Modèles de Taux d'Intérêt

Vlad Bally

2008

Contents

1. Introduction

Il y a deux type de taux. En premier temps, le taux sur une période fixe, par exemple le taux LIBOR. C'est le taux pratiqué par les banques pour une période de 3 mois: pour 1 euro investit aujourd'hui on reçoit $1 \times (1 + L)$ euros dans trois mois. Le deuxième modèle concerne les taux composées: pour 1 euro investi aujourd'hui on reçoit $1 \times e^{rT}$ euros dans trois mois, avec $T =$ trois mois. r est le taux instantané. Le lien entre les deux est donné de la façon suivante. On divise l'intervalle $[0, T]$ en sous intervalles de longeur $h = T/n$ et on emplois un taux fixe r_n sur chaque intervalle de temps $[\frac{kT}{n}, \frac{(k+1)T}{n}]$. Donc, si au moment zero on investi 1 euros, au moment $\frac{T}{n}$ on a $1 + r_n$, au moment $\frac{2T}{n}$ on a $(1 + r_n)^2$ et ainsi de suite - c'est la raisons pour laquelle on appel ce type de taux "taux composées". Au moment T on aura $(1 + r_n)^n$. On vois que, si on vœu obtenir à la limite quelque chose qui n'est ni nul ni infinie, on est obligé de prendre $r_n = rT/n$ pour un $r > 0$. Alors on obtient $(1 + r_n)^n \to e^{rT}$. Dans ce cours on va suivre la modélisation en termes de taux composées qui est plus facile à traiter du point de vue mathématique - car elle conduit à des modèles en temps continu, qui sont traitable par calcul stochastique, équations stochastiques et EDP.

Le modèle $1 \to 1 \times e^{rT}$ est trop simpliste pour expliquer les phénomènes observés sur le marché donc on doit considérer les deux généralisations suivantes. En premier temps on remplace le taux instantané r par r_s, ce qui donne $1 \to 1 \times \exp(\int_0^T r_s ds)$. Donc on prend en compte une évolution du taux instantané qui dépend du temps. En plus, comme le taux instantané au moment s n'est pas connut au moment $t = 0$, on considère que c'est un processus aléatoire $r_s(\omega)$ qui sera "adapté" par rapport à une filtration qui représente l'information au moment s. Dans la littérature il y a une multitude de modèles pour la dynamique de $s \to r_s(\omega)$ qui est donné en termes de $l'EDS$ vérifié par ce processus. Ce sont les modèles de "taux courts" qui serons traités dans la première partie du cours.

Une deuxième généralisation c'est imposé dans la théorie moderne des taux d'intérêt: c'est le modèle de Hath - Jarrow - Merton (HJM). Le point de vue dans cette théorie est le suivent. On considère les "$T-bonds$" (ou zéro coupons): ce sont des contrats concluts au moment $t \geq 0$ qui payent un euros au moment $T > t$. On note $p(t,T)$ le prix du contrat. Bien sur qu'une institution financière ou une autre peuvent employer une formule ou une autre pour calculer le prix $p(t,T)$. Par exemple on peu employer les taux fixes et on obtient $p(t,T) = 1/(1 + L(T-t))$ Ou bien les taux instantanés et on obtient

$$(*) \quad p(t,T) = \exp(-\int_t^T r_s ds).$$

Mais rien n'est standardisé dans ce domaine donc chacun fait ce qu'il vœu et finalement ce qu'on observe sur le marché c'est juste un prix $p(t,T)$ qui reflètent l'offre et la demande. Vu cette situation on part de l'idée que le personnage principal c'est $p(t,T)$ et que la modélisation, quelle qu'elle soit, doit expliquer l'évolution de ces quantités. Si on regarde la formule $(*)$ on voit que $\partial_T \ln p(t,T) = -r_T$. On vois donc que le membre gauche de l'égalité dépend de t et de T alors que le membre droit ne dépend que de T. Donc les modèles de taux courts ne pourrons pas expliquer l'évolution de $p(t,T)$ en toute généralité. On généralise donc la notion de "taux instantané" et on le remplace avec le "taux forward" $f(t,s), s \geq t$. La formule $(*)$ devient

$$(**) \quad p(t,T) = \exp(-\int_t^T f(t,s)ds)$$

et on aura maintenant la relation $\partial_T \ln p(t,T) = -f(t,T)$. Et on précise maintenant la dynamique des taux forward $f(t,T)$ à la place de la dynamique des taux instantanés r_s. C'est le sujet de la deuxième partie du cours.

Dans la troiséme partie on présente les "Modèles de Marché". Ce sont des modèles pour les taux LIBOR ou pour les taux SWAP.

2. Modèle des taux instantanés

On considère les hypothèse suivante. Il existe un actif sans risque, $B_t, t \geq 0$ qui vérifie l'équation

$$\frac{dB_t}{B_t} = r_t dt$$

ce qui reviens à $B_t = \exp(\int_0^t r_s ds)$. Et on suppose que r_t est un processus stochastique qui vérifie l'équation

$$dr_t = \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t$$

ou W est un mouvement Brownien et μ et σ sont des coefficients suffisamment réguliers pour avoir une solution unique de l'EDS. Par exemple Lipschiz et à croissance linéaire.

En plus on suppose qu'il existe un marché de $T-$bonds $p(t,T)$ ou on peu acheter et vendre à n'importe quel moment t des bonds de n'importe quelle maturité T. Cette hypothèse (bien que pas complètement réaliste) est nécessaire pour formuler des arguments d'arbitrage.

Remarque: Si $r_t = r =$ constant, alors c'est claire que $B_t = e^{rt}$ est un actif sans risque. Mais r_t est un processus aléatoire, donc B_t lui même est aléatoire. On panse quand même que c'est un actif sans risque parce que $t \to B_t$ est une fonction différentiable, en contraste avec $t \to W_t$ qui est un processus à variation infinie - et de même toute sémimartingale (processus d'Itô) qui comporte une intégrale stochastique. Donc les variations de B_t et implicitement le risque qui en résulte est moindre. Par contre, dans la modélisation de $p(t,T)$ le processus $t \to p(t,T), t \leq T$ est une sémimartingale - donc un processus à risque. On est donc dans un marché ou B_t est l'actif sans risque et les T bonds $(p(t,T))_{t\leq T}$ sont les actif risqués, qu'on négocie. On peu noter qu'on a une infinité d'actifs risqués: pour chaque maturité T on a un $T - bond$ différent.

2.1. L'Equation de structure (term structure equation). On fait l'hypothèse que pour chaque échéance T le prix $p(t,T)$ au moment $t < T$ du $T - bond$ ne dépend que de r_t donc peu être écrit comme une fonction déterministe de r_t :

$$p(t,T) = F^T(t, r_t).$$

C'est une réstriction qu'on accépte(et qu'on va elliminer dans le modèle HJM pour les taux froward). En plus on fait l'hypothèse technique (et moins importante) que $F^T \in C^{1,2}$ c'est à dire qu'elle est une fois dérivable par rapport au temps et deux fois par rapport à r. C'est nécessaire pour appliquer la formule d'Itô.

Notre but c'est d'employer des arguments d'arbitrage pour déterminer l'EDP vérifié par $F^T(t,r), (t,r) \in [0,T] \times R_+$. On peu voire immédiatement qu'on aura la condition finale $F^T(T,r) = p(T,T) = 1$. On établit maintenant l'équation différentielle.

Pas 1. On emplois la **formule d'Itô** et on obtient (avec la notation $F_t^T = F^T(t, r_t) = p(t,T)$)

$$dF_t^T = \sigma \partial_r F_t^T dW_t + (\partial_t F_t^T + \mu \partial_r F_t^T + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_r^2 F_t^T)dt.$$

Et on écrit cette équation en forme exponentielle c'est à dire

$$\begin{aligned} \frac{dF_t^T}{F_t^T} &= \sigma_t^T dW_t + \alpha_t^T dt, \quad avec \\ \sigma_t^T &= \frac{\sigma \partial_r F_t^T}{F_t^T}, \quad \alpha_t^T = \frac{\partial_t F_t^T + \mu \partial_r F_t^T + \frac{1}{2}\sigma^2 F_t^T}{F_t^T}. \end{aligned}$$

Pas 2. Par un **argument d'arbitrage** (que je laisse pour la fin) on obtient l'affirmation suivante. Pour tout $S < T$ on a

$$(*) \quad \frac{\alpha_t^S \sigma_t^T - \alpha_t^T \sigma_t^S}{\sigma_t^T - \sigma_t^S} = r_t, \quad \forall t \leq S < T.$$

Je suppose que $(*)$ est vrais et je continue.

Pas 3. Prime de risque. On réécrit $(*)$ sous la forme

$$\frac{\alpha_t^T - r_t}{\sigma_t^T} = \frac{\alpha_t^S - r_t}{\sigma_t^S}.$$

Ceci vœu dire que le rapport ne dépend pas de S respectivement de T! On peu donc définire

$$(**) \quad \lambda_t := \frac{\alpha_t^S - r_t}{\sigma_t^S} \quad t \leq S.$$

Comme S est arbitraire λ_t est définit pour tout $t \geq 0$. Cette quantité s'appele la prime de risque et le la motivation est la suivent. On regarde les équations suivis par les prix des $T - bonds$ (rapplons qu'on a $F_t^T = p(t, T)$) :

$$\frac{dp(t,T)}{p(t,T)} = \sigma_t^T dW_t + \alpha_t^T dt$$

et on la compare avec l'équation de l'actif sans risque:

$$\frac{dB_t}{B_t} = r_t dt.$$

r_t représente le "taux de revenu" de l'actif sans risque. Au même titre, α_t^T représente le taux de revenu de $p(t, T)$. Mais $p(t, T)$ est un actif risqué car il comporte aussi le terme $\sigma_t^T dW_t$. On peu donc interpréter λ_t comme la différence entre le taux de revenu de l'actif risqué moins le taux de revenu de l'actif sans risque (donc une prime de risque) normalisé par la volatilité de l'actif risqué - autrement dit exprimé en "unités de volatilité".

