

# Géomécanique et Géotechnique Avancée

## Thermo-Poro-Élasticité

Jean-Michel PEREIRA

École des Ponts ParisTech – Laboratoire Navier (B110)  
<http://navier.enpc.fr/~pereira/>  
[jeanmichel.pereira@enpc.fr](mailto:jeanmichel.pereira@enpc.fr)

2018–2019



### Ce que vous saurez faire :

- Décrire un milieu poreux et caractériser son état
- Modéliser le comportement thermo-poro-élastique d'un milieu
- Décrire les transferts de chaleur et de masse dans un milieu poreux
- Modéliser ces transferts



# Plan

## 1 Introduction

## 2 Thermodynamique des milieux poreux

- Généralités et notations
- Premier principe
- Second principe de la thermodynamique
- Inégalité de Clausius-Duhem

## 3 Thermoporoélasticité

- Thermoporoélasticité

## 4 Transfert de masse fluide

- Transfert de masse fluide

## 5 Transfert de chaleur

- Transfert de chaleur

# Définitions

## La poromécanique

- Poromécanique = mécanique des milieux poreux
- Cadre théorique développé au cours du XX<sup>ème</sup> siècle
- Selon le contexte, on introduit les concepts de poroélasticité, poroplasticité.



Karl von Terzaghi  
(1883 – 1963)



Maurice Anthony Biot  
(1905 – 1985)



Olivier Coussy  
(1953 – 2010)

# Plan

## 1 Introduction

## 2 Thermodynamique des milieux poreux

- Généralités et notations
- Premier principe
- Second principe de la thermodynamique
- Inégalité de Clausius-Duhem

## 3 Thermoporoélasticité

- Thermoporoélasticité

## 4 Transfert de masse fluide

- Transfert de masse fluide

## 5 Transfert de chaleur

- Transfert de chaleur



# Premier principe de la thermodynamique I

Premier principe de la thermodynamique :

$$\frac{D\mathcal{E}}{Dt} = P_e + Q \quad (1)$$

avec  $\mathcal{E}$  l'énergie du système,  $P_e$  la puissance des efforts extérieurs,  $Q$  le taux de chaleur reçue.

L'énergie cinétique  $K$  du système considéré est donnée par :

$$K = \int_{\Omega_t} \frac{1}{2} (\rho^s \mathbf{v}^{s2} + \rho^f \mathbf{v}^{f2}) d\Omega \quad (2)$$

Son énergie interne  $E$  vaut :

$$E = \int_{\Omega_t} (\rho^s e_m^s + \rho^f e_m^f) d\Omega \quad (3)$$

## Premier principe de la thermodynamique II

La puissance des efforts extérieurs  $P_e$  est donnée par :

$$P_e = \int_{\Omega_t} (\rho^s \mathbf{F}^s \cdot \mathbf{v}^s + \rho^f \mathbf{F}^f \cdot \mathbf{v}^f) d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{T}^s \cdot \mathbf{v}^s + \mathbf{T}^f \cdot \mathbf{v}^f) dS \quad (4)$$

ou, en introduisant la vitesse relative du fluide par rapport au squelette ( $\mathbf{v}^{r,f} = \mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s$ ) :

$$P_e = \int_{\Omega_t} (\rho^s \mathbf{F}^s + \rho^f \mathbf{F}^f) \cdot \mathbf{v}^s d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{T}^s + \mathbf{T}^f) \cdot \mathbf{v}^s dS \\ + \int_{\Omega_t} \rho^f \mathbf{F}^f \cdot \mathbf{v}^{r,f} d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{T}^f \cdot \mathbf{v}^{r,f} dS \quad (5)$$

avec  $\mathbf{T}^i$ , les actions de surface s'exerçant sur la phase  $i = \{s, f\}$  et vérifiant  $\mathbf{T}^s + \mathbf{T}^f = \mathbf{T}$

# Premier principe de la thermodynamique III

Le taux de chaleur reçue par le système est quant à lui donné par :

$$Q = \int_{\Omega_t} r d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (6)$$

soit, en appliquant le théorème de la divergence :

$$Q = \int_{\Omega_t} (r - \operatorname{div} \mathbf{q}) d\Omega \quad (7)$$

# Premier principe de la thermodynamique IV

Après calcul des dérivées particulières des énergies cinétique et interne du système et introduction du tenseur  $\boldsymbol{\sigma}$  et après avoir utilisé les équations de conservation de la quantité de mouvement, le premier principe de la thermodynamique peut être explicité selon :

