

ENPC – BETON ARME

CALCUL DU FERRAILLAGE D'UNE PLAQUE A L'ELU

SOMMAIRE

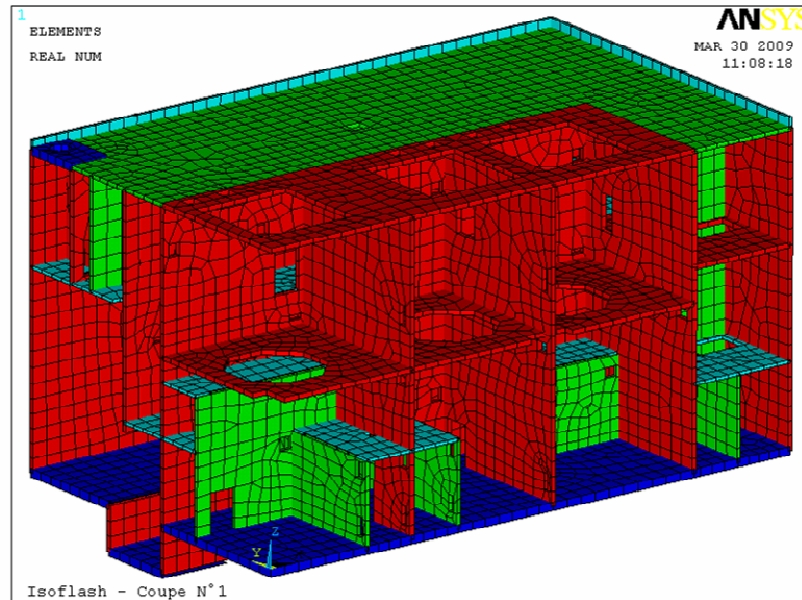
1	PRESENTATION.....	2
1.1	Utilisation croissante des modèles de calcul aux éléments finis.....	2
1.2	Efforts appliqués.....	2
1.3	Objectif	3
2	PLAQUE SOUMISE UNIQUEMENT A DES EFFORTS DE MEMBRANE : METHODE DE WOOD	4
2.1	Présentation	4
2.2	Enoncé de la méthode de Wood.....	4
2.3	Justification dans le cas particulier du cisaillement simple	5
2.4	Justification dans le cas général - Avec 3 efforts F_{xx} , F_{yy} et F_{xy}	5
2.5	Justification dans le cas : $R_y + F_{xy} < 0$	8
2.6	Interprétation de l'équilibre acier / béton	9
3	PLAQUE SOUMISE A DES EFFORTS QUELCONQUES : METHODE DE CAPRA-MAURY.....	10
3.1	Présentation	10
3.2	Méthode	10

1 PRESENTATION

1.1 Utilisation croissante des modèles de calcul aux éléments finis

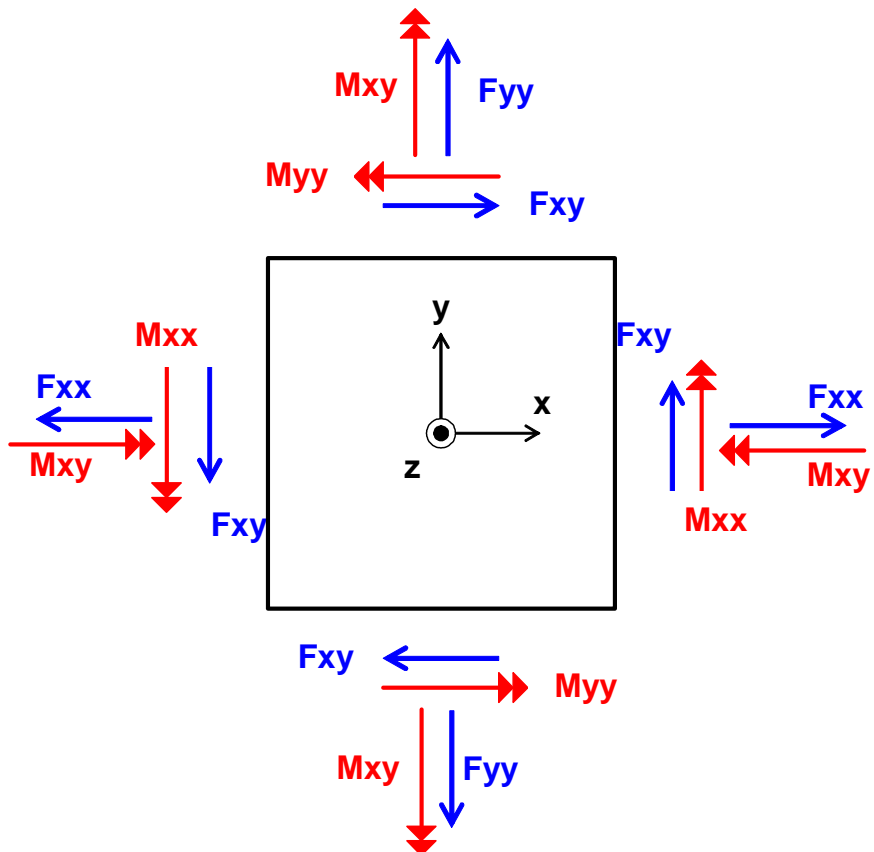
Les structures sont de plus en plus fréquemment justifiées par des calculs éléments finis -> modélisation des voiles, planchers, etc. en éléments de coques.