Pas 4. l'EDP. On remplace σ_t^T et α_t^T dans $(**)$ et on obtient

$$\lambda_t \times \frac{\sigma \partial_r F_t^T}{F_t^T} = \frac{\partial_t F_t^T + \mu \partial_r F_t^T + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_r^2 F_t^T}{F_t^T} - r_t$$

ce qui donne

$$\partial_t F_t^T + (\mu - \lambda\sigma)\partial_r F_t^T + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_r^2 F_t^T - r_t F_t^T = 0.$$

On va maintenant précisé les arguments des fonctions qui apparaissent la dedans. Commençons par remarquer que, par sa définition, λ_t est une fonction de t et de r_t (voire (**)). Cette fonction est inconnue car elle engage $F^T(t, r_t)$ - qui n'est pas connut - mais par contre, par notre hypothèse on sait au moins qu'il s'agit d'une fonction! Donc on peu dire qu'il existe une fonction $\lambda : [0, \infty) \times R_+ \to R$ tel que $\lambda_t = \lambda(t, r_t)$ et on ecrit

$$\partial_t F^T(t, r_t) + (\mu - \lambda\sigma)(t, r_t)\partial_r F^T(t, r_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, r_t)\partial_r^2 F^T(t, r_t) - r_t F^T(t, r_t) = 0.$$

Ici intervient un argument un peu subtile: on sait que sous des hypothèse raisonnables la loi de r_t charge R_+ tout entier. Alors si pour une fonction ϕ on a $\phi(r_t) = 0$, $P-$presque sûrement, ceci implique que $\phi(r) = 0$ dr presque sûrement. Et si en plus ϕ est une fonction continue, alors $\phi(r) = 0$ pour chaque $r \in R_+$. Vu cette observation on en déduit que

$$\partial_t F^T(t, r) + (\mu - \lambda\sigma)(t, r)\partial_r F^T(t, r) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, r)\partial_r^2 F^T(t, r) - rF^T(t, r) = 0$$

pour chaque $(t, r) \in [0, T] \times R_+$.

Si on note $\nu = \mu - \lambda\sigma$, on a donc démontré le résultat suivent.

Theorem 1. *(**Term structure equation**) Supposons que le marché n'admet pas d'arbitrage. Alors il existe une fonction λ tel que pour tout T la fonction F^T est solution de l'EDP*

$$\begin{aligned} \partial_t F^T + (\mu - \lambda\sigma)\partial_r F^T + \frac{1}{2}\sigma^2\partial_r^2 F^T(t, r) - rF^T(t, r) &= 0, \quad (t, r) \in [0, T] \times R_+, \\ F^T(T, r) &= 1. \end{aligned}$$

L'argument d'arbitrage. Revenons maintenant à la preuve de $(*)$. On construit un portefeuille basé sur $p(t, T)$ et $p(t, S)$:

$$V_t = \phi_t^T \times p(t, T) + \phi_t^S \times p(t, S)$$

La relation d'autofinancement nous donne

$$V_t = V_0 + \int_0^t \phi_s^T dp(s, T) + \int_0^t \phi_s^S dp(s, S).$$

On considère les pourcentage investit dans chaque actif

$$u_t^T = \frac{\phi_t^T \times p(t, T)}{V_t}, \quad u_t^S = \frac{\phi_t^S \times p(t, S)}{V_t}$$

et on écrit

$$V_t = V_0 + \int_0^t V_s u_s^T \frac{dp(s,T)}{p(s,T)} + \int_0^t V_s u_s^S \frac{dp(s,S)}{p(s,S)}.$$

Donc, compte tenu de la dynamique des $T - bonds$

$$\begin{aligned} \frac{dV_t}{V_t} &= u_t^T(\sigma_t^T dW_t + \alpha_t^T dt) + u_t^S(\sigma_t^S dW_t + \alpha_t^S dt) \\ &= (u_t^S \sigma_t^S + u_t^T \sigma_t^T) dW_t + (u_t^T \alpha_t^T + u_t^S \alpha_t^S) dt. \end{aligned}$$

On cherche maintenant une stratégie qui annule le bruit dW_t. On vœu donc avoir

$$u_t^S \sigma_t^S + u_t^T \sigma_t^T = 0.$$

On sais aussi que $u_t^S + u_t^T = 1$, donc, en résolvant ce système d'équations on obtient

$$u_t^T = -\frac{\sigma_t^S}{\sigma_t^T - \sigma_t^S}, \quad u_t^S = \frac{\sigma_t^T}{\sigma_t^T - \sigma_t^S}.$$

Si on fait ce choix la dynamique du portefeuille est donné par

$$\frac{dV_t}{V_t} = (u_t^T \alpha_t^T + u_t^S \alpha_t^S) dt.$$

V_t est donc un actif sans risque. Mais on a sur le marché aussi l'actif sans risque B_t. Et si on pense deux minutes, on voit que, si on a sur le marché deux actifs sans risque, alors forcement ils ont le même taux de revenu - sinon on peu immédiatement construire une stratégie d'arbitrage. On conclut que $u_t^T \alpha_t^T + u_t^S \alpha_t^S = r_t$ ce qui revient à

$$\frac{\alpha_t^S \sigma_t^T - \alpha_t^T \sigma_t^S}{\sigma_t^T - \sigma_t^S} = r_t.$$

□

On peu donner la généralisation immédiate suivante. Soit ϕ une fonction et soit $p^\phi(t,T)$ le prix au moment t d'un contrat qui paye $\phi(r_T)$ à l'échéance T. Donc les $T - bonds$ représentent le cas particulier $\phi = 1$. On note par $F^{T,\phi}$ une fonction telle que $p^\phi(t,T) = F^{T,\phi}(t, r_t)$. Le même argument d'arbitrage qu'avant nous donne l'EDP suivante.

Theorem 2. *Supposons que le marché n'admet pas d'arbitrage. Alors il existe une fonction λ tel que pour tout T et tout payoff ϕ, la fonction $F^{T,\phi}$ est solution de l'EDP*

$$\begin{aligned} \partial_t F^{T,\phi} + (\mu - \lambda\sigma)\partial_r F^{T,\phi} + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_r^2 F^{T,\phi}(t,r) - rF^{T,\phi}(t,r) &= 0, \quad (t,r) \in [0,T] \times R_+, \\ F^{T,\phi}(T,r) &= \phi(r). \end{aligned} \tag{1}$$

On remarque que la prime de risque λ est la même: c'est que pour établir le résultat pour $\phi = 1$ on a construit un portefeuille basé sur $p(t,T)$ et $p(t,S)$ pour $S < T$. Mais on peu aussi bien construire des portefeuilles basés sur $p^{\phi}(t,T)$ et $p^{\psi}(t,S)$. Et on va toujours obtenir

$$\frac{\alpha_t^{S,\psi}\sigma_t^{T,\phi} - \alpha_t^{T,\phi}\sigma_t^{S,\psi}}{\sigma_t^{T,\phi} - \sigma_t^{S,\psi}} = r_t.$$

Donc la prime de risque λ ne va pas dépendre de ϕ et de ψ au même titre qu'elle ne dépendait pas de S et de T.

2.2. Interprétation probabiliste. On commence par rappeler la formule de Faynman Kac. On considère l'EDS

$$dX_t = (\mu - \sigma\lambda)(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t.$$

Et on note par $X_T^{t,r}$ la solution de l'équation qui part de r au moment t, c'est à dire la solution de

$$X_T^{t,r} = r + \int_t^T (\mu - \sigma\lambda)(s, X_s^{t,r})ds + \int_t^T \sigma(s, X_s^{t,r})dW_s.$$

On remarque qu'on a la propriété suivante (propriété de flot): pour tout $0 \leq t \leq T$ et tout $r \in R$

$$X_T := X_T^{0,r} = X_T^{t, X_t^{0,r}}.$$

Alors le théorème de Faynman Kac dit que la solution $F^{T,\phi}$ de l'EDP (1) ce représente par

$$F^{T,\phi}(t,r) = E(\phi(X_T^{t,r})e^{-\int_t^T X_s^{t,r}ds}).$$

Et en employant la propriété de Markov on obtient

$$\begin{aligned} E(\phi(X_T)e^{-\int_t^T X_s ds} \quad &| \quad F_t) = E(\phi(X_T)e^{-\int_t^T X_s ds} \mid X_t) \\ &= \quad E(\phi(X_T^{t,r})e^{-\int_t^T X_s^{t,r}ds}) \mid_{r=X_t} = F^{T,\phi}(t, X_t). \end{aligned} \tag{2}$$

On établit maintenant **le lien avec la dynamique des taux courts** r_t. On rappelle qu'on a

$$\begin{aligned} dr_t &= \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t \\ &= (\mu - \lambda\sigma)(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)(dW_t + \lambda dt). \end{aligned}$$

Si on définit $dW_t^{\lambda} = dW_t + \lambda\sigma(t, r_t)dt$ alors le **théorème de Girsanov** nous dit qu'il existe une probabilité P^{λ} équivalente avec P sous laquelle W_t^{λ} est un mouvement Brownien. Donc, sous P^{λ} la dynamique de r est donné par

$$dr_t = (\mu - \lambda\sigma)(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t^{\lambda}.$$

C'est la dynamique de X considéré plus haut. Donc X et r ont la même lois et (2) s'écrit

$$p^{\phi}(t,T) = F^{T,\phi}(t,r_t) = E^{\lambda}(\phi(r_T)e^{-\int_t^T r_s ds} \mid F_t) \quad P^{\lambda} - p.s. \tag{3}$$

C'est la formule de calcul pour les prit des $T - bonds$ généralisés (et on prend $\phi = 1$ pour les $T - bonds$ standard).