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \boldsymbol{\sigma}^f : \mathbf{grad} \mathbf{v}^{r,f} + (\text{div} \boldsymbol{\sigma}^f + \rho^f (\mathbf{F}^f - \boldsymbol{\gamma}^f)) \cdot \mathbf{v}^{r,f} - \left( \frac{\partial e}{\partial t} + \text{div}(e \mathbf{v}^s) + \text{div}(e_m^f \mathbf{w}^f) \right) + r - \text{div} \mathbf{q} = 0 \quad (8)$$

où le taux de déformation eulérien  $\mathbf{d}$  est la partie symétrique du gradient des vitesses du squelette *i.e.*  $2\mathbf{d} = \mathbf{grad} \mathbf{v}^s + {}^t \mathbf{grad} \mathbf{v}^s$  et  $e$  représente la densité volumique d'énergie interne du milieu poreux :  $e = \rho^s e_m^s + \rho^f e_m^f$ .

## Second principe de la thermodynamique I

### Hypothèse

On suppose qu'en un point géométrique donné, la température des deux particules se superposant est la même.

Ce principe postule que la production interne spontanée d'entropie doit être positive ou nulle. La relation suivante permet d'exprimer ce principe (l'augmentation d'entropie du milieu est nécessairement supérieure (ou égale) à l'apport externe d'entropie) :

$$\frac{DS}{Dt} \geq \int_{\Omega_t} \frac{r}{T} d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} -\frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (9)$$

## Second principe de la thermodynamique II

On introduit les densités massiques d'entropie du squelette et du fluide, notées respectivement  $s_m^s$  et  $s_m^f$  ainsi que la densité volumique d'entropie du milieu poreux  $s = \rho^s s_m^s + \rho^f s_m^f$ . Après calcul de la dérivée matérielle de l'entropie  $\mathcal{S}$ , on peut exprimer le second principe de la thermodynamique sous forme locale :

$$T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div}(s \mathbf{v}^s) + \operatorname{div}(s_m^f \mathbf{w}^f) \right) - r + \operatorname{div} \mathbf{q} - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} T \geq 0 \quad (10)$$

# Inégalité de Clausius-Duhem I

Elle est obtenue en sommant les équations des premier et second principes :

$$\begin{aligned}
 & \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \boldsymbol{\sigma}^f : \mathbf{grad} \mathbf{v}^{r,f} + (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^f + \rho^f (\mathbf{F}^f - \boldsymbol{\gamma}^f)) \cdot \mathbf{v}^{r,f} \\
 & - \left( \frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}(e \mathbf{v}^s) + \operatorname{div}(e_m^f \mathbf{w}^f) \right) + T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div}(s \mathbf{v}^s) + \operatorname{div}(s_m^f \mathbf{w}^f) \right) \quad (11) \\
 & - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{grad} T \geq 0
 \end{aligned}$$

## Inégalité de Clausius-Duhem II

On définit l'énergie libre volumique  $\psi$  du milieu poreux :

$$\psi = e - Ts \quad (12)$$

On introduit également la pression macroscopique  $p$  de la phase fluide. En supposant que la contrainte partielle dans ce milieu est purement isotrope, l'expression du tenseur de contrainte partielle dans le fluide s'exprime :

$$\boldsymbol{\sigma}^f = -n p_f \mathbf{1} \quad (13)$$

L'enthalpie libre spécifique du fluide est également introduite :

$$g_m^f = e_m^f + \frac{p_f}{\rho_f} - Ts_m^f \quad (14)$$

# Inégalité de Clausius-Duhem III

On obtient après quelques réarrangements l'inégalité de Clausius-Duhem généralisée aux milieux poreux :

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - g_m^f \operatorname{div} \mathbf{w}^f - s \frac{d^s T}{dt} - \frac{d^s \psi}{dt} - \psi \operatorname{div}(\mathbf{s} \mathbf{v}^s) \\
 - \mathbf{w}^f \cdot (s_m^f \operatorname{grad} T + \operatorname{grad} g_m^f - (\mathbf{F}^f - \boldsymbol{\gamma}^f)) \\
 - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} T \geq 0
 \end{aligned} \tag{15}$$

## Identification des dissipations

Le premier terme de l'inégalité de C-D représente la dissipation eulérienne du milieu poreux à l'instant  $t$ . Elle peut être décomposée comme suit :

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \geq 0 \quad (16)$$

avec

$$\varphi_1 = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \mathbf{g}_m^f \operatorname{div} \mathbf{w}^f - s \frac{d^s T}{dt} - \frac{d^s \psi}{dt} - \psi \operatorname{div}(\mathbf{s} \mathbf{v}^s) \quad (17a)$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} T \quad (17b)$$

$$\varphi_3 = -\mathbf{w}^f \cdot (\mathbf{s}_m^f \operatorname{grad} T + \operatorname{grad} \mathbf{g}_m^f - (\mathbf{F}^f - \boldsymbol{\gamma}^f)) \quad (17c)$$

La dissipation  $\varphi_1$  est appelée dissipation intrinsèque volumique. Il est possible de démontrer qu'elle est nécessairement non-négative.

