\theta$$

Que devient cette équation si l’on fait l’hypothèse de symétrie sphérique ?

Réponse 4)

$$\underline{div\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)} = \left[\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + 2\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r}\right]\underline{e}_r$$

Question 5:

A la question 3 on a donné des expressions de $\sigma_{rr}(R,t)$ et $\sigma_{\theta\theta}(R,t)$ (fonctions de R et non de r) à lâaide des champs scalaires $\Phi_r(R,t)$, $\frac{\partial \Phi_r}{\partial R}(R,t)$ et $P(R,t)$ (et de R)

Récrivez la seule équation scalaire dôéquilibre non triviale en remplaçant les dérivées par rapport à r par des dérivées par rapport à R (changement de variable). Remplacer aussi r par $\Phi_r(R,t)$

Inutile de remplacer $\sigma_{rr}(R,t)$ et $\sigma_{\theta\theta}(R,t)$ par leurs expressions trouvées dans la question 3.

Il suffit que vous ayez conscience que cette équation dôéquilibre est une équation différentielle du deuxième degré qui porte sur le couple de champs inconnus ($\Phi_r(R,t)$, $P(R,t)$).

Cette équation différentielle est valable dans les deux zones. La différence entre ces zones intervient donc uniquement au niveau de lôéquation algébrique qui complète le système dôéquations

Réponse 5)

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial R} \frac{1}{\frac{\partial \Phi_r}{\partial R}} + 2\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{\Phi_r} = 0$$

Ou si lôon préfère $\Phi_r \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial R} + 2\frac{\partial \Phi_r}{\partial R}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0$

Question 6:

Considérons maintenant la zone extérieure $R > R^p$ pour laquelle nous avons fait l'hypothèse que le comportement est élastique. Compte tenu du fait que en condition initiale $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{I}}$ et qu'il n'y a pas encore eu d'évolution plastique dans cette zone, quelle est l'équation algébrique très simple qui complète l'équation différentielle ci-dessus dans cette zone ?

En déduire l'équation différentielle qui ne porte que sur le champ $\Phi_r(R,t)$ dans cette zone.

Donnez-la sans chercher à la mettre dans une forme plus agréable. Ce n'est pas l'objet de cet exercice. Constatez seulement que c'est une équation différentielle du second degré fortement non linéaire qui ne porte que sur le champ inconnu $\Phi_r(R,t)$. Il nous faudra donc deux conditions aux limites sur les frontières de la zone élastique pour finir l'intégration dans cette zone. Remarquons cependant que nous ne connaissons pas la valeur de R^p qui dépend bien sûr du chargement $Q(t)$.

Notons que cette équation est valable dans toute la structure si le chargement n'a pas dépassé la valeur de première plastification ($R^p = R_1$). C'est aussi l'équation que nous aurions eu si nous avions voulu traiter le problème d'un ballon à paroi épaisse constituée d'un matériau hyperélastique compressible.

Réponse 6)

$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{I}}$

$$\Phi_r \frac{\partial}{\partial R}\left[k_0\left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial R}\left(\frac{\Phi_r}{R}\right)^2 - 1\right) + \frac{2\mu_0}{3\left[\frac{\partial \Phi_r}{\partial R}\left(\frac{\Phi_r}{R}\right)^2\right]^{\frac{5}{3}}}\left(\left(P^2\frac{\partial \Phi_r}{\partial R}\right)^2 - \left(\frac{\Phi_r}{RP}\right)^2\right)\right] +$$

$$2\frac{\partial \Phi_r}{\partial R}\left[\frac{\mu_0}{\left[\frac{\partial \Phi_r}{\partial R}\left(\frac{\Phi_r}{R}\right)^2\right]^{\frac{5}{3}}}\left(\left(P^2\frac{\partial \Phi_r}{\partial R}\right)^2 - \left(\frac{\Phi_r}{RP}\right)^2\right)\right] = 0$$