Remarque. Cette formule représente la formule standard pour le pris de payoff ϕ sur l'actif r_T. Mais on peu ce demander sous quelle probabilité P^{λ} on doit faire le calcul? Autrement dit, quelle est la prime de risque λ qu'on va choisir?. En gros la réponse est: C'est le marché qui chosit la prime de risque! Pour voir ça il faut poser le problème de la **callibration**. On considère qu'on est au moment $t = 0$ et on a sur le marché les prix $\widehat{p}(0,T_1),...,\widehat{p}(0,T_n)$. Le problème c'est de trouver un modèle qui explique le mieux possible ces prix la. Donc on voudrai avoir

$$\widehat{p}(0,T_i) = p(0,T_i) = E^{\lambda}(\phi(r_T)e^{-\int_0^T r_s ds}), \quad i = 1,...,n. \tag{4}$$

Et on sait que sous P^{λ} la dynamique de r_t est donné par

$$dr_t = (\mu - \lambda\sigma)(t,r_t)dt + \sigma(t,r_t)dW_t^{\lambda}.$$

On vœu donc trouver les fonctions μ, σ, λ qui donnent (4). On a donc trois fonctions inconnues. Mais, si on note $\nu = \mu - \lambda\sigma$, alors l'équation s'écrit

$$dr_t = \nu(t,r_t)dt + \sigma(t,r_t)dW_t. \tag{5}$$

Et la loi de r_t est déterminé par ν, σ et par le mouvement Brownien W. On peu donc réformuler le problème de la manière suivente: trouver ν et σ pour avoir

$$\begin{aligned} \widehat{p}(0,T_i) &= E(\phi(r_T)e^{-\int_0^T r_s ds}), \quad i = 1,...,n \quad avec \\ dr_t &= \nu(t,r_t)dt + \sigma(t,r_t)dW_t. \end{aligned}$$

Et maintenant la prime de risque disparaît - elle est inclue dans ν qui est calculé par callibration (donc choise par le marché).

Ceci est encore plus évident si on part de l'équation de structure: elle dépend de σ et de $\nu = \mu - \lambda\sigma$. Donc ce sont ces deux fonctions la qu'on doit trouver.

2.3. Modèles Affines. On considère un modèle de taux court sous la probabilité risque neutre (voir (5):

$$dr_t = \nu(t,r_t)dt + \sigma(t,r_t)dW_t$$

et on note par $F^T(t,r)$ la solution de l'équation de structure associé. On dit que le modèle est affine si

$$F^T(t,r) = \exp(A(t,T) - rB(t,T)) \tag{6}$$

ou A et B sont des fonctions déterministes de t et T.

Lemma 3. *Supposons que*

$$\nu(t,r) = r\alpha(t) + \beta(t), \quad \sigma^2(t,r) = r\gamma(t) + \delta(t). \tag{7}$$

Alors le modèle est affine et on retrouve A et B comme solutions des équations suivantes:

$$\partial_t B(t,T) + \alpha(t)B(t,T) - \frac{1}{2}\gamma(t)B^2(t,T) = -1, \quad B(T,T) = 0, \tag{8}$$

et

$$\partial_t A(t,T) = \beta(t)B(t,T) - \frac{1}{2}\delta(t)B^2(t,T), \quad A(T,T) = 0. \tag{9}$$

Preuve. L'équation de structure associé est

$$\partial_t F^T + \nu\partial_r F^T + \frac{1}{2}\sigma^2\partial_r^2 F^T - rF^T = 0, \quad F^T(T,r) = 1. \tag{10}$$

La condition finale $F^T(T,r) = 1$ implique que $A(T,T) - rB(T,T) = 0$ pour tout $r \in R_+$ donc on doit avoir $A(T,T) = B(T,T) = 0$. D'autre part, si on a (6) alors $\partial_r F^T = -BF^T, \partial_r^2 F^T = B^2 F^T$ et $\partial_t F^T = (\partial_t A - r\partial_t B)F^T$. On remplace dans l'équation (10) et on remplace aussi ν et σ^2 par les expressions données dans (7). Et on retrouve

$$\partial_t A - r\partial_t B - (\alpha r + \beta)B + \frac{1}{2}(r\gamma(t) + \delta(t))B^2 - r = 0.$$

Comme cette égalité doit être vrais pour tout r on obtient (8) et (9). □

Les exemples de modèles de taux courts les plus courants sont les suivantes:

1. Vasicek:
$$dr_t = (b - ar_t)dt + \sigma dW_t,$$
2. CIR
$$dr_t = (b - ar_t)dt + \sqrt{r_t}dW_t$$
3. Dothan
$$dr_t = ar_t + \sigma r_t dW_t$$
4. Black, Derman, Toy
$$\frac{dr_t}{r_t} = \theta(t)dt + \sigma(t)dW_t,$$
5. Ho-Lee (extension Vasicek)
$$dr_t = (\theta(t) - a(t)r_t)dt + \sigma(t)dW_t,$$
6. Hull-White (extention CIR)
$$dr_t = (\theta(t) - a(t)r_t)dt + \sigma(t)\sqrt{r_t}dW_t.0$$

Les modèles 1,2,5, 6 sont affines et les modèles 3 et 4 ne le sont pas.

3. Modèles de HJM (Heath-Jarrow-Merton)

Dans les modèles de taux courts (instantanés) on a supposé qu'on peu expliquer la dynamique des zéro coupons en partant de la dynamique des taux courts. Ce qui n'est pas le cas en toute généralité. L'idée de Heath-Jarrow-Merton est de modéliser directement les taux forward (et implicitement les zéro coupons).

Le cadre est le suivent: on considère un mouvement Brownien $d-$ dimensionnel $W=(W^1,...,W^d)$ et pour un processus $d-$ dimensionnel $u_t=(u_t^1,...,u_t^d)$ on note

$$u_t dW_t = \sum_{i=1}^{d} u_t^i dW_t^i.$$

On suppose que pour tout $T>0$ fixé, les taux forward vérifient

$$\begin{aligned} df(t,T) &= \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW_t, \quad 0 \le t \le T, \\ f(0,T) &= f^*(0,T) \end{aligned} \tag{11}$$

ou bien en écriture intégrale

$$f(t,T) = f^*(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)ds + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \sigma_i(s,T)dW_s^i \quad 0 \le t \le T.$$

Ici $f^*(0,T) = -\partial_T p^*(0,T)$ c'est la courbe des taux forward donné par le marché; elle s'appele le "yild curve". Et $\alpha(t,T), \sigma(t,T) = (\sigma_1(t,T),...,\sigma_d(t,T))$ sont des processus adaptés tel que

$$E(\int_0^T (|\alpha(t,T)| + |\sigma(t,T)|^2)dt) < \infty.$$

On suppose aussi que pour tout t fixé $T \to \alpha(t,T)$ et $T \to \sigma(t,T)$ sont des fonctions differentiables.

On doit observer qu'ici on n'a pas à faire avec des équations stochastiques (comme c'été le cas dans la modélisation du taux instantané r_t) mais juste avec un "cadre". L'égalité (11) n'est pas une équation mais juste l'affirmation que $t \to f(t,T), t \le T$ est un processus d'Itô. Et en plus on a précisé que α et σ dépandent d'une manière differentiable de T.

On vœu maintenant donner la dynamique des zéro coupons. Pour ceci on rappelle l'expression

$$p(t,T) = \exp(-\int_t^T f(t,s)ds)$$

et on emplois la formule d'Itô pour déterminer la dynamique de $t \to p(t,T)$. La difficulté c'est que $t \to \int_t^T f(t,s)ds$ n'est pas un processus d'Itô dans sa forme habituelle (car t apparait dans la limite de l'intégrale et dans $f(t,s)$ en même temps) donc on aura besoin d'une extension de la formule d'Itô. Je ne rentre pas ici dans les détailles techniques et je me contente de donner directement la dynamique qu'on obtient:

$$\frac{dp(t,T)}{p(t,T)} = \phi_t^T dt + \sum_{i=1}^{d} S_i(t,T) dW_t^i \tag{12}$$

avec

$$\begin{aligned} S_i(t,T) &= -\int_t^T \sigma_i(t,s)ds, \quad i = 1,...,d, \\ A(t,T) &= -\int_t^T \alpha(t,s)ds, \\ \phi_t^T &= f(t,t) + A(t,T) + \frac{1}{2}\left|S(t,T)\right|^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Le problème est maintenant le suivent: quelles sont les relations qui doivent être vérifiés par α et σ pour qu'il **n'y a pas d'opportunité d'arbitrage** dans le marché? **Réponse**: la condition de dérive de HJM - qu'on va établir par la suite.

On discute ce problème dans le cadre suivent:

1. Il y a un actif sans risque qui vérifie $dB_t = r_t B_t dt$ ou r_t est le taux de la banque (qui est un processus stochastique dont la dynamique n'est pas précisé). Et on suppose que $r_t = f(t,t)$.

2. Il y a un marché dans lequel ce négocient les zéro coupons de toute maturité T à tout moment $t \leq T$.

Avant de partir en route on rappel le fait suivent: l'absence d'opportunité d'arbitrage est équivalente à l'existence d'une probabilité $P^* \sim P$, appelé probabilité risque neutre, tel que les prix des actifs risqués actualisés sont des martingales sous P^*. Dans notre cas les actifs risqué sont les zéro coupons donc on suppose que $\widetilde{p}(t,T) = B_t^{-1} \times p(t,T), 0 \leq t \leq T$, sont des martingales sous P^* pour tout $T > 0$.

Remark 1. *Le fait que la probabilité risque neutre P^* est unique est équivalent avec le fait que le marché est complet. Dans notre cas le marché n'est pas complet et on n'a pas unicité de la probabilité risque neutre.*

Proposition 4. (***Prime de risque***) *Sont équivalentes:*

A. Il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage.

B. Il existe un processus $\lambda = (\lambda^1, ..., \lambda^d)$ appelé "prime de risque" tel que

$$\phi_t^T = r_t - \sum_{i=1}^{d} \lambda_t^i S_i(t,T) \quad \forall T > 0. \tag{14}$$

Remark 2. *Supposons que $d = 1$. Alors (14) donne*

$$\lambda_t = \frac{\phi_t^T - r_t}{-S(t,T)}.$$

Comme ϕ_t^T représente le taux de revenu des zéro coupons et $-S(t,T)$ représente leurs volatilité, on retrouve la même expression que dans les modèles des taux instantanés (ce qui est choérent) et la même interprétation économique: la prime de risque représente la différence entre le taux de revenu de l'actif sans risque et de l'actif risque, en "unités de volatilité" de l'actif risqué. On dit que la volatilité des zéro coupons est $-S(t,T)$ et non $S(t,T)$ car on fait la convention que la volatilité doit être une quantité positive.