Les dissipations  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$  sont associées respectivement au transport de chaleur et de masse fluide à travers le milieu poreux. Il n'est pas possible de conclure quant à la non-négativité des dissipations  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$  considérées indépendamment.

## Dissipation intrinsèque I

Utilisant la non-négativité de  $\varphi_1$ , il est possible de donner l'expression lagrangienne de la dissipation intrinsèque :

$$\Phi_1 = \mathbf{\Pi} : \frac{d^s \mathbf{\Delta}}{dt} + g_m^f \frac{d^s m}{dt} - S \frac{d^s T}{dt} - \frac{d^s \Psi}{dt} \geq 0 \quad (18)$$

avec  $\mathbf{\Pi}$  le tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff et  $\mathbf{\Delta}$  le tenseur des déformations de Green-Lagrange.

## Dissipation intrinsèque II

Sous l'hypothèse des **petites perturbations**, les grandeurs lagrangiennes et eulériennes peuvent être confondues et les dérivées matérielles deviennent des dérivées temporelles simples. On suppose également que l'enthalpie libre du fluide  $g_m^f$  est une fonction de la pression et de la température telle que :

$$\frac{\partial g_m^f}{\partial p_f} = \frac{1}{\rho_f} \quad (19)$$

$$\frac{\partial g_m^f}{\partial T} = -s_m^f \quad (20)$$

On obtient alors :

$$\Phi_1 = \sigma : \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + p_f \frac{\partial \phi_f}{\partial t} - s \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_s}{\partial t} \geq 0 \quad (21)$$

Dans le cas réversible (poroélasticité) :  $\Phi_1 = 0$ .

Que se passe-t-il lorsque la dissipation est strictement positive  
(comportement irréversible) ?

# Dissipation plastique I

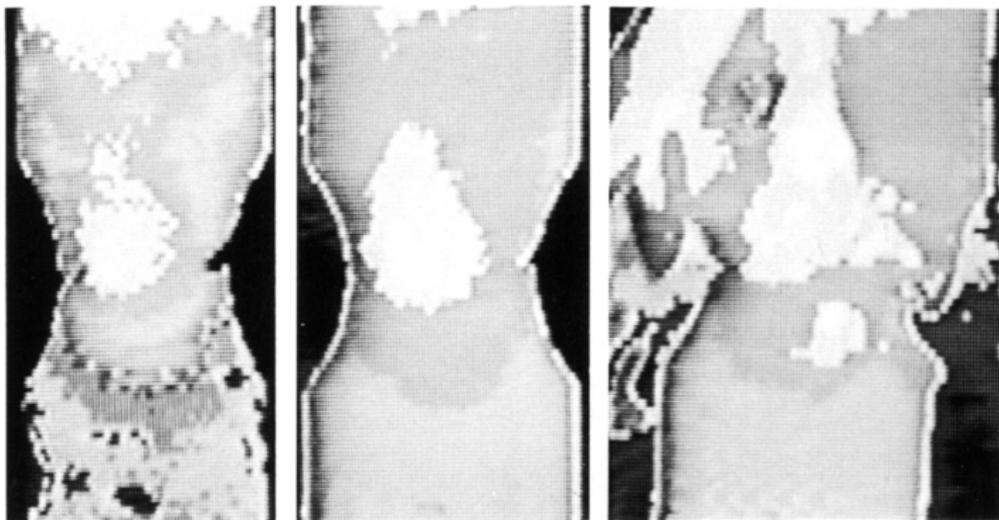
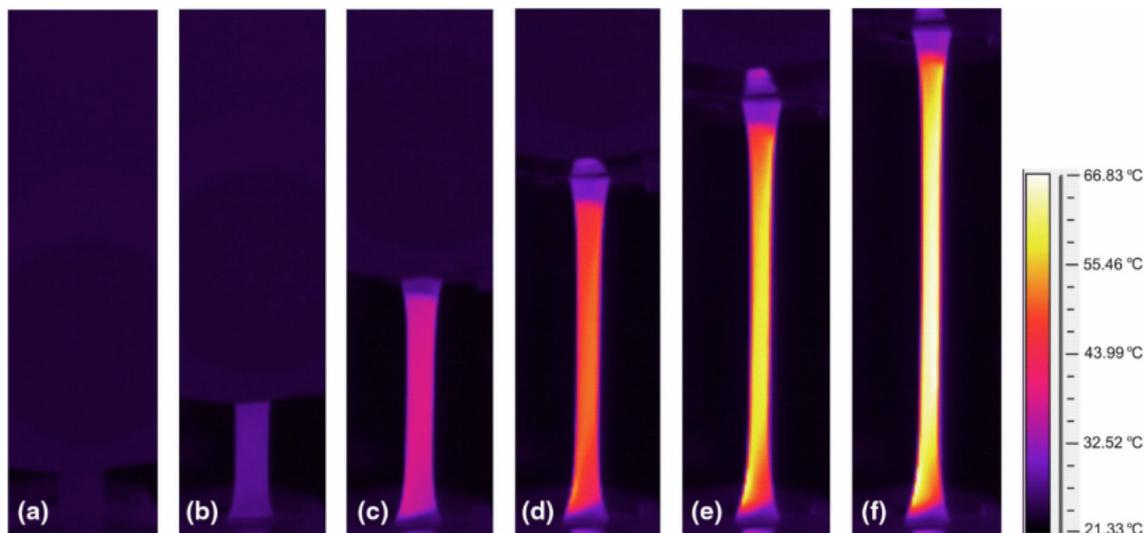