Question 7:
Intéressons nous maintenant à la zone intérieure $R < R^p$ dont nous avons fait lôhypothèse quôelle évolue de manière plastique.
Nous devons compléter lôéquation différentielle dans cette zone par une équation algébrique come je vous lôai dit plus haut.
Bien évidemment cette équation sera obtenue à lôaide du critère de plasticité sur la contrainte.
$\sqrt{\frac{3}{2}\underline{\underline{\psi}}^{d,s}_{\mathrm{Re}l}:\underline{\underline{\psi}}^{d,s}_{\mathrm{Re}l}} = k\left(p_{cum}\right)$ où, compte tenu de lôisotropie $\underline{\underline{\psi}}_{\mathrm{Re}l} = J\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\psi}}^{d,s}_{\mathrm{Re}l}$ est la partie déviatorique symétrique de $\underline{\underline{\psi}}_{\mathrm{Re}l}$.

On peut donc réécrire ce critère $\frac{3}{2}\underline{\underline{s}}:\underline{\underline{s}} = \frac{k^2\left(p_{cum}\right)}{J^2}$ avec $p_{cum} = \int_{t_0}^{t}\sqrt{\frac{2}{3}\underline{\underline{d}}^p:\underline{\underline{d}}^p}\,dt$ et $\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{tr\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)}{3}\underline{\underline{I}}$

Commencez par calculer $p_{cum}\left(R,t\right)$ en fonction de $P\left(R,t\right)$.

Déduisez ensuite lôéquation qui relie les champs $\Phi_r\left(R,t\right)$ et $P\left(R,t\right)$ dans la zone intérieure.

Réponse 7)

$$\underline{\underline{d}}^p = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\dot{P}}}.\underline{\underline{P}}^{-1} + {}^t\underline{\underline{P}}^{-1}.{}^t\underline{\underline{\dot{P}}}\right) \text{ donc } \underline{\underline{d}}^p = \begin{bmatrix} -2\frac{\dot{P}}{P} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{P}}{P} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{P}}{P} \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}\underline{\underline{d}}^p:\underline{\underline{d}}^p} = 2\left|\frac{\dot{P}}{P}\right|$$

Comme $\frac{\dot{P}}{P} \geq 0$, on a $p_{cum} = \int_{t_0}^{t}\sqrt{\frac{2}{3}\underline{\underline{d}}^p:\underline{\underline{d}}^p}\,dt = Log\left(P^2\right)$

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{tr\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)}{3}\underline{\underline{I}} = \left(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\right)\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Le critère $\frac{3}{2}\underline{\underline{s}}:\underline{\underline{s}} = \frac{k^2\left(p_{cum}\right)}{J^2}$ se réécrit $\left(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\right)^2 = \frac{k^2\left(Log\left(P^2\right)\right)}{J^2}$

Soit, en exprimant les composantes du tenseur de contrainte en fonction des deux champs inconnus principaux :

$$\sigma_{rr}\left(R,t\right) - \sigma_{\theta\theta}\left(R,t\right) = \frac{\mu_0}{\left[\frac{\partial\Phi_r}{\partial R}\left(\frac{\Phi_r}{R}\right)^2\right]^{\frac{5}{3}}}\left(\left(P^2\frac{\partial\Phi_r}{\partial R}\right)^2 - \left(\frac{\Phi_r}{RP}\right)^2\right)$$

$$J\left(R,t\right) = \frac{\partial\Phi_r}{\partial R}\left(R,t\right)\left(\frac{\Phi_r\left(R,t\right)}{R}\right)^2$$

$$\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial R}\left(\frac{\Phi_r\left(R,t\right)}{R}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\left(P^2\frac{\partial\Phi_r}{\partial R}\right)^2 - \left(\frac{\Phi_r}{RP}\right)^2\right)\right)^2 = \frac{1}{\mu_0^2}k^2\left(Log\left(P^2\right)\right)$$

<u>Question 8:</u>

Choisissons, comme dans le cours

$k\left(Log\left(P^2\right)\right)=\sigma_0\left(1+\alpha\left(P^2-1\right)\right)$

Montrez que lõéquation algébrique ci-dessus est un polynôme de degré 6 en P .