Preuve. $B \Longrightarrow A$. Supposons qu'il existe λ qui vérifie (14). On note

$$\begin{aligned} e_\lambda(t) &= \exp(\sum_{i=1}^{d} \int_0^t \lambda_i(s) dW_s^i - \frac{1}{2} \int_0^t |\lambda(s)|^2 \, dt, \quad dP^\lambda = e_\lambda(T) dP, \\ dW_t^{\lambda,i} &= dW_t^i - \lambda_t^i dt \end{aligned}$$

et on rappel que le théorème de Girsanov dit que W^λ est un P^λ mouvement Brownain.

Le dynamique des zéro coupons actualisés est donné par

$$\begin{aligned} \frac{d\widetilde{p}(t,T)}{\widetilde{p}(t,T)} &= (\phi_t^T - r_t)dt + \sum_{i=1}^{d} S_i(t,T) dW_t^i \\ &= (\phi_t^T - r_t + \sum_{i=1}^{d} \lambda_t^i S_i(t,T))dt + \sum_{i=1}^{d} S_i(t,T)(dW_t^i - \lambda_t^i dt) \\ &= \sum_{i=1}^{d} S_i(t,T) dW_t^{\lambda,i} \end{aligned}$$

la dernière égalité étant une conséquence de (14). Comme W^λ est une martingale sous P^λ, $\widetilde{p}(t,T)$ l'est aussi. Donc P^λ est une probabilité risque neutre.

$A \Longrightarrow B$. On suppose qu'il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage - donc qu'il existe une probabilité $P^* \sim P$, tel que $\widetilde{p}(t,T)$ est une P^* martingale. Le théorème de Girsanov nous dit aussi que toute probabilité équivalente à P a comme densité une exponentielle stochastique. On peu donc trouver un processus λ^* tel que $dP^* =$

$e_{\lambda^*}(T)dP$. La dynamique de $\widetilde{p}(t,T)$ sous P^* est donné par

$$\begin{aligned}\frac{d\widetilde{p}(t,T)}{\widetilde{p}(t,T)} &= (\phi_t^T - r_t)dt + \sum_{i=1}^d S(t,T)dW_t^i \\ &= (\phi_t^T - r_t + \sum_{i=1}^d \lambda_t^{*,i} S_i(t,T))dt + \sum_{i=1}^d S_i(t,T)dW_t^{*,i}.\end{aligned}$$

Et comme $\widetilde{p}(t,T)$ est une P^* martingale la dérive doit être zéro donc $\phi_t^T - r_t = -\sum_{i=1}^d \lambda_t^{*,i} S_i(t,T)$. On a donc obtenu (14) avec $\lambda = \lambda^*$.$\square$

Remark 3. *On retient aussi la démonstration de cette proposition qle fait suivent: pour tout processus λ on a une probabilité risque neutre P^λ, et inversement, tout probabilité risque neutre P^* est de la forme P^{λ^*} pour un certain processus λ^* qui vérifie (14).*

On donne finalement le résultat principal de ce paragraphe:

Theorem 5. *(**Condition de dérive de HJM**) On suppose qu'il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage Alors sous la probabilité risque neutre P^* la dynamique des forward rates est donné par*

$$\begin{aligned} df(t,T) &= \alpha(t,T)dt + \sum_{i=1}^d \sigma_i(t,T)dW_t^{*,i} \quad \textit{avec} \qquad (15)\\ \alpha(t,T) &= \sum_{i=1}^d \sigma_i(t,T)\int_t^T \sigma_i(t,s)ds.\end{aligned}$$

Preuve. On prend une probabilité risque neutre quelconque - comme on la vue avant, cette probabilité est de la forme $P^* = P^\lambda$ pour un certain λ et en plus on a la relation (14). Cette relation s'écrit

$$f(t,t) + A(t,T) + \frac{1}{2}|S(t,T)|^2 = r_t - \sum_{i=1}^d \lambda_t^i S_i(t,T).$$

On dérive par rapport à T: on a $\partial_T A(t,T) = -\alpha(t,T)$ et $\partial_T S_i(t,T) = -\sigma_i(t,T)$ donc on obtient

$$-\alpha(t,T) - \sum_{i=1}^d S_i(t,T)\sigma_i(t,T) = \sum_{i=1}^d \lambda_t^i \sigma_i(t,T).$$

On prend α qui est donné par cette égalité et on le remplace dans la dynamique des taux forward:

$$\begin{aligned} df(t,T) &= -\sum_{i=1}^{d} S_i(t,T)\sigma_i(t,T)dt - \sum_{i=1}^{d} \lambda_t^i \sigma_i(t,T)dt + \sum_{i=1}^{d} \sigma_i(t,T)dW_t^i \\ &= -\sum_{i=1}^{d} S_i(t,T)\sigma_i(t,T)dt + \sum_{i=1}^{d} \sigma_i(t,T)(dW_t^i - \lambda_t^i dt). \end{aligned}$$

Comme $dW_t^i - \lambda_t^i dt = dW_t^{\lambda,i} = dW_t^{*,i}$ et $-\sum_{i=1}^{d} S_i(t,T)\sigma_i(t,T) = \sum_{i=1}^{d} \sigma_i(t,T)\int_t^T \sigma_i(t,s)ds$ on a obtenu (15). □

3.1. Pricing dans le modèle de HJM. Soit H une variable aléatoire (positive, intégrable) F_T mésurable. On la regarde comme payoff pour un contrat d'échéance T. On dit que H est simulable s'il existe un portefeuilles autofinancé V_t construit avec des zéro coupons tel que $V_T = H$ (le marché est incomplet donc ce n'est pas vrais que tout actif financier H est simulable).

Proposition 6. *Le prix d'un actif simulable H est donné par*

$$\Pi_t(H) = E^*(He^{-\int_t^T r_s ds} \mid F_t) \tag{16}$$

ou P^* est une probabilité risque neutre. En particulier le prix des zéro coupons est donné par

$$p(t,T) = E^*(e^{-\int_t^T r_s ds} \mid F_t). \tag{17}$$

Preuve. On considère un portefeuille V tel que $V_T = H$ et on note $\widetilde{V}_t = \frac{1}{B_t}V_t$ la valeur actualisé. Comme V est un portefeuille autofinancé construit avec des zéro coupons et les prix des zéro coupons actualisés sont des martingales sous P^*, $\widetilde{V}_t$ est aussi une martingale sou P^*, donc

$$E^*(\widetilde{H} \mid F_t) = E^*(\widetilde{V}_T \mid F_t) = \widetilde{V}_t.$$

On enlève l'actualisation et on obtient

$$\Pi_t(H) = V_t = E^*(He^{-\int_t^T r_s ds} \mid F_t)$$

□

3.2. Changement de numéraire. La dynamique des zéro coupons actualisés sous la probabilité risque neutre P^* est donné par (le coefficient de dérive doit être nul car on a des martingales):

$$\frac{d\widetilde{p}(t,T)}{\widetilde{p}(t,T)} = \sum_{i=1}^{d} S_i(t,T)dW_t^{*,i}$$

donc

$$\widetilde{p}(t,T) = p(0,T)e_T(t) \quad avec \quad e_T(t) = \exp(\sum_{i=1}^{d}\int_0^t S_i(s,T)dW_s^{*,i} - \frac{1}{2}\int_0^t |S(s,T)|^2\, ds).$$

Comme e_T est une exponentielle stochastique on peu définie la probabilité

$$dP^T = e_T(T)dP = \frac{\widetilde{p}(T,T)}{p(0,T)}dP.$$

Cette probabilité s'appele la "**probabilité forward**" associé au zéro coupon $p(t,T)$.

Proposition 7. *(Changement de numéraire). Le prix d'un actif simulable H est donné par*

$$\Pi_t(H) = p(t,T)E^T(H \mid F_t). \tag{18}$$

En particulier

$$\Pi_0(H) = p(0,T)E^T(H). \tag{19}$$

L'Intérêt de cette formule vient entre autre du fait suivent. Supposons qu'on vœu calculer le prix $\Pi_0(H)$ en employant la méthode de Monte Carlo. Si on part avec la formule "standard" (16) on doit simuler le couple $(H, \int_0^T r_s ds)$, donc on doit connaître la loi jointe de H et de $\int_0^T r_s ds$. Et ceci peu être délicat... Par contre, si on emplois (19), il suffit de connaître la loi de H seulement - et la valeur de $p(0,T)$ qui est donné par le marché. Mais attention: on doit connaître la loi de H sous la probabilité forward P^T. D'habitude H dépend d'un processus d'Itô, donc c'est une fonctionnelle de W^* qui est un mouvement Brownien sous P^*. Si on vœu travailler sous P^T il faut tout convertir en termes de W^T qui est un mouvement Brownien sous P^T. Pour ça il suffit de ce rappeler que $dW_t^T = dW_t^* - \sum_{i=1}^d S_i(t,T)dW_t^{*,i}$ est un mouvement Brownien sous P^T.

Finalement on explique pourquoi on appele cette technique "changement de numéraire". Je note $p_B(t,T) = \exp(-\int_t^T r_s ds)$. C'est la somme qu'on doit mettre à la banque au moment t pour, obtenir un euros au moment T. C'est donc un "zéro coupon" basé sur l'actif sans risque. Avec cette notation la formule de pricing avec la probabilité risque neutre (16) devient

$$\Pi_t(H) = E^*(Hp_B(t,T) \mid F_t).$$

Et la formule avec changement de numéraire est

$$\Pi_t(H) = p(t,T)E^T(H \mid F_t) = E^T(Hp(t,T) \mid F_t)$$

la dernière égalité étant vrais car $p(t,T)$ est F_t méasurable. En ce moment les deux formules sont complètement analogues mais la première traite $Hp_B(t,T)$ - qui est la valeur de H en unités (numéraire) $1/p_B(t,T)$ - et la deuxième traite $Hp(t,T)$ - qui est la valeur de H en unités $1/p(t,T)$ - qui est le "numéraire" associé au zéro coupon $p(t,T)$. Bien sur l'espérance est calculé la première fois sous la probabilité risque neutre P^* alors que la deuxième fois c'est sous la probabilité froward P^T.

Avant de démontrer (18) je vais donner un lemme abstrait qui établit les règles de calcul pour un changement de numéraire abstrait.