D'où la nécessité de pouvoir calculer les armatures à mettre en place dans les coques.



Exemple - Bâtiment « Isoflash » de l'usine Comurhex Malvés

1.2 Efforts appliqués



On considère un élément infiniment petit au droit d'un nœud

- 3 efforts de membrane : F_{xx} , F_{yy} et F_{xy} (en MN/ml)
- 3 moments (flexion, torsion) : M_{xx} , M_{yy} et M_{xy} (en MN.m/ml)

Élément infiniment petit => efforts opposés sur les différentes faces

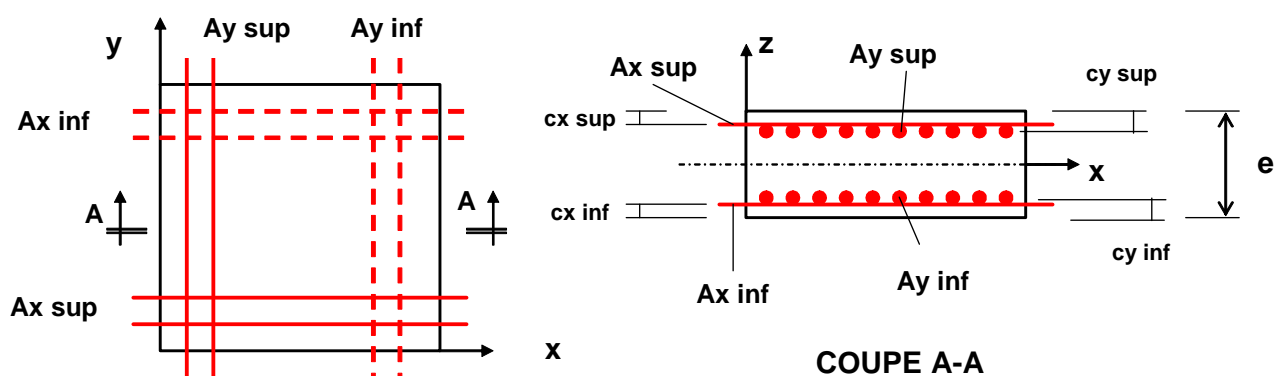
Application du théorème de Cauchy => cisaillements identiques sur les différentes faces

Convention de signes :

- $F > 0$ en traction
- $M > 0$ s'il tend la face sup ($z > 0$)
- $M_{xy} > 0$ s'il crée des cisaillements > 0 en face sup

1.3 Objectif

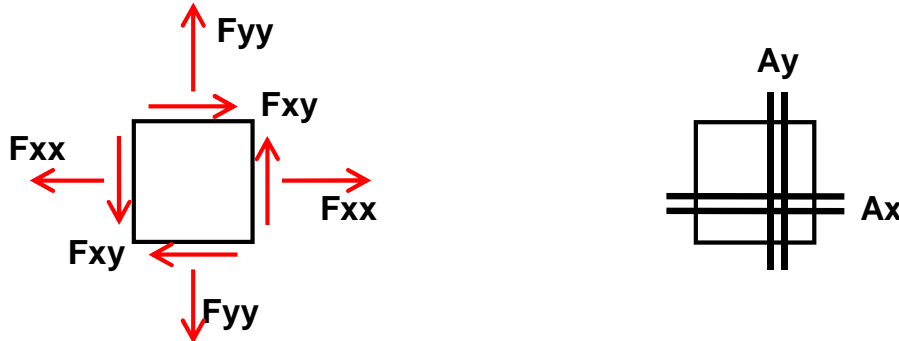
- Plaque d'épaisseur e
- Objectif : déterminer les 4 nappes d'armatures (en cm^2/ml).