Fig. 6. Thermovision of unstable failure in concrete.

**FIGURE** – Évolution de la température lors d'un essai cyclique (100 Hz) de compression uniaxiale - (Luong, 1990).

# Dissipation plastique II



**Fig. 3** Sequence of thermal images corresponding to the strain values: (a) 0, (b) 0.4, (c) 0.8, (d) 1.2, (e) 1.6, (f) 2. Strain rate  $\dot{\epsilon} = 1 \times 10^1 \text{s}^{-1}$

**FIGURE** – Évolution de la température lors d'un essai d'extension d'une éprouvette de polyurethane à mémoire de forme (140 mm × 10 mm × 1 mm) - (Pieczyńska et al., 2014).

## Dissipation intrinsèque (suite)

Revenons à la dissipation intrinsèque :

$$\Phi_1 = \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial t} + p_f \frac{\partial \phi_f}{\partial t} - s \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_s}{\partial t} \geq 0 \quad (22)$$

On suppose maintenant que l'énergie libre dépend des variables  $\boldsymbol{\epsilon}$ ,  $\phi_f$  et  $T$ , appelées **variables d'état**, i.e. :

$$\frac{\partial \Psi_s}{\partial t} = \frac{\partial \Psi_s}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} : \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi_f} \frac{\partial \phi_f}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_s}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (23)$$

En injectant dans la dissipation, il vient alors :

$$\left( \boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \Psi_s}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right) : \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial t} + \left( p_f - \frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi_f} \right) \frac{\partial \phi_f}{\partial t} - \left( s + \frac{\partial \Psi_s}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial t} \geq 0 \quad (24)$$

Si la dissipation est nulle quelle que soit l'évolution du système, alors chaque terme doit être nul. On en déduit les équations d'état de la poroélasticité.

# Équations d'état de la poroélasticité

Les équations d'état de la poroélasticité dérivent d'un potentiel thermodynamique  $\Psi_s(\epsilon, \phi, T)$  suivant les relations :

$$\sigma = \frac{\partial \Psi_s}{\partial \epsilon} \quad (25)$$

$$p_f = \frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi_f} \quad (26)$$

$$s = -\frac{\partial \Psi_s}{\partial T} \quad (27)$$

Ces équations montrent quelles sont les variables thermodynamiquement associées. Identifier la loi de comportement revient à déterminer le potentiel thermodynamique. Dans le cas d'un comportement linéaire, le potentiel est une forme quadratique des variables d'état.

## Cas particulier des sols

Lorsque la phase solide est incompressible, les variations de porosité lagrangienne<sup>1</sup> et les déformations volumiques sont reliées :

$$\text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) = \phi - \phi_0 \quad (28)$$

et la dissipation devient :

$$\Phi_1 = (\boldsymbol{\sigma} + p_f \mathbf{1}) : \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial t} - s \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_s}{\partial t} \geq 0 \quad (29)$$

et les équations d'état :

$$\boldsymbol{\sigma} + p_f \mathbf{1} = \frac{\partial \Psi_s}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad (30)$$

$$s = - \frac{\partial \Psi_s}{\partial T} \quad (31)$$

---

1. Les porosités lagrangienne  $\phi$  (définie sur la configuration de référence) et eulérienne  $n$  (définie sur la configuration actuelle) sont reliées par le Jacobien  $J$  de la transformation :  $\phi = J n$ .