Je considère un processus Y qui vérifie

$$\frac{dY_t}{Y_t} = \sigma_Y(t)dW_t = \sum_{i=1}^{d} \sigma_Y^i(t)dW_t^i.$$

Alors $Y_t = Y_0 e_Y(t)$ avec $e_Y(t) = \exp(\int_0^t \sigma_Y(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\sigma_Y(s)|^2 ds)$. Je vœu employer Y comme numéraire donc je définit la probabilité forward associé à Y comme $dP^Y = e_Y(t)dP$ sur F_t. On note que sous P^Y le Brownien est $dW_t^{Y,i} = dW_t^i - \sigma_Y(t)dt$.

Je considère aussi un autre processus X qui vérifie

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu_X(t)dt + \sigma_X(t)dW_t.$$

J'actualise X dans le numéraire Y et j'obtient

$$X_t^Y = \frac{X_t}{Y_t}.$$

Proposition 8. *La dynamique de X_t^Y est donné par*

$$\frac{dX_t^Y}{X_t^Y} = \mu_X(t)dt + (\sigma_X(t) - \sigma_Y(t))dW_t^Y \quad \textit{avec} \quad dW_t^{Y,i} = dW_t^i - \sigma_Y(t)dt. \tag{20}$$

En particulier, si X est une martingale sous P alors $\mu_X = 0$ donc X^Y est une martingale sous P^Y et on a

$$X_t^Y = \frac{X_0}{Y_0}\exp(\int_0^t (\sigma_X(s) - \sigma_Y(s))dW_s^Y - \frac{1}{2}\int_0^t |\sigma_X(s) - \sigma_Y(s)|^2 ds). \tag{21}$$

Preuve. je note $\overline{e}(t) = 1/e_Y(t)$ et en appliquant la formule d'Itô on obtient

$$\frac{d\overline{e}(t)}{\overline{e}(t)} = -\sigma_Y(t)dW_t + |\sigma_Y(t)|^2 \, dt.$$

Donc, encore une fois par Itô:

$$\begin{aligned}
Y_0 dX_t^Y &= d(\overline{e}(t)X_t) = \overline{e}(t)dX_t + X_t d\overline{e}(t) + d\langle M_X, M_{\overline{e}}\rangle(t) \\
&= \overline{e}(t)X_t\sigma_X(t)dW_t + \overline{e}(t)X_t\mu_X(t)dt - \overline{e}(t)X_t\sigma_Y(t)dW_t + \overline{e}(t)X_t\,|\sigma_Y(t)|^2\, dt \\
&\quad -\overline{e}(t)X_t\,\langle\sigma_Y(t), \sigma_X(t)\rangle\, dt \\
&= \overline{e}(t)X_t(\sigma_X(t) - \sigma_Y(t))dW_t \\
&\quad +\overline{e}(t)X_t\,\langle\sigma_Y(t) - \sigma_X(t), \sigma_X(t)\rangle\, dt + \overline{e}(t)X_t\mu_X(t)dt \\
&= \overline{e}(t)X_t(\sigma_X(t) - \sigma_Y(t))dW_t^Y + \overline{e}(t)X_t\mu_X(t)dt.
\end{aligned}$$

Comme $X_t^Y = Y_0^{-1}\overline{e}(t)X_t$ on obtient (20). □

Preuve de (18). On considère un portefeuille autofinancé V tel que $H = V_T$ et on écrit

$$\frac{V_t}{p(t,T)} = \frac{\widetilde{V}_t}{\widetilde{p}(t,T)}.$$

On sait que $\widetilde{V}_t$ est une martingale positive donc sa dynamique est donné par

$$\frac{d\widetilde{V}_t}{\widetilde{V}_t} = \sigma_V(t)dW_t.$$

On va employer le lemme précédent avec $X_t = \widetilde{V}_t$ et $Y_t = \widetilde{p}(t,T)$. Donc $\widetilde{V}_t/\widetilde{p}(t,T) = X_t^Y$. Comme X_t est une P^* martingale, X_t^Y est une $P^Y = P^T$ martingale donc $X_t^Y = E^T(X_T^Y \mid F_t)$. Ce qui donne

$$\frac{V_t}{p(t,T)} = E^T\left(\frac{V_T}{p(T,T)} \mid F_t\right) = E^T(H \mid F_t).$$

Comme $V_t = \Pi_t(H)$ on a démontré que $\Pi_t(H) = p(t,T)E^T(H \mid F_t)$.□

3.3. Application: formule de Black Scoles avec taux aléatoires. On considère le cadre suivent. On a un actif sans risque B_t solution de $dB_t = r_t B_t dt$. On a aussi un marché de zéro coupons $p(t,T), t \leq T$ et $f(t,t) = r(t)$. Finalement on considère aussi un actif risqué X_t solution de l'équation

$$\frac{dX_t}{X_t} = r_t dt + \phi_t dW_t$$

cette équation étant considère sous la probabilité risque neutre. On fait l'hypothèse

$$\phi_t - S(t,T) \quad \text{est déterministe.}$$

Dans le modèle de Black Schooles classique $\phi_t = \sigma$ est une constante et le taux est fixe: $r_t = r$, donc $S(t,T) = 0$. Donc, bien qu'on n'est pas dans une situation complètement générale, on a quand même gagné en généralité. Notre but est de donner une formule pour le calcul du prix d'un call sur X_T analogue à la formule de Black Schooles.

Proposition 9. *On note $q = (\int_0^T |\phi_t - S(t,T)|^2\, dt)^{1/2}$. Alors le prix du call est donné par*

$$\Pi_0 := E^*(e^{-\int_0^T r_s ds}(X_T - K)_+) = x_0\Phi(d_1) - Kp(0,T)\Phi(d_2)$$

avec

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{q}(\ln(\frac{Kp(0,T)}{x_0}) - \frac{q^2}{2}), \quad d_2 = \frac{1}{q}(\ln(\frac{Kp(0,T)}{x_0}) + -\frac{q^2}{2}) \\ \Phi(d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_d^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx. \end{aligned}$$

Preuve. On écrit

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= E^*(e^{-\int_0^T r_s ds}X_T 1_{\{X_T>K\}}) - KE^*(e^{-\int_0^T r_s ds}1_{\{X_T>K\}}) \\ &= x_0 E^*(\frac{\widetilde{X}_T}{x_0}1_{\{X_T>K\}}) - Kp(0,T)E^*(\frac{\widetilde{p}(T,T)}{p(0,T)}1_{\{X_T>K\}}) \\ &= x_0 E^{\widetilde{X}}(1_{\{X_T>K\}}) - Kp(0,T)E^{\widetilde{p}(.,T)}(1_{\{X_T>K\}}) =: x_0 I - Kp(0,T)J. \end{aligned}$$

Calcul de J : On écrit et on emplois la formule de changement de numéraire (21) avec $X_t = \widetilde{X}_t$et $Y_t = \widetilde{p}(t,T)$

$$\begin{aligned} X_T &= \frac{X_T}{p(T,T)} = \frac{\widetilde{X}_T}{\widetilde{p}(T,T)} = \widetilde{X}_T^{\widetilde{p}(.,T)} \\ &= \frac{x_0}{p(0,T)}\exp(\int_0^T(\phi(t) - S(t,T))dW_t^{\widetilde{p}(.,T)} - \frac{1}{2}\int_0^T |\phi(t) - S(t,T)|^2\, ds) \end{aligned}$$

Je note

$$Z = \frac{1}{q}\int_0^T(\phi(t) - S(t,T))dW_t^{\widetilde{p}(.,T)}.$$

Comme $\phi(t) - S(t,T)$ est déterministe, Z est une variable Gaussiene standard sous $P^{\widetilde{p}(.,T)}$. Donc

$$\begin{aligned} J &= P^{\widetilde{p}(.,T)}(X_T > K) = P^{\widetilde{p}(.,T)}(\frac{x_0}{p(0,T)}\exp(qZ - \frac{q^2}{2})) > K) \\ &= P^{\widetilde{p}(.,T)}(Z > \frac{1}{q}(\ln\frac{Kp(0,T)}{x_0} + \frac{q^2}{2})) = \Phi(d_2). \end{aligned}$$

Calcul de I. On va employer le changement de numéraire avec le numéraire X. On écrit

$$X_T = \frac{X_T}{p(T,T)} = \frac{\widetilde{X}_T}{\widetilde{p}(T,T)} = \frac{1}{\widetilde{p}(T,T)/\widetilde{X}_T} = \frac{1}{\widetilde{p}^{\widetilde{X}}(T,T)}.$$

En employant (21) avec $X = \widetilde{p}(.,T)$ et $Y = \widetilde{X}$ on obtient

$$\begin{aligned}
\widetilde{p}^{\widetilde{X}}(T,T) &= \frac{p(0,T)}{x_0}\exp(\int_0^T (S(t,T)-\phi_t)dW_t^{\widetilde{X}} - \frac{1}{2}\int_0^T |\phi(t)-S(t,T)|^2\,ds) \\
&= \frac{p(0,T)}{x_0}\exp(qZ' - \frac{q^2}{2})
\end{aligned}$$

avec

$$Z' = \frac{1}{q}\int_0^T (S(t,T)-\phi_t)dW_t^{\widetilde{X}}.$$

Sous $P^{\widetilde{X}}$ Z' suit une loi normale standard donc

$$I = P^{\widetilde{X}}(\frac{1}{\widetilde{p}^{\widetilde{X}}(T,T)} > K) = P^{\widetilde{X}}(\exp(-qZ' + \frac{q^2}{2}) > \frac{Kp(0,T)}{x_0}) = P^{\widetilde{X}}(-Z' > d_1).$$

Comme $-Z'$ suit une loi normale standard la preuve est complète. $\square$

4. Taux LIBOR

4.1. Définition et dynamique des taux LIBOR dans le cadre HJM. On définit le taux LIBOR forward par

$$L(t,S,T) = \frac{p(t,S)-p(t,T)}{p(t,T)(T-S)}, \quad t \le S \le T.$$

C'est le taux sur la période (S,T) tel qu'il est vue au moment t. Et le taux LIBOR spot est donné par

$$L(S,T) = L(S,S,T) = \frac{1-p(S,T)}{p(S,T)(T-S)}.$$

La motivation de cette formule est la suivante: si on est au moment $t \le S$ on peu faire une opération qui nous permet d'investir un euros au moment S et d'obtenir $1 + R(T-S)$ euros au moment T avec $R = (p(t,S)-p(t,T))/p(t,T)(T-S)$. La stratégie est la suivante: au moment t on vend un $S-$bond et on achète $p(t,S)/p(t,T)$ bonds de maturité T. Opération de solde nul. Au moment S on paye un euros (pour honorer le $S-$bond) - donc on investi un euros. Et au moment T on reçoit $p(t,S)/p(t,T) > 1$. On écrit $p(t,S)/p(t,T) = 1 + R(T-S)$ avec $R = (p(t,S)-p(t,T))/p(t,T)(T-S)$.