Réponse 8)

$$\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial R}\left(\frac{\Phi_r\left(R,t\right)}{R}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\left(P^2\frac{\partial\Phi_r}{\partial R}\right)^2-\left(\frac{\Phi_r}{RP}\right)^2\right)\right)^2=\left(\frac{\sigma_0}{\mu_0}\right)^2\left(1+\alpha\left(P^2-1\right)\right)^2$$

Soit encore

$$\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial R}\left(\frac{\Phi_r\left(R,t\right)}{R}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\left(P^3\frac{\partial\Phi_r}{\partial R}\right)^2-\left(\frac{\Phi_r}{R}\right)^2\right)\right)^2=\left(\frac{\sigma_0}{\mu_0}\right)^2P^2\left(1+\alpha\left(P^2-1\right)\right)^2$$

Commentaire

Attention, cet exercice pourrait donner lõillusion quõen général avec lõéquilibre et le critère on peut déterminer les champs dans la zone plastique.

Ceci est faux en général. Il faut y ajouter la loi dõécoulement plastique. Il se trouve que dans cet exercice la symétrie sphérique est tellement contraignante que la loi dõécoulement normal est automatiquement vérifiée, ce qui dispense de la considérer dans le traitement des équations.

De ce point de vue cet exercice est un peu faible pédagogiquement. Il est cependant difficile de mettre au point un exercice plus complet pédagogiquement sans entrer dans des complications dõexpressions au delà de ce que lõon considère comme « supportable » par des élèves en deuxième cycle.

<u>Question 9:</u>

Nous avons donc ci-dessus établi dans chaque zone un système différentiel du deuxième degré pour nos deux champs $\Phi_r(R,t)$ et $P(R,t)$ qui sont les inconnues principales de notre problème de calcul de structure.

Par ailleurs nous ne connaissons pas R^p

Il nous faut donc, en complément de ces systèmes dõéquations, 5 équations complémentaires tirées des conditions aux limites en R_1 et R_2 et des conditions dõinterface en R^p.

Donnez ces 5 équations sans forcément vous astreindre à les exprimer à lõaide des champs $\Phi_r(R,t)$ et $P(R,t)$.

(Par exemple CL en $R=R_2$ il suffit de dire que $\sigma_{rr}(R_2,t)=0$ sans revenir à lõexpression de σ_{rr} en fonction des champs $\Phi_r(R,t)$ et $P(R,t)$)

Réponse 9)

1 : CL en $R=R_1$ $\qquad \sigma_{rr}(R_1,t)=-Q(t)$

2 : CL en $R=R_2$ $\qquad \sigma_{rr}(R_2,t)=0$

3 : Continuité de la contrainte normale en $R=R^p$ $\qquad \sigma_{rr}(R^{p-},t)=\sigma_{rr}(R^{p+},t)$

où $\sigma_{rr}(R^{p-},t)$ est la valeur limite de σ_{rr} lorsque $R\to R^p$ par valeur inférieure et $\sigma_{rr}(R^{p+},t)$ est la valeur limite de σ_{rr} lorsque $R\to R^p$ par valeur supérieure.

4 : continuité de la transformation en $R=R^p$ $\qquad \Phi_r(R^{p+},t)=\Phi_r(R^{p-},t)$

5 : valeur du critère de plasticité à la frontière des deux zones dans la zone élastique

$$\left(\sigma_{rr}(R^{p+},t)-\sigma_{\theta\theta}(R^{p+},t)\right)^2=\frac{k^2(0)}{J(R^{p+},t)^2}$$

Cõest fini.