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Thermodynamique des milieux poreux
  - Généralités et notations
  - Premier principe
  - Second principe de la thermodynamique
  - Inégalité de Clausius-Duhem
- 3 Thermoporoélasticité
  - Thermoporoélasticité
- 4 Transfert de masse fluide
  - Transfert de masse fluide
- 5 Transfert de chaleur
  - Transfert de chaleur

# Poroélasticité I

A partir du bilan d'énergie (avec  $\varphi = \phi - \phi_0$ ) :

$$\boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\epsilon} + p_f d\varphi - d\Psi_s = 0 \quad (32)$$

et en introduisant la transformée de Legendre-Fenchel :

$$W_s = \Psi_s - p_f \varphi \quad (33)$$

$$\boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\epsilon} - \varphi dp_f - dW_s = 0 \quad (34)$$

$$\text{ou } \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{s} : d\mathbf{e} - \varphi dp_f - dW_s = 0 \quad (35)$$

On a les équations d'état suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W_s}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad \varphi = -\frac{\partial W_s}{\partial p_f} \quad (36)$$

## Poroélasticité II

Si le potentiel  $W_s$  est le suivant :

$$W_s = \frac{1}{2} K \varepsilon^2 + G \mathbf{e} : \mathbf{e} - b p_f \varepsilon - \frac{1}{2} \frac{p_f^2}{N} \quad (37)$$

alors les équations de la poroélasticité sont les suivantes :

$$\sigma = K \varepsilon - b p_f \quad (38)$$

$$\varphi = b \varepsilon + \frac{p_f}{N} \quad (39)$$

$$\mathbf{s} = 2G \mathbf{e} \quad (40)$$

avec  $b$  le coefficient de Biot et  $N$  le module de Biot.

Si la matrice solide est homogène (rigidité  $K_s$ ) :

$$b = 1 - \frac{K}{K_s} \quad (41)$$

$$\frac{1}{N} = \frac{b - \phi_0}{K_s} \quad (42)$$

# Thermoporoélasticité I

A partir du bilan d'énergie (avec  $\varphi = \phi - \phi_0$  et  $\theta = T - T_0$ ) :

$$\boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{s} : d\mathbf{e} - \varphi dp_f - S_s d\theta - dW_s = 0 \quad (43)$$

on a les équations d'état suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad \varphi = -\frac{\partial W_s}{\partial p_f} \quad S_s = -\frac{\partial W_s}{\partial \theta} \quad (44)$$

# Thermoporoélasticité II

Les équations de la thermoporoélasticité sont les suivantes :

$$\sigma = K\varepsilon - bp_f - 3\alpha K\theta \quad (45)$$

$$\varphi = b\varepsilon + \frac{p_f}{N} - 3\alpha_\phi\theta \quad (46)$$

$$\mathbf{s} = 2G \mathbf{e} \quad (47)$$

$$S_s - S_s^0 = 3\alpha K\varepsilon - 3\alpha_\phi p_f + \frac{C}{T_0}\theta \quad (48)$$

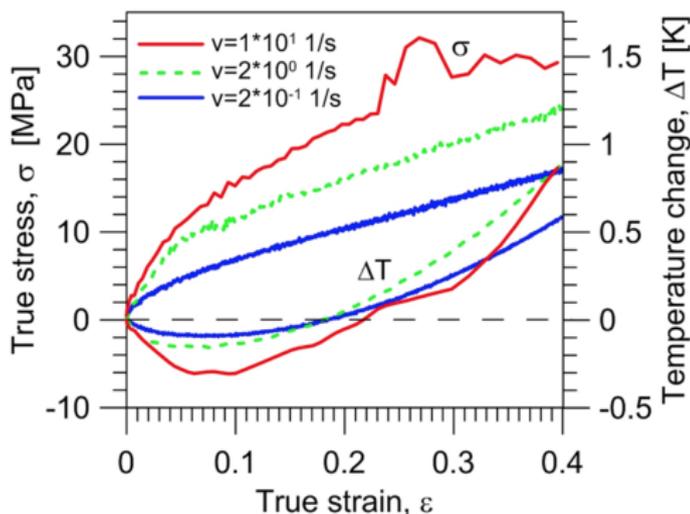
avec  $\alpha$  le coefficient de dilatation linéique et  $C$  la capacité thermique.

On peut montrer que  $\alpha = \alpha_s$  et  $\alpha_\phi = \alpha_s (b - \phi_0)$  dans le cas d'une phase solide homogène.