Dans ce qui suit on considère qu'on est dans le cadre HJM donc la nappe de volatilité $\sigma(t,T) = (\sigma^1(t,T),...,\sigma^d(t,T)), 0 \leq t \leq T$ est donné et elle détermine complètement la dynamique des zéro coupons (condition de dérive de HJM). Notamment, sous la probabilité risque neutre on a

$$\frac{d\widetilde{p}(t,T)}{\widetilde{p}(t,T)} = \sum_{i=1}^{d} S^i(t,T)dW_t^i = S(t,T)dW_t \quad avec \quad S^i(t,T) = -\int_t^T \sigma^i(t,s)ds.$$

Notre premier but c'est de donner la dynamique des $LIBORs$ dans ce cadre. Soit $S < T$ fixé. On note $F(t) = L(t,S,T), \delta = T - S$ et

$$\beta_t^i = \frac{1+\delta F(t)}{\delta F(t)} \times \alpha_t^i \quad avec \quad \alpha_t^i = S^i(t,S) - S^i(t,T) = \int_S^T \sigma^i(t,s)ds. \tag{22}$$

Proposition 10. *Soit $dW_t^T = dW_t - S(t,T)ds$ le mouvement Brownien sous la probabilité forward P^T associé à $p(t,T)$. On a*

$$\frac{dF(t)}{F(t)} = \beta_t dW_t^T. \tag{23}$$

En particulier on voit que le numéraire naturellement associé à $L(t,S,T)$ est $p(t,T)$.

Preuve. On applique (20) avec $X_t = p(t,S)$ et $Y_t = p(t,S)$ et, en posant $\theta(t) = X_t/Y_t = p(t,S)/p(t,T)$, on obtient

$$\frac{d\theta_t}{\theta_t} = (S(t,S) - S(t,T))dW_t^T = \alpha_t dW_t^T.$$

Comme $F(t) = L(t,S,T) = \delta^{-1}(\theta_t - 1)$ on obtient $dF(t) = \delta^{-1}d\theta_t = \delta^{-1}\theta_t\alpha_t dW_t^T$ et donc

$$\frac{dF(t)}{F_t} = \frac{\theta_t}{\delta F_t}\alpha_t dW_t^T.$$

Finalement on observe que $\theta_t = 1 + \delta F_t$ et la preuve est complète. $\square$

On va maintenant décrire quelques contractes usuels.

Coupon Bonds. On fixe une grille de temps $0 < T_0 < T_1 < ... < T_n$ (qu'on appel tenor structure) et on ce donne aussi $c_i > 0$ (les coupons) et $K > 0$ (le pricipal). T_0 c'est le temps quand le contrat démarre et $T_i, i = 1,...,n$ sont les dates de payement des coupons c_i. Donc au moment T_i le détenteur du contrat reçoit la somme c_i. Au moment final T_n il reçoit le coupon c_n et le pricipal K. On peu voire ce contrat de la manière suivante: On dépose au moment T_0 à la banque le montant K. Et la banque paye des intérêts c_i sur les périodes $(T_{i-1}, T_i]$. Alors le taux sur la période $(T_{i-1}, T_i]$ est donné par l'égalité $c_i = K(T_i - T_{i-1})r_i$. On va donc appeler

$$r_i = \frac{c_i}{K(T_i - T_{i-1})}$$

le taux simple sur la période $(T_{i-1}, T_i]$. Noter quand même que r_i ne représentent pas des taux existants sur le marché mais c'est un taux qui est précisé par le contrat.

Il y a deux types de contrats: ou bien avec des taux $r_i, i = 1, ..., n$ fixés d'avances (à taux fixe) ou bien avec les taux r_i indexés sur un indice du marché - d'habitude sur le LIBOR: $r_i = L(T_{i-1}, T_i)$. Dans ce cas on a un contrat avec taux flottant (inconu au moment $t \leq T_0$).

Prix d'un coupon bond à taux fixes. Pour simplifier on va prendre $T_i - T_{i-1} = \delta$ et $r_i = r$. Donc $c_i = K\delta r$.

Pour établir le prix P_t du coupon bond au moment $t \leq T_0$ on essaye de couvrir le contrat avec des zéro coupons achète au prix du jour sur le marché. Pour pouvoir payer $c_i = K\delta r$ au moment T_i on va acheter c_i $T_i - bonds$ donc on paye $c_i p(t, T_i)$. La même chose pour le principal. Donc

$$P_t = Kp(t, T_n) + \sum_{i=1}^{n} c_i p(t, T_i) = K\left(p(t, T_n + r\delta \sum_{i=1}^{n} p(t, T_i)\right).$$

Prix d'un coupon bond à taux flottant. On considère un contrat à taux flottant LIBOR donc

$$c_i = K\delta L(T_{i-1}, T_i) = K\delta \times \frac{1 - p(T_{i-1}, T_i)}{\delta p(T_{i-1}, T_i)} = K(\frac{1}{p(T_{i-1}, T_i)} - 1).$$

On doit payer cette somme au moment T_i. Pour le faire on va employer la stratégie suivante:

1. Au moment t on vend K $T_i - bonds$ et on achète K $T_{i-1} - bonds$. Coût: $K(p(t, T_i) - p(t, T_{i-1}))$.

2. Au moment T_{i-1} on reçoit K et on achète avec cette somme $K/p(T_{i-1}, T_i)$ T_i-bonds. Opération de coût nul.

3. Au moment T_i on reçoit $K/p(T_{i-1}, T_i)$ et on paye K. Donc au total

$$K(\frac{1}{p(T_{i-1}, T_i)} - 1) = c_i.$$

On a donc produit c_i en investissant $K(p(t, T_{i-1}) - p(t, T_i))$. Le prix total c'est

$$P_t = Kp(t, T_n) + K\sum_{i=1}^{n}(p(t, T_{i-1}) - p(t, T_i)) = Kp(t, T_0).$$

Conclusion: pour couvrir un coupon bound à taux flottant LIBOR il suffit de couvrir le principal au moment initial T_0. Le résultat parait surprenant mais en fait c'est naturel: comme les taux du contrat sont les mêmes que les taux du marché, si on arrive au moment T_0, après le marché fait lui, même le travail.

Caps and Floors. On définit un caplet comme

$$\chi_i = K\delta(L(T_{i-1}, T_i) - R)_+.$$

Un contrat cap c'est un contrat qui paye χ_i au moment T_i. R s'appele le taux du cap. C'est un contrat d'assurance (un call) contre les variations du LIBOR: le vendeur d'un coupon bond à taux flottant LIBOR s'assure contre le fait que les LIBOR serons plus grandes que le taux R.

Le flooret est un put sur le LIBOR donc un floor paye $K\delta(R - L(T_{i-1}, T_i))_+$ aux moments T_i.

On peu calculer le prix d'un caplet de deux manières.

Méthode I: En employant la probabilité risque neutre. La difficulté pour pricer un cap c'est que le taux LIBOR ne représente pas un actif négocié sur le marché. Donc si on vœu couvrir un tel contrat il faut exprimer tout en termes de zéro coupons - qui sont négociés. On a donc:

Proposition 11. *Le prix Π_i d'un caplet d'échéance T_i est équivalent au prix d'un put d'échéance T_{i-1} et de strike* $1/(1 + \delta R)$ *sur T_i- bond. Plus précisément on a*

$$\Pi_i(t) = K(1 + \delta R)E^*(e^{-\int_t^{T_{i-1}} r_s ds}(\frac{1}{1 + \delta R} - p(t, T_i))_+ \mid F_t). \tag{24}$$

Preuve. Je note $L = L(T_{i-1}, T_i), p = p(T_{i-1}, T_i)$ et $R' = 1 + \delta R$. Et on calcule

$$\chi_i = K\delta(\frac{1-p}{\delta p} - R)_+ = K(\frac{1}{p} - R')_+ = \frac{KR'}{p}(\frac{1}{R'} - p)_+.$$

Pour payer $x/p(T_{i-1}, T_i)$ au moment T_i il suffit d'avoir x au moment T_{i-1}. Donc pour payer χ_i au moment T_i il suffit d'avoir $KR'(\frac{1}{R'} - p)_+$ au moment T_{i-1}. On applique la formule de pricing sous la probabilité risque neutre on obtient (24). $\square$

Remarque. Si on suppose que $S(t, T_{i-1}) - S(t, T_i)$ est déterministe, on peu appliquer la formule de Black Schooles du paragraphe précédent et on obtient une formule fermé pour le prix.

Méthode II: en employant les probabilités forward.

Proposition 12.

$$\Pi_i(t) = p(t, T_i)E^{T_i}((L(T_{i-1}, T_i) - R)_+) \mid F_t) \tag{25}$$

Preuve. On a le pyoff $\chi_i = K\delta(L(T_{i-1}, T_i) - R)_+$. Comme on a vue dans la démonstration de la Proposition précédente on peu couvrir cet actif de la manière suivante: on construit un portefeuille $V(t)$ tel que $V(T_{i-1}) = KR'(\frac{1}{R'} - p(T_{i-1}, T_i))_+$ et on a

$$\chi_i = \frac{V(T_{i-1})}{p(T_{i-1}, T_i)}.$$

On applique le lemme de changement de numéraire avec $X_t = V(t)$ et $Y_t = p(t, T_i), t \leq T_{i-1}$ et on obtient la formule. $\square$

Remarque. On rappel (voire (23)) que

$$\frac{dL(t, T_{i-1}, T_i)}{L(t, T_{i-1}, T_i)} = \beta_i(t) dW_t^{T_i}$$

pour une certaine volatilité β_i. Si on fait l'hypothèse que β_i est déterministe alors on aura une dynamique log-normale pour $L(t, T_{i-1}, T_i)$ sous P^{T_i} donc on peu appliquer la formule de Black Schooles et on obtient une forme fermé pour le prix. C'est l'idée des modèles de marché: un modèle de marché dans lequel les volatilités des LIBORs $\beta_i, i = 1, ..., n$ sont des fonctions déterministes s'appel "**LIBOR Market Model**". Ces modèles ont été introduites par Brace, Gathareck et Musiela - on les appellent aussi **modèles BGM**. On revient plus tard sur ce sujet. Précisons pour le moment que ce n'est pas possible d'avoir en même temps $S(t, T_{i-1}) - S(t, T_i)$ et β déterministes: sinon $L(t, T_{i-1}, T_i)$ lui même est déterministe (voir la forme de β dans (22)). Donc on ne peu pas avoir des formule fermés pour le prix dans les deux approches en même temps.

