

## Modèle de Mohr-Coulomb

### Champs de contraintes à l'intérieur de la zone plastique

Pour  $R \leq r \leq R_p$  (zone plastique)

$$\text{Equation d'équilibre : } \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

$$\text{Critère de plasticité : } \sigma_\theta = K_p \sigma_r + \sigma_c$$

$$\text{Conditions aux limites : } \begin{cases} \text{Pour } r=R & \sigma_r|_{r=R} = (1-\lambda)\sigma^0 \\ \text{Pour } r=R_p & \sigma_r|_{r=R_p} = (1-\lambda_e)\sigma^0 \end{cases}$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - (K_p \sigma_r + \sigma_c)}{r} = 0$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + (1-K_p) \frac{\sigma_r}{r} = \frac{\sigma_c}{r}$$

$$\text{Solution : } \sigma_r = \frac{1}{1-K_p} \sigma_c + A r^{K_p-1}$$

$$\text{Pour } r=R \quad \sigma_r|_{r=R} = (1-\lambda)\sigma^0 = \frac{1}{1-K_p} \sigma_c + A R^{K_p-1}$$

$$\text{d'où : } A = \frac{1}{R^{K_p-1}} \left( (1-\lambda)\sigma^0 - \frac{1}{1-K_p} \sigma_c \right)$$

$$\sigma_r = \frac{\sigma_c}{K_p-1} \left[ \left( \frac{r}{R} \right)^{K_p-1} - 1 \right] + (1-\lambda)\sigma^0 \left( \frac{r}{R} \right)^{K_p-1}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_c}{K_p-1} \left[ K_p \left( \frac{r}{R} \right)^{K_p-1} - 1 \right] + K_p (1-\lambda)\sigma^0 \left( \frac{r}{R} \right)^{K_p-1}$$

Rayon de la zone plastique :

$$\text{Pour } r=R_p \quad \sigma_r|_{r=R_p} = (1-\lambda_e)\sigma^0 = \frac{\sigma_c}{K_p-1} \left[ \left( \frac{R_p}{R} \right)^{K_p-1} - 1 \right] + (1-\lambda)\sigma^0 \left( \frac{R_p}{R} \right)^{K_p-1}$$

$$\frac{R_p}{R} = \left[ \frac{2}{K_p+1} \frac{(K_p-1)\sigma^0 + \sigma_c}{(1-\lambda)(K_p-1)\sigma^0 + \sigma_c} \right]^{\frac{1}{K_p-1}}$$

## Champs de déplacement à l'intérieur de la zone plastique

$$\varepsilon_r = -\frac{\lambda_e \sigma^0}{2G} + \Delta\varepsilon_r ; \varepsilon_\theta = \frac{\lambda_e \sigma^0}{2G} + \Delta\varepsilon_\theta$$

$$\Delta\varepsilon_r = \Delta\varepsilon_r^e + \Delta\varepsilon_r^p ; \Delta\varepsilon_\theta = \Delta\varepsilon_\theta^e + \Delta\varepsilon_\theta^p$$

$$\text{Hypothèse : } \Delta\varepsilon_r^e \ll \Delta\varepsilon_r^p \text{ et } \Delta\varepsilon_\theta^e \ll \Delta\varepsilon_\theta^p$$

$$\Delta\varepsilon_r \approx \Delta\varepsilon_r^p ; \Delta\varepsilon_\theta \approx \Delta\varepsilon_\theta^p$$

$$\text{Loi d'écoulement : } \beta\Delta\varepsilon_\theta^p + \Delta\varepsilon_r^p = 0 \rightarrow \beta\Delta\varepsilon_\theta + \Delta\varepsilon_r = 0$$

$$\text{Equation de compatibilité des déformations : } \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_\theta}{r}$$

$$\frac{d\Delta\varepsilon_\theta}{dr} = \frac{\Delta\varepsilon_r - \Delta\varepsilon_\theta}{r} - 2\frac{\lambda_e \sigma^0}{2G} \frac{1}{r}$$

$$\frac{d\Delta\varepsilon_\theta}{dr} = \frac{-\beta\Delta\varepsilon_\theta - \Delta\varepsilon_\theta}{r} - 2\frac{\lambda_e \sigma^0}{2G} \frac{1}{r}$$

$$\frac{d\Delta\varepsilon_\theta}{dr} + (1+\beta)\frac{\Delta\varepsilon_\theta}{r} = -\frac{\lambda_e \sigma^0}{G} \frac{1}{r}$$

$$\text{Solution : } \Delta\varepsilon_\theta = -\frac{1}{1+\beta} \frac{\lambda_e \sigma^0}{G} + Cr^{-(1+\beta)}$$

$$\text{Condition limite : Pour } r=R_p \quad \Delta\varepsilon_\theta = 0, \text{ d'où } C = \frac{\lambda_e \sigma^0}{G} \frac{1}{1+\beta} R_p^{\beta+1}$$

$$\frac{u}{r} = \varepsilon_\theta = \frac{\lambda_e \sigma^0}{2G} + \Delta\varepsilon_\theta = \frac{\lambda_e \sigma^0}{2G} - \frac{1}{1+\beta} \frac{\lambda_e \sigma^0}{G} + \frac{\lambda_e \sigma^0}{G} \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{R_p}{r}\right)^{\beta+1} = \frac{\lambda_e \sigma^0}{2(\beta+1)G} \left[ 2\left(\frac{R_p}{r}\right)^{\beta+1} + \beta - 1 \right]$$