## Microporoélasticité

Il est possible de déterminer de façon théorique les propriétés élastiques d'un matériau poreux en fonction de celles de ces constituants dans le cas de microstructures simples (inclusions sphériques ou elliptiques, par exemple).

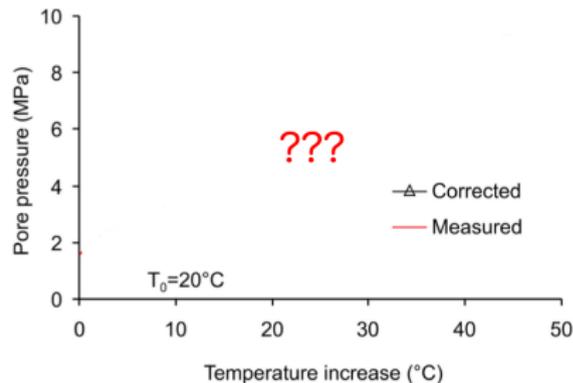
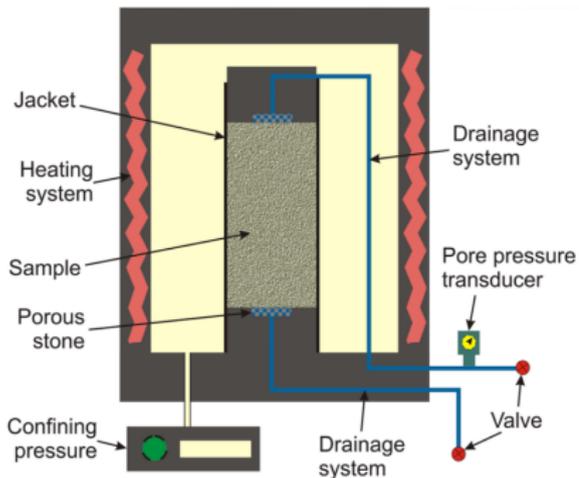
# Exercice : effet thermoélastique



**Fig. 9** Stress  $\sigma$  and temperature change  $\Delta T$  versus strain  $\varepsilon$  for the initial stage of tension of the SMP with various strain rates:  $2 \times 10^{-1} \text{ s}^{-1}$ ,  $2 \times 10^0 \text{ s}^{-1}$ , and  $2 \times 10^1 \text{ s}^{-1}$

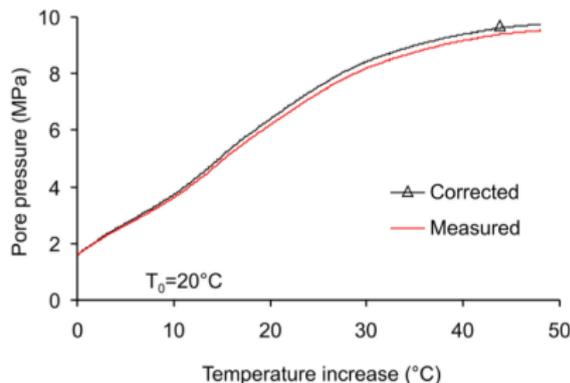
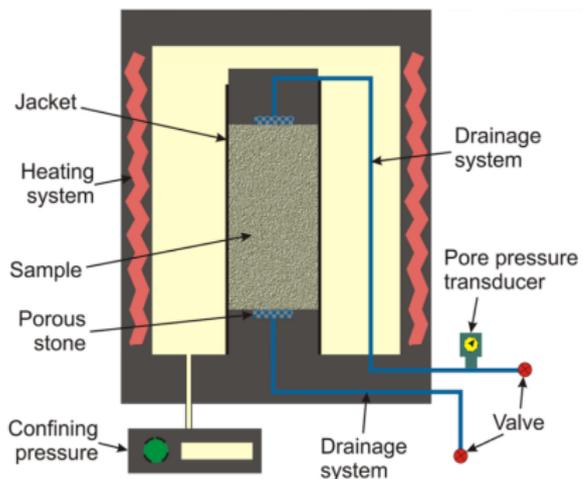
**FIGURE** – Illustration de l'effet thermoélastique dans le cas des essais sur polyuréthane (Pieczyska et al., 2014). **Justifiez.**

# Exemple : essai de chauffage non-drainé



**FIGURE** – Essai de chauffage non-drainé d'un grès de Rothbach à confinement constant ( $\alpha = 28 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ) (Ghabezloo, 2008).

# Exemple : essai de chauffage non-drainé



**FIGURE** – Essai de chauffage non-drainé d'un grès de Rothbach à confinement constant ( $\alpha = 28 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ) (Ghabezloo, 2008).