2 PLAQUE SOUMISE UNIQUEMENT A DES EFFORTS DE MEMBRANE : METHODE DE WOOD

2.1 Présentation

Plaque d'épaisseur « e » soumise uniquement à des efforts F_{xx} , F_{yy} et F_{xy} (à l'ELU).



Objectif : déterminer le ferrailage nécessaire pour résister à ces efforts ELU (en cm^2/ml).

2.2 Enoncé de la méthode de Wood

- (i) Il faut placer des aciers équilibrant les efforts suivants (>0 en traction) :
- dans le sens X : $R_x = F_{xx} + |F_{xy}|$
 - dans le sens Y : $R_y = F_{yy} + |F_{xy}|$

On aura donc :

- $A_x = R_x / f_{yd}$
- $A_y = R_y / f_{yd}$

avec $f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s$

- (ii) Si l'une de ces quantités est négative, les formules deviennent :

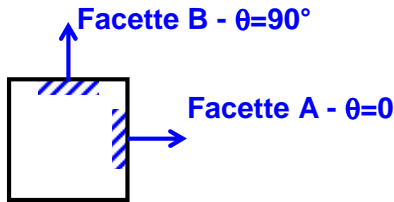
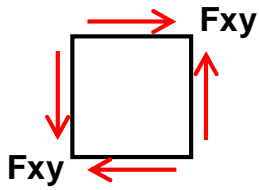
1^{er} cas - $R_x < 0$: $R_x = 0$
 $R_y = F_{yy} + F_{xy}^2 / |F_{xx}|$

2^{ème} cas - $R_y < 0$: $R_y = 0$
 $R_x = F_{xx} + F_{xy}^2 / |F_{yy}|$

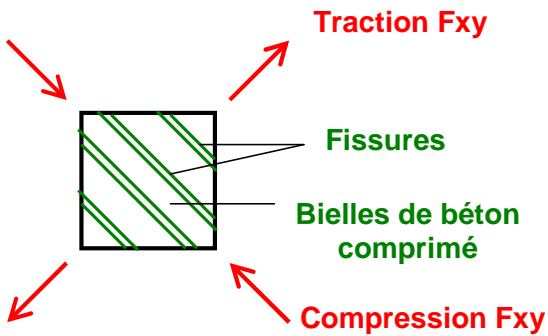
- (iii) Si les 2 quantités R_x et R_y sont < 0 , on adopte : $R_x = 0$ et $R_y = 0$

2.3 Justification dans le cas particulier du cisaillement simple

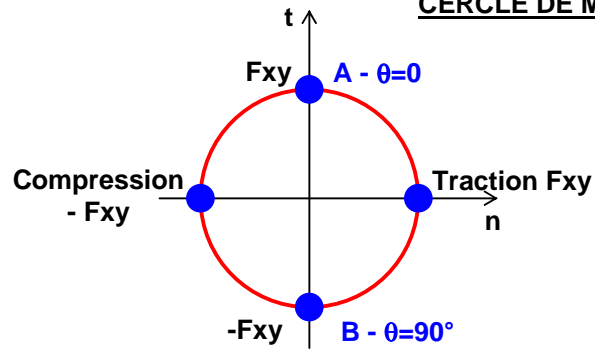
EFFORTS APPLIQUES



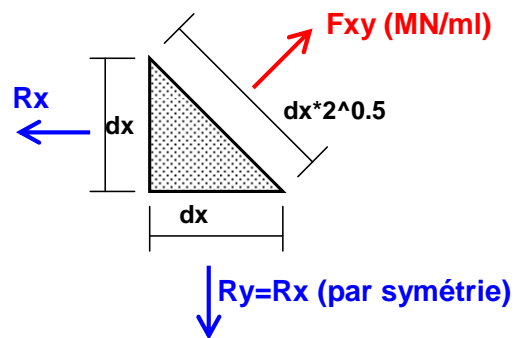
EFFORTS PRINCIPAUX



CERCLE DE MOHR



EFFORTS REPRIS PAR LES ARMATURES : Rx et Ry

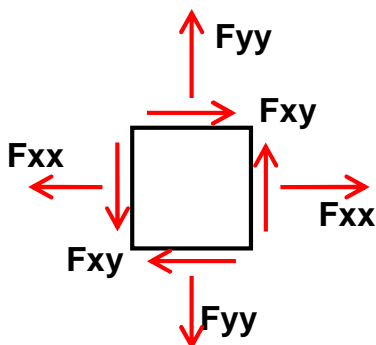


Equilibre horizontal : $-Rx \cdot dx + (F_{xy} \cdot dx \cdot \sqrt{2}) \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow$