4.2. SWAP options. C'est une option qui permet de changer un taux fixe contre un taux flottant. Plus précisément on ce donne $T_0 < T_1 < ... < T_n$ et on ce donne aussi un taux $r > 0$ arbitraire. Le contrat swap garantit qu'on peu changer (si on le veu) le taux fixe r contre le taux flottant donné par le $LIBORs$, donc, à chaque moment $T_i, i = 1, ..., n$ on paye $c_i = r\delta K$ et on reçoit $L(T_{i-1}, T_i)\delta K$.

Pour calculer le prix du contrat on observe qu'au moment T_i le vendeur du contrat paye à l'acheteur

$$K\delta(L(T_{i-1}, T_i) - r) = K(\frac{1}{p(T_{i-1}, T_i)} - 1 - r\delta).$$

Pour couvrir le vendeur achète au moment $t \leq T_0$ des T_i bonds, donc il a besoin de

$$K(\frac{p(t, T_i)}{p(T_{i-1}, T_i)} - (1 + r\delta)p(t, T_i)) = K(p(t, T_{i-1}) - (1 + r\delta)p(t, T_i)).$$

L'égalité est une conséquence de l'identité $p(t, T_i) = p(t, T_{i-1})p(T_{i-1}, T_i)$ (cette égalité est vrais: si on dispose de la somme $p(t, T_{i-1})p(T_{i-1}, T_i)$ au moment t on peu acheter

$p(T_{i-1},T_i)$ $T_{i-1}-$bonds. Et au moment T_{i-1} on reçois $p(T_{i-1},T_i)$ et on achète un T_i bond. Finalement au moment T_i on reçoit un euro).

On conclut que le prix total du contrat au moment $t \leq T_0$ est donné par

$$p(t) = K\sum_{i=1}^{n}(p(t,T_{i-1}) - (1+r\delta)p(t,T_i)) = K(p(t,T_0) - p(t,T_n) - r\delta\sum_{i=1}^{n}p(t,T_i)).$$

Definition 1. ***(SWAP rate)***. *Le taux swap c'est le taux fixe qui permet d'entrer dans le swap sans rien payer (qui annule le rpix du contrat swap), donc*

$$r_{0,n}(t) = \frac{p(t,T_0) - p(t,T_n)}{\delta\sum_{i=1}^{n}p(t,T_i)}, \quad t \leq T_0.$$

Si $t = T_0$ on parle de "taux swap spot":

$$r_{0,n}(T_0) = \frac{1 - p(T_0,T_n)}{\delta\sum_{i=1}^{n}p(t,T_i)}.$$

Remarque: On voit que le numéraire naturel associé au taux swap c'est $U_t = \sum_{i=1}^{n}p(t,T_i)$, $t \leq T_0$. Sous la probabilité P^U associé à U le taux swap va être une martingale.

On va maintenant considérer une option call sur le taux swap. On fixe $k \in \{0,...,n-1\}$ et on vœu faire un contrat qui nous permet d'entrer dans le swap au moment T_k sans rien payer. Au moment T_k le taux swap spot est

$$r_{k,n}(T_k) = \frac{1 - p(T_k,T_n)}{\delta\sum_{i=k+1}^{n}p(t,T_i)}.$$

Si on accepte de payer $r = r_{k,n}(T_k)\delta K$ au moments $T_i, i = k+1,...,n$ alors on peu reçevoire $L(T_{i-1},T_i)\delta K$ sans avoir rien à payer au moment $t \leq T_k$. Mais au moment $t \leq T_k$ $r_{k,n}(T_k)$ n'est pas connut donc on vœu s'assurer contre un taux trop élevé. On fixe $R > 0$ et on vœu faire un contrat qui nous permet (mais ne nous oblige pas) d'entrer dans le swap au moment T_k, avec le taux R et sans rien payer. Un tel contrat s'appele un call de taux R sur le swap rate.

Calculons le prix. On commence par préciser le payoff. Le vendeur du contrat doit produire $\delta(r_{k,n}(T_k) - R)_+$ aux moments $T_i, i = k+1,...,n$. Pour ça il doit avoir $\delta(r_{k,n}(T_k) - R)_+\sum_{i=k+1}^{n}p(T_k,T_i)$ au moment T_k. En effet, s'il a cette somme, alors il achète des T_i bounds $i = k+1,...,n$ et il rentre gratuitement dans le swap au moment T_k avec le taux $r_{k,n}(T_k)$. Au moment T_i, il bénéficie du *swap*, donc il paye $\delta r_{k,n}(T_k)$ et il reçoit $\delta L(T_{i-1},T_i)$. Après il paye $\delta L(T_{i-1},T_i)$ à l'acheteur et il reçoitn de lui δR. Donc au total il paye $\delta(r_{k,n}(T_k) - R)$. Mais cette somme est produite par le $T_i - bond$

qu'il a acheté au début. Bien sur, si $r_{k,n}(T_k) - R < 0$ l'acheteur de l'option ne va pas exercer et c'est pourquoi la partie positive apparaît. On conclut que la call est un contrat qui paye au moment T_k

$$H = \delta(r_{k,n}(T_k) - R)_+ \sum_{i=k+1}^{n} p(T_k, T_i) = 1 - p(T_k, T_n) - \delta R \sum_{i=k+1}^{n} p(T_k, T_i).$$

On note que $p(t, T_i), i = 1, n$ sont négociables donc H est simulable. On va donc pouvoir le pricer par changement de numéraire. On note $U_{k,n}(t) = \sum_{i=k+1}^{n} p(t, T_i)$, $e_{n,k}(t) = \widetilde{U}_{k,n}(t)/U_{k,n}(0)$ et $dP_{k,n} = e_{k,n}(T_k)dP$. Alors le lemme de changement de numéraire nous donne le prix du call au moment $t \leq T_k$. On prend un portefeuille tel que $V_{T_k} = H$ et on écrit

$$\begin{aligned}
\Pi_{k,n}(0) &= V_0 = E^*(\widetilde{V}_{T_k}) = U_{k,n}(0)E^*(\frac{\widetilde{U}_{k,n}(T_k)}{U_{k,n}(0)} \times \frac{\widetilde{V}_{T_k}}{\widetilde{U}_{k,n}(T_k)}) \\
&= U_{k,n}(0)E^*(e_{k,n}(T_k) \times \frac{V_{T_k}}{U_{k,n}(T_k)}) = U_{k,n}(0)E^{k,n}(\frac{H}{U_{k,n}(T_k)}) \\
&= U_{k,n}(0)E^{k,n}((r_{k,n}(T_k) - R)_+).
\end{aligned}$$

On sait que $r_{k,n}$ est une martingale positive sous $P_{k,n}$. On note donc par $W^{k,n}$ le mouvement Brownain sous $P_{k,n}$ et on a

$$\frac{dr_{k,n}(t)}{r_{k,n}(t)} = \theta_{k,n}(t)dW^{k,n}(t).$$

Si on fait l'hypothese supplémantaire que les volatilités $\theta_{k,n}$ sont déterminsites alors on peu calculer $\Pi_{k,n}(0)$ par la formule de Black Schooles - donc on a une forme fermé pour le prix. Cette facilité a motivé l'introduction **"Swap Market Model":** ce sont des modèles de marché tel que $\theta_{k,n}(t), k = 1, n$ sont déterministes. Ils ont été introduits par Jamischdian.

On sait que les Swap Market Models sont incompatibles avec les LIBOR Market Models. Ceci vœu dire la chose suivante: Pour toute structure de volatilité des swap $\theta_{k,n}, k = 1, n$ donné on peu trouver une structure de volatilité des zéro coupons $\sigma(t, T), t \leq T$ qui produit $\theta_{k,n}, k = 1, n$. Et la même chose si on ce donne les volatilités $\beta_k, k = 1, n$ des LIBORS. Mais pour une même structure de volatilité $\sigma(t, T), t \leq T$ on n'obtient jamais θ_k et β_k déterministes simultanément. On conclut qu'on ne peu pas être en même temps avec un modèle swap et LIBOR. Ceci pose problème: des gens qui veulent prices des produits dans un marché de swap vont callibrer en terms de Swap Market Models - mais alors il ne peuvent pas callibrer des produits sur le LIBOR (au moins pas avec des formules fermé donnés par le LIBOR Market Models).