## Exemple : verre trempé



[Credit : M. Keller/Oberlin College]

**FIGURE** – No relief from stress. Prince Rupert's drops are glass objects with high strength resulting from “baked-in” internal stresses (which generate colors when viewed between crossed polarizers). A new theory, based on experiments and simulations, explains some aspects of this so-called residual stress at the molecular level.

# Poroélasticité non-linéaire, modules sécants, modules tangents I

Si le comportement est **élastique non-linéaire**, les équations précédentes restent valables mais avec des coefficients sécants (N.B. :  $G$  supposé constant) :

$$\sigma = K_{SEC}(\sigma')\varepsilon - b_{SEC}(\sigma')p_f - 3\alpha K_{SEC}(\sigma')\theta \quad (49)$$

$$\varphi = b_{SEC}(\sigma')\varepsilon + \frac{p_f}{N_{SEC}(\sigma')} - 3\alpha_\phi\theta \quad (50)$$

$$\mathbf{s} = 2G \mathbf{e} \quad (51)$$

$$S_s - S_s^0 = 3\alpha K_{SEC}(\sigma')\varepsilon - 3\alpha_{\phi,SEC}(\sigma')p_f + \frac{C}{T_0}\theta \quad (52)$$

avec

$$b_{SEC}(\sigma') = 1 - \frac{K_{SEC}(\sigma')}{K_s} \quad (53)$$

$$\frac{1}{N_{SEC}(\sigma')} = \frac{b_{SEC}(\sigma') - \phi_0}{K_s} \quad (54)$$

## Poroélasticité non-linéaire, modules sécants, modules tangents II

ou, en faisant intervenir les incréments des variables (N.B. :  $G$  supposé constant) :

$$d\sigma = K_{TAN}(\sigma')d\varepsilon - b_{TAN}(\sigma')dp_f - 3\alpha K_{TAN}(\sigma')d\theta \quad (55)$$

$$d\varphi = b_{TAN}(\sigma')d\varepsilon + \frac{dp_f}{N_{TAN}(\sigma')} - 3\alpha_\phi d\theta \quad (56)$$

$$d\mathbf{s} = 2G d\mathbf{e} \quad (57)$$

$$dS_s = 3\alpha K_{TAN}(\sigma')d\varepsilon - 3\alpha_{\phi, TAN}(\sigma')dp_f + \frac{C}{T_0}d\theta \quad (58)$$

avec

$$b_{TAN}(\sigma') = 1 - \frac{K_{TAN}(\sigma')}{K_s} \quad (59)$$

$$\frac{1}{N_{TAN}(\sigma')} = \frac{b_{TAN}(\sigma') - \phi_0}{K_s} \quad (60)$$

# Poroélasticité non-drainée I

Définition de non-drainé ?

# Poroélasticité non-drainée I

## Définition

- Essai non-drainé  $\Rightarrow$  essai à masse de fluide constante.
- Plus généralement, un chargement non-drainé correspond au fait qu'il n'y a pas d'écoulement de fluide au niveau local (celui du VER). N.B. : dépend de la vitesse de chargement, de la perméabilité...

Ajoutons donc un fluide dans le milieu poreux :

$$\frac{d\rho_f}{\rho_f} = \frac{dp_f}{K_f} - 3\alpha_f d\theta \quad ; \quad (K_f = 2.2 \text{ GPa à } 20 \text{ °C pour l'eau}) \quad (61)$$

$$ds_f = -3\alpha_f \frac{dp_f}{\rho_f} + C_p \frac{d\theta}{T} \quad (62)$$

On obtient, à partir de l'équation sur la porosité (isotherme) :

$$\frac{d(\rho_f \phi)}{\rho_f} = b d\varepsilon + \frac{dp_f}{M} \quad ; \quad \frac{1}{M} = \frac{\phi_0}{K_f} + \frac{1}{N} \quad (63)$$

## Poroélasticité non-drainée II

En condition non-drainée :  $d(\rho_f \phi) = 0$ .