$Rx = Fxy = Ry$

cqfd

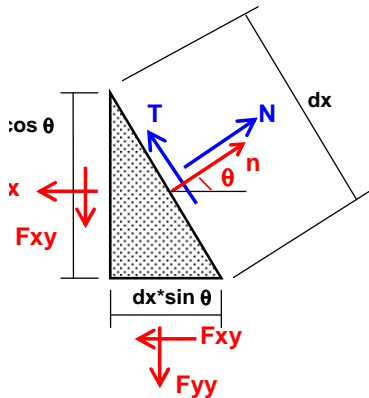
2.4 Justification dans le cas général - Avec 3 efforts Fxx, Fyy et Fxy



Par analogie avec ce qui précède, on calcule l'effort s'exerçant perpendiculairement à une facette d'angle θ quelconque.

a) Efforts s'exerçant sur une facette quelconque d'angle θ

* 1ère méthode : équilibre d'un coin



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{xx} \cdot dx \cdot \cos \theta - F_{xy} \cdot dx \cdot \sin \theta + N \cdot dx \cdot \cos \theta - T \cdot dx \cdot \sin \theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_{xy} \cdot dx \cdot \cos \theta - F_{yy} \cdot dx \cdot \sin \theta + N \cdot dx \cdot \sin \theta + T \cdot dx \cdot \cos \theta = 0$$

On pose $C = \cos \theta$ et $S = \sin \theta$

On veut calculer N et éliminer T =>

- 1^{ère} équation x $\cos \theta$

- 2^{ème} équation x $\sin \theta$

d'où $N = C^2 \cdot F_{xx} + S^2 \cdot F_{yy} + 2CS \cdot F_{xy}$

* 2^{ème} méthode : calcul matriciel

- Tenseur des efforts appliqués

Dans le repère général (O, X, Y), le tenseur des efforts appliqués s'écrit : $(F) = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{pmatrix}$

- 1^{ère} colonne = efforts s'exerçant sur la facette $\theta=0$

- 2^{ème} colonne = efforts s'exerçant sur la facette $\theta=90^\circ$

- Changement de base

Dans un repère tourné d'un angle θ , on a :

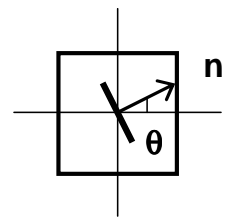
$$[F(\theta)] = {}^t P \cdot F \cdot P \quad \text{avec } P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [F(\theta)] = \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C \cdot F_{xx} + S \cdot F_{xy} & -S \cdot F_{xx} + C \cdot F_{xy} \\ C \cdot F_{xy} + S \cdot F_{yy} & -S \cdot F_{xy} + C \cdot F_{yy} \end{pmatrix}$$

$$[F(\theta)] = \begin{pmatrix} C^2 \cdot F_{xx} + S^2 \cdot F_{yy} + 2CS \cdot F_{xy} & \dots \\ CS \cdot (F_{yy} - F_{xx}) + (C^2 - S^2) \cdot F_{xy} & \dots \end{pmatrix}$$

Le 1^{er} terme de cette matrice correspond à l'effort s'exerçant perpendiculairement à une facette de normale θ :

$$F(\theta) = C^2 \cdot F_{xx} + S^2 \cdot F_{yy} + 2CS \cdot F_{xy}$$



b) Effort résistant selon cette même facette d'angle θ

- Matrice dans le repère (O,x,y)

On fait l'hypothèse que les aciers ne peuvent exercer qu'un effort parallèle à leur direction.