4.3. LIBOR Market Models. On considère un cadre HJM associé à un mouvement Brownien $W = (W^1, ..., W^d)$ et de volatilité $\sigma(t,T) = (\sigma_1(t,T), ..., \sigma_d(t,T)), t \leq T$. On ce donne aussi une grille de temps $T_0 < T_1 < ... < T_n$ qui sera fixé dans la suite et on note par $L(t, T_{i-1}, T_i)$ les LIBORs associés. Alors on sait que (voire (23))

$$\frac{dL(t,T_{i-1},T_i)}{L(t,T_{i-1},T_i)} = \sum_{j=1}^{d} \beta_i^j(t) dW_t^{T_i}, \quad i = 1, ..., n \tag{26}$$

ou $W_t^{T_i}$ est le mouvement Brownien associé au numéraire $p(t, T_i)$ et

$$\beta_i^j(t) = \frac{1 + \delta L(t,T_{i-1},T_i)}{\delta L(t,T_{i-1},T_i)} \times \alpha_i^j(t) \quad avec \quad \alpha_i^j(t) = S^j(t,T_{i-1}) - S^j(t,T_i) = \int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma^j(t,s)ds.$$

On rappel aussi qu'un modèle tel que $\beta = (\beta_i^j(t), i = 1, ..., n, j = 1, ..., d)$ sont déterministes s'appel LIBOR Market Model ou BGM. Notre but c'est de ce donner β arbitraire (en particulier déterministe) et de construire un nappe de volatilité $\sigma(t,T), t \leq T$ tel que dans le cadre HJM associé à σ la volatilité des LIBORs soit donné par β. Comme conséquence on démontre que, si les LIBORs suivent la dynamique donné dans (26), on obtient un modèle ou il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage (car sinon il y aura un arbitrage dans HJM). J'observe aussi que l'hypothése que les LIBORs suivent la dynamique donné dans (26) avec des volatilité β déterministes été implicite dans des pratiques de pricing employé sur le marché. Et finalement pourquoi ne pas prendre β déterministes? Vue qu'on va passer par une procédure de callibration ceci revient juste a restreindre la classe des paramètres qu'on emplois pour retrouver les prix de marché à des paramètres déterministes. Sauf qu'il faut vérifier que le modèle qu'on propose ne produit pas d'opportunité d'arbitrage. Le problème de l'arbitrage peu être posé en dehors du cadre HJM : on oublie la dynamique des zéro coupons et on suppose juste que les LIBORs suivent la dynamique donné dans (26) avec des volatilité β déterministes. Et on démontre directement que ce modèle ne produit pas d'arbitrage - ce type d'approche est donné dans Brigo-Mercurio ou Hunt-Kennedy par exemple.

Dans (26) la dynamique de chaque $L(t, T_{i-1}, T_i)$ est donné sous une probabilité différente P^{T_i}. On vœu obtenir la dynamique de tous les LIBORs sous une même probabilité. Ceci peu être n'importe laquelle des $P^{T_i}, i = 1, ..., n$ mais d'habitude on emplois P^{T_n}.

Proposition 13. *Sous P^{T_n} les LIBORs $F_i(t) := L(t, T_{i-1}, T_i)$ vérifient*

$$\begin{aligned} \frac{dF_i(t)}{F_i(t)} &= \beta_i(t)dW_t^{T_n} - \langle \beta_i(t), \mu_{i,n}(t) \rangle \, dt \quad \textit{avec} \\ \mu_{i,n}(t) &= \sum_{j=i+1}^{n} \frac{\delta_j F_j(t)}{1 + \delta_j F_j(t)} \times \beta_j(t) \quad \textit{et} \quad \mu_{n,n} = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Preuve. On a $dW_t^{T_i} = dW_t^* - S(t, T_i)dt$ donc

$$dW_t^{T_i} - dW_t^{T_{i+1}} = (S(t, T_{i+1}) - S(t, T_i))dt = \alpha_{i+1}(t)dt.$$

On a aussi

$$\beta_{i+1}(t) = \frac{1 + \delta_{i+1}F_{i+1}(t)}{\delta_{i+1}F_{i+1}(t)} \times \alpha_{i+1}(t)$$

donc

$$dW_t^{T_i} = dW_t^{T_{i+1}} + \frac{\delta_{i+1}F_{i+1}(t)}{1 + \delta_{i+1}F_{i+1}(t)} \times \beta_{i+1}(t)dt.$$

On ittêre et on obtient $dW_t^{T_i} = dW_t^{T_n} + \mu_{i,n}(t)dt$. Et on remplace dans (26). □

Proposition 14. *Supposons que $T_0 < T_1 < ... < T_n$ et $\beta = (\beta_i^j(t), i = 1, ..., n, j = 1, ..., d)$ sont donnés. Alors il existe une nappe de volatilité $\sigma(t, T), t \leq T$ tel que les LIBORs $L(t, T_{i-1}, T_i)$ suivent la dynamique (26). En particulier, le modèle BGM ne produit pas d'opportunité d'arbitrage.*

Preuve. On construit σ en plusieurs étapes.

Etape 0. On s'installe sur un espace de probabilité ou un mouvement Brownien $W = (W^1, ..., W^d)$ est donné. Il va jouer le rôle de W^{T_n}. On ce donne aussi, d'une manière arbitraire, un processus $\overline{S}_n(t)$ borné et adapté. Il va jouer le rôle de $S(t, T_n)$.

Etape 1. Je résout l'équation

$$\frac{d\overline{F}_n(t)}{\overline{F}_n(t)} = \beta_n(t)dW_t - \langle \beta_n(t), \overline{S}_n(t) \rangle \, dt$$

avec $\overline{F}_n(0) = L(0, T_{n-1}, T_n)$ (qui est donné sur le marché). La solution est

$$\overline{F}_n(t) = L(0, T_{n-1}, T_n) \exp(\int_0^t \beta_n(s)dW_s - \int_0^t (\langle \beta_n(s), \overline{S}_n(s) \rangle + \frac{1}{2} |\beta_n(s)|^2)ds).$$

On doit être sur que β_n vérifie la condition de Novikov pour pouvoir définir l'exponentielle stochastique - mais ceci est assurément vrais si β_n est une fonction déterministe.

En ce moment on a

$$\mu_{n-1,n}(t) = \frac{\delta_n \overline{F}_n(t)}{1+\delta_n \overline{F}_n(t)} \times \beta_n(t).$$

Etape 2. Résout *l'EDS*

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{F}_{n-1}(t)}{\overline{F}_{n-1}(t)} &= \beta_{n-1}(t)dW_t - \left\langle \beta_{n-1}(t), \mu_{n-1,n}(t) \right\rangle dt \\ &= \beta_{n-1}(t)dW_t - \frac{\delta_n \overline{F}_n(t)}{1+\delta_n \overline{F}_n(t)} \left\langle \beta_{n-1}(t), \beta_n(t) \right\rangle dt, t \leq T_{n-2},\end{aligned}$$

avec $\overline{F}_{n-1}(0) = L(0, T_{n-2}, T_{n-1})$. La solution est donné par

$$\begin{aligned}\overline{F}_n(t) &= L(0, T_{n-2}, T_{n-1}) \\ &\quad \times \exp(\int_0^t \beta_{n-1}(s)dW_s - \int_0^t (\frac{\delta_n \overline{F}_n(s)}{1+\delta_n \overline{F}_n(s)} \left\langle \beta_{n-1}(s), \beta_n(s) \right\rangle + \frac{1}{2} \left|\beta_n(s)\right|^2)ds).\end{aligned}$$

On note que la fonction $x \to x/(1+x)$ est borné pour $x > 0$ et que $\overline{F}_n(s) > 0$. Donc il n'y a pas de problème pour définir l'exponentielle stochastique.

En ce moment on a

$$\mu_{n-2,n}(t) = \frac{\delta_n \overline{F}_n(t)}{1+\delta_n \overline{F}_n(t)} \times \beta_n(t) + \frac{\delta_{n-1} \overline{F}_{n-1}(t)}{1+\delta_{n-1} \overline{F}_{n-1}(t)} \times \beta_{n-1}(t).$$

Etape i. On a déjà $\mu_{i,n}(t)$ et on résout

$$\frac{d\overline{F}_i(t)}{\overline{F}_i(t)} = \beta_i(t)dW_t - \beta_i(t)\mu_{i,n}(t)dt, \quad \overline{F}_i(0) = L(0, T_{i-1}, T_i)$$

et on calcule $\mu_{i-1,n}(t)$.

On continue et finalement on obtient la solution du système

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{F}_i(t)}{\overline{F}_i(t)} &= \beta_i(t)dW_t - \left\langle \beta_i(t), \mu_{i,n}(t) \right\rangle dt, \quad i = 1, ..., n \\ \mu_{i,n}(t) &= \sum_{j=i+1}^{n} \frac{\delta_j \overline{F}_j(t)}{1+\delta_j \overline{F}_j(t)} \times \beta_j(t) \quad et \quad \mu_{n,n} = 0.\end{aligned} \tag{28}$$

On définit maintenant $S(t,T)$ de la manière suivante. On met $S(t, T_n) = \overline{S}_n(t)$. Après on vœu avoir

$$S(t, T_{i-1}) - S(t, T_i) = \beta_i(t) \times \frac{\delta_i \overline{F}_i(t)}{1+\delta_i \overline{F}_i(t)}$$

ce qui revient à
$$\int_{T_{i-1}}^{T_i} \sigma(t,s)ds = \beta_i(t) \times \frac{\delta_i \overline{F}_i(t)}{1+\delta_i \overline{F}_i(t)}.$$
Pour obtenir cette égalité je prend
$$\sigma(t,s) = \beta_i(t) \times \frac{\overline{F}_i(t)}{1+\delta_i \overline{F}_i(t)} \quad pour \quad t \leq T_i, s \in (T_i, T_{i+1}).$$

Pour $T_{i-1} \leq t \leq s \leq T_i$ je prend une valeur arbitraire pour $\sigma(t,s)$ par exemple la même: $\sigma(T_{i-1}, s)$.

Finallment on construit la probabilité risque neutre
$$dW^* = dW_t + S(t, T_n)dt.$$

Et on ce met dans le HJM correspondant. Donc sous la probabilité risque neutre on a la dynamique des forward rates donné par
$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW_t^*$$
avec α donné par la condition de dérive de HJM. Dans ce modéle HJM on aura $dW_t^{T_n} = dW_t$ donc (28) nous donne la dynamique voulut. $\square$

Remarque. Si β est déterministe, alors σ est aléatoire. On peu vérifier aussi que pour aucun des modèles de taux courts on n'obtient β déterministe.

5. BIBLIOGRAPHIE

1. Brigo D., Mercurio F. (2000) Interest Rate Models, Theory and Practice, Springer Finance.

2. Lamberton D., Lapayre B. (1991) Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance. Ellipses.

3. Musiela M., Rutkowski M. (1997) Martingale Methods in Financila Modeling. Sprnger.

4. Bjork T. (1998) Arbitrage Theory in Continuous Time, Oxford University Press.

5. Hunt Phil J., Kennedy J: (1999).Markov-Functional Interest Rate Models, Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=49240 or DOI: 10.2139/ssrn.49240