Le tenseur des efforts résistants vaut donc dans le repère général :

$$[R] = \begin{pmatrix} R_x & 0 \\ 0 & R_y \end{pmatrix}$$

- **Changement de repère**

En appliquant les relations de changement de base précédemment établies, on aura dans un repère tourné d'un angle θ : $R(\theta) = C^2.R_x + S^2.R_y$

c) **Mise en équation**

La résistance de la section sera assurée si $R(\theta) > F(\theta)$

soit $C^2.R_x + S^2.R_y > C^2.F_{xx} + S^2.F_{yy} + 2CS.F_{xy}$ quel que soit l'angle θ . (1)

Ceci soit en particulier être vrai pour $\theta=0 \Rightarrow C=1$ et $S=0 \Rightarrow R_x > F_{xx}$
 $\theta=\pi/2 \Rightarrow C=0$ et $S=1 \Rightarrow R_y > F_{yy}$

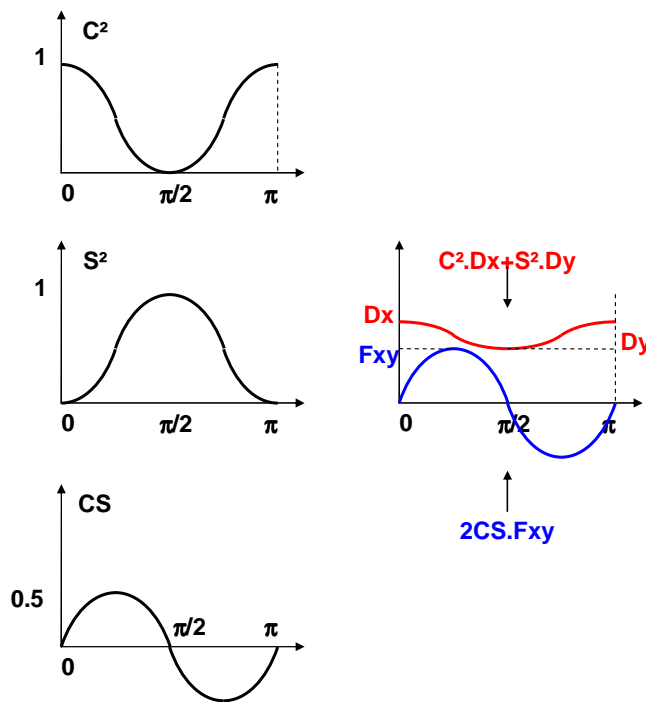
Mais il est clair que si on prend juste $R_x = F_{xx}$ et $R_y = F_{yy}$, la relation (1) ci-dessus ne sera pas vérifiée pour certains angles θ , par suite de la présence de F_{xy} . Il faut donc mettre plus d'acier.

d) **Détermination des sections d'acier nécessaires**

On pose $D_x = R_x - F_{xx}$ Quantité d'acier « à mettre en plus ».
 $D_y = R_y - F_{yy}$

L'équation devient : $C^2 \cdot D_x + S^2 \cdot D_y > 2CS \cdot F_{xy}$ (2)

Essayons de représenter graphiquement les choses.



Il est clair que $D_x = D_y = |F_{xy}|$ est une solution.

e) **Caractère optimal de cette solution**

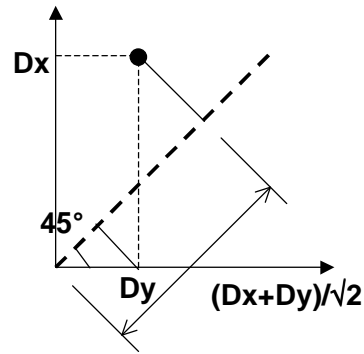
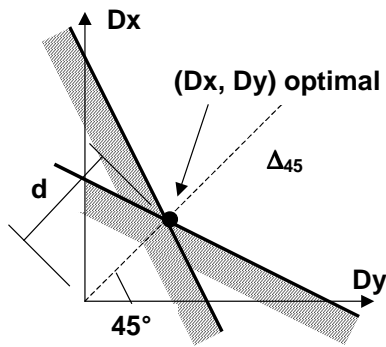
On peut démontrer qu'il s'agit de la solution optimale, qui minimise la quantité d'acier totale à mettre en place, c'est-à-dire $D_x + D_y$.

En effet, la relation (2) ci-dessus peut s'écrire : $f(\theta) = C^2 \cdot D_x + S^2 \cdot D_y - 2CS \cdot F_{xy} > 0$
 Pour une valeur donnée de θ , ceci est l'équation d'un demi-plan limité par la droite d'équation $f(\theta) = 0$.

On peut remarquer que pour $\theta' = \pi/2 - \theta$, on a : $\cos(\pi/2 - \theta) = \sin(\theta) = S$
 $\sin(\pi/2 - \theta) = \cos(\theta) = C$

donc l'équation devient : $f(\theta') = S^2 \cdot D_x + C^2 \cdot D_y - 2CS \cdot F_{xy} > 0$

La droite limitant ce demi-plan est symétrique de la précédente par rapport à la bissectrice passant par l'origine ; on peut donc toujours dessiner 2 droites symétriques comme le montre le dessin ci-dessous, et le point représentatif de (D_x, D_y) doit rester du côté droit.



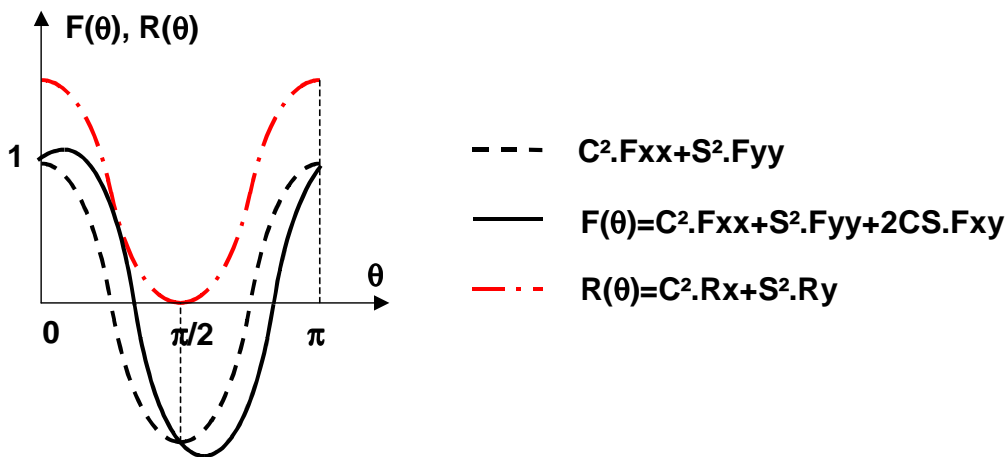
On peut maintenant remarquer que $D_x + D_y$ est représenté par la projection du point (D_x, D_y) sur la droite Δ_{45} , à un coefficient $1/\sqrt{2}$ près. Donc pour minimiser $D_x + D_y$, il faut choisir un couple de valeurs (D_x, D_y) tel que sa projection sur Δ_{45} soit « la plus à gauche possible », tout en restant du bon côté des équations de demi-plans.

Il est clair que le meilleur point possible se trouve sur Δ_{45} , ce qui correspond à $D_x = D_y$.
On a donc bien : $D_x = D_y = |F_{xy}|$ cqfd.

Cette solution reste valable tant que $R_x + |F_{xy}| > 0$
 $R_y + |F_{xy}| > 0$
c'est-à-dire tant que les sections d'acier calculées restent positives.

2.5 Justification dans le cas : $R_y + |F_{xy}| < 0$

(à ne pas traiter en classe)



C'est un cas où la courbe $R(\theta)$ calculée selon les formules précédentes devient < 0 ; or il est physiquement impossible de placer des aciers < 0 .

La solution consiste dans ce cas à conserver $R_y = 0$ (donc on remonte la courbe en $\theta = \pi/2$), ce qui modifie la valeur de R_x conformément au schéma ci-dessus.

Il faut assurer $R(\theta) \geq F(\theta)$ quel que soit θ .

On pose $f(\theta) = R(\theta) - F(\theta)$

Il faut assurer $f(\theta) > 0$ quel que soit θ , ce qui sera le cas en adoptant :

$f(\theta)$ mini juste égal à zéro, cette valeur mini correspondant à $f'(\theta) = 0$

$$F(\theta) = C^2 \cdot F_{xx} + S^2 \cdot F_{yy} + 2CS \cdot F_{xy}$$

$$R(\theta) = C^2 \cdot R_x + S^2 \cdot R_y$$

$$\Rightarrow f(\theta) = C^2 \cdot (R_x - F_{xx}) - S^2 \cdot F_{yy} - 2CS \cdot F_{xy}$$

On pose comme précédemment $Dx = R_x - F_{xx}$, et on écrit les 2 équations voulues :

$$f(\theta) = 0 \text{ et } f'(\theta) = 0 \text{ pour la même valeur de } \theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C^2 \cdot Dx - S^2 \cdot F_{yy} - 2CS \cdot F_{xy} = 0 \\ -CS \cdot Dx - CS \cdot F_{yy} - (C^2 - S^2) \cdot F_{xy} = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} S \\ C \end{vmatrix} \begin{matrix} C \\ -S \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S \cdot F_{yy} + C \cdot F_{xy} = 0 \\ C \cdot Dx - S \cdot F_{xy} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C \cdot F_{xy} = -S \cdot F_{yy} \\ C \cdot Dx = S \cdot F_{xy} \end{cases}$$

En faisant le rapport de ces 2 équations, on obtient :

$$Dx = \frac{F_{xy}^2}{-F_{yy}} \quad \text{cqfd.}$$

NOTA 1

On est ici dans le cas où $F_{yy} + |F_{xy}| < 0$

$$\Rightarrow F_{yy} < -|F_{xy}|$$

$$\Rightarrow |F_{xy}| / |F_{yy}| < 1$$

La quantité Dx est donc inférieure à $|F_{xy}|$.

2.6 Interprétation de l'équilibre acier / béton

> Paradoxe apparent

On a vu que dans le cas R_x et $R_y > 0$, on doit placer des sections d'acier :

$$R_x = F_{xx} + |F_{xy}| \quad \text{et} \quad R_y = F_{yy} + |F_{xy}|$$

Si on se place sur la facette $\theta=0$, on a une section d'acier R_x excédentaire pour reprendre un effort $F_{xx} \Rightarrow$ on pourrait penser que les aciers ne travaillent pas au maximum.

Or il existe un angle θ où l'acier est juste suffisant \Rightarrow il travaille au maximum...

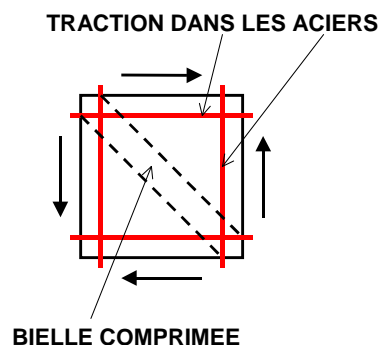
Quelle est donc la contrainte réelle dans les aciers (forcément unique) ?

> Effet du cisaillement

En réalité, nous avons vu que le cisaillement a pour effet de générer des bielles de béton comprimé, ainsi que de la traction dans les armatures.

Ces bielles se forment à 45° quels que soient les efforts de traction F_{xx} et F_{yy} (c'est ce qu'ont montré nos calculs : le maximum de la fonction $2CSF_{xy}$ conditionnant les armatures nécessaires s'obtient pour un angle de 45°).

Donc les aciers X n'équilibrent pas seulement F_{xx} , mais aussi F_{xy} .

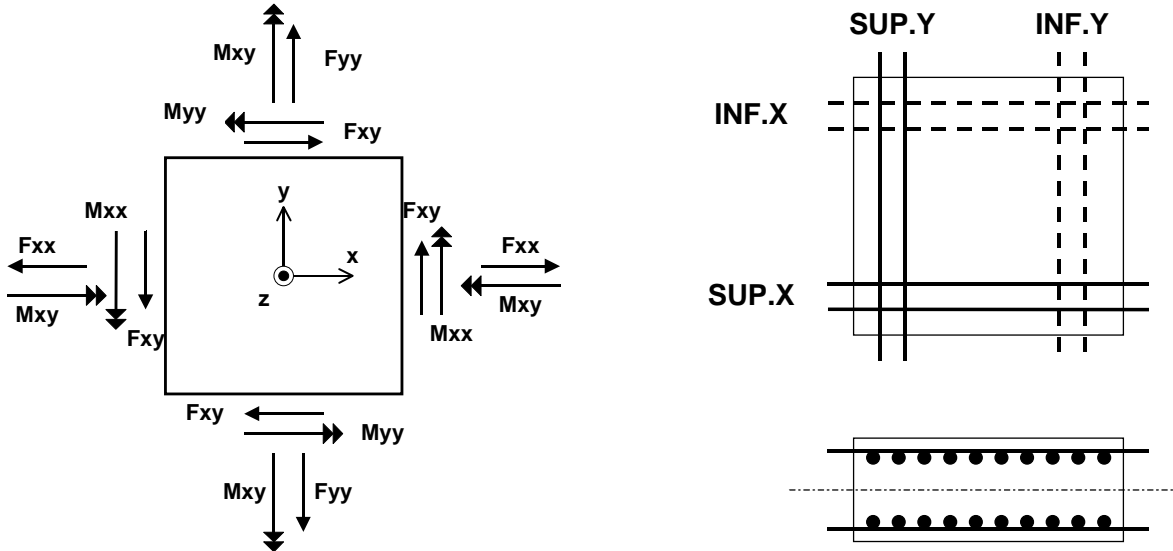


Notre méthode de calcul, qui ne considère que les efforts normaux aux facettes et non les efforts tangents, n'est correcte que parce qu'elle considère successivement toutes les directions de facettes possibles, donc en particulier celle correspondant au repère principal ($F_{XY}=0$).

3 PLAQUE SOUMISE A DES EFFORTS QUELCONQUES : METHODE DE CAPRA-MAURY

3.1 Présentation

On considère cette fois une plaque soumise à des efforts de membrane (F_{xx} , F_{yy} , F_{xy} , en MN/ml) ainsi qu'à des moments (M_{xx} , M_{yy} , M_{xy} , en MN.m/ml).



On se propose de déterminer le ferrailage nécessaire à l'ELU dans cette plaque :

- A_x inf et A_x sup // axe X
- A_y inf et A_y sup // axe Y, en cm^2/ml .

3.2 Méthode

Le principe consiste à considérer successivement différentes facettes de normale d'angle θ .

> Efforts perpendiculaires à la facette

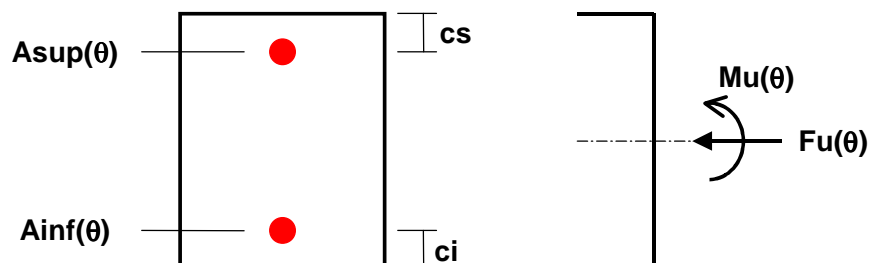
Les efforts s'exerçant normalement à une facette θ valent :

$$F(\theta) = C^2 \cdot F_{xx} + S^2 \cdot F_{yy} + 2CS \cdot F_{xy}$$

$$M(\theta) = C^2 \cdot M_{xx} + S^2 \cdot M_{yy} + 2CS \cdot M_{xy}$$

> Détermination des aciers $A_{inf}(\theta)$ et $A_{sup}(\theta)$

Les aciers peuvent être déterminés dans cette facette par un calcul de type : section rectangulaire soumise à flexion composée => on peut calculer $A_{inf}(\theta)$ et/ou $A_{sup}(\theta)$.



> Choix des 4 sections d'acier selon X, Y

Le problème consiste ensuite à choisir des sections d'acier selon X et Y permettant de satisfaire la condition :

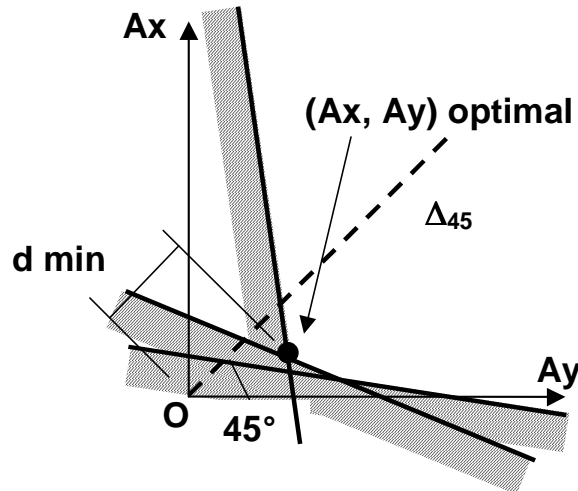
$$C^2 \cdot A_{xi} + S^2 \cdot A_{yi} \geq A_{inf}(\theta) \text{ quel que soit } \theta \quad (i = \text{inf ou sup}).$$

On raisonne désormais sur une face de la section (inf ou sup), et on désigne par A_x et A_y les sections correspondantes.

On doit déterminer A_x et A_y tels que :

$C^2 \cdot A_x + S^2 \cdot A_y \geq A(\theta)$ quel que soit θ
et permettant par ailleurs de minimiser la somme $A_x + A_y$.

On remarque que chaque condition peut s'interpréter de la façon suivante : le point (A_x, A_y) doit se trouver dans un demi-plan limité par la droite Δ_θ d'équation : $C^2 \cdot A_x + S^2 \cdot A_y = A(\theta)$



On retient ensuite le point (A_x, A_y) permettant de minimiser la distance « d » en projection sur la droite Δ_{45} (minimisation de $A_x + A_y$).