A partir de l'équation sur les contraintes :

$$d\sigma = K_u d\varepsilon \quad ; \quad K_u = K + b^2 M \quad (K \text{ est bien le module drainé}) \quad (64)$$

ou, si  $K_s \rightarrow +\infty$  (i.e.  $1/N \rightarrow +\infty$ ) :

$$d\sigma = K_u d\varepsilon \quad ; \quad K_u = K + \frac{K_f}{\phi_0} \quad (65)$$

Remarque dans le cas  $K_s \rightarrow +\infty$  :

$$d\sigma' + dp_f = \left( K + \frac{K_f}{\phi_0} \right) d\varepsilon \Rightarrow d\sigma' = K d\varepsilon \ \& \ dp_f = \frac{K_f}{\phi_0} d\varepsilon \quad (66)$$

A partir des eqs (63) et (64), on obtient en **conditions non-drainées et isothermes** :

$$dp_f = -B d\sigma \quad ; \quad B = \frac{bM}{K_u} \text{ (coefficient de Skempton)} \quad (67)$$

## Poroélasticité non-drainée III

En conditions non-drainées **anisothermes** :  $d(\rho_f \phi) = 0$ .

A partir de l'équation sur les contraintes :

$$d\sigma = K_u d\varepsilon - 3\alpha_u K_u d\theta \quad (68)$$

$$\text{avec : } K_u = K + b^2 M ; 3\alpha_u K_u = 3\alpha K + 3(\alpha_\phi + \phi\alpha_f) Mb \quad (69)$$

ou, si  $K_s \rightarrow +\infty$  (i.e.  $1/N \rightarrow +\infty$ ) :

$$d\sigma = K_u d\varepsilon - 3\alpha_u K_u d\theta \quad (70)$$

$$\text{avec : } K_u = K + \frac{K_f}{\phi_0} ; 3\alpha_u K_u = 3\alpha K + 3((1 - \phi_0)\alpha_s + \phi\alpha_f) \frac{K_f}{\phi_0} \quad (71)$$

## Poroélasticité non-drainée IV

On obtient, à partir de l'équation sur la porosité (anisotherme) :

$$\frac{d(\rho_f \phi)}{\rho_f} = b d\varepsilon + \frac{dp_f}{M} - 3(\alpha_\phi + \phi \alpha_f) \quad ; \quad \frac{1}{M} = \frac{\phi_0}{K_f} + \frac{1}{N} \quad (72)$$

A partir des eqs (72) et (68), on obtient en **conditions non-drainées et anisothermes** :

$$dp_f = -B d\sigma + \Lambda d\theta \quad (73)$$

$$B = \frac{bM}{K_u} \quad (\text{coefficient de Skempton}) \quad (74)$$

$$\Lambda = 3 \left( \frac{1}{b} (\alpha_\phi + \phi \alpha_f) - \alpha_u \right) bM \quad (\text{coeff. de pressurisation thermique}) \quad (75)$$



# Transfert de masse fluide I

La loi de Darcy s'écrit :

$$\frac{\mathbf{w}^f}{\rho^f} = \frac{\mathbf{k}_f}{\eta_f} \cdot (-\mathbf{grad}p_f + \rho^f \mathbf{g}) \quad (76)$$

avec  $\mathbf{k}_f$  la perméabilité intrinsèque du matériau [ $\text{m}^2 = 10^{12}$  Darcy],  $\eta_f$  sa viscosité dynamique [Pa.s].  $\mathbf{w}^f$  est le vecteur courant de masse fluide et  $\frac{\mathbf{w}^f}{\rho^f}$  est la vitesse de filtration (dite vitesse de Darcy).

En fonction de la charge hydraulique  $H = p_f/\gamma_f + z$ , la loi de Darcy s'écrit :

$$\frac{\mathbf{w}^f}{\rho^f} = -\frac{\gamma_f \mathbf{k}_f}{\eta_f} \cdot \mathbf{grad}H \quad (77)$$

et  $\mathbf{K}_f = \frac{\gamma_f \mathbf{k}_f}{\eta_f}$  est la conductivité hydraulique [ $\text{m.s}^{-1}$ ].

$\mathbf{k}_f$  et  $\mathbf{K}_f$  sont des tenseurs si le matériau est anisotrope.

## Transfert de masse fluide II

Ordre de grandeur de la perméabilité intrinsèque de divers matériaux :

Matériau	$k_f$ [m <sup>2</sup> ]
Béton	$10^{-16} - 10^{-21}$
Argile	$10^{-16} - 10^{-20}$
Os	$10^{-20}$
Granite, gneiss, basalts compacts	$10^{-16} - 10^{-20}$
Marbre	$10^{-19}$
Grès	$10^{-11} - 10^{-17}$
Carbonates	$10^{-12} - 10^{-16}$
Sables fins, limons, loess	$10^{-12} - 10^{-16}$
Graviers, sables	$10^{-9} - 10^{-12}$

Remarque 1 : pour l'eau à 20 °C, on a  $\eta_f \approx 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$  :

$$k_f [\text{m}^2] \approx 10^{-7} K_f [\text{m}.\text{s}^{-1}] \quad (78)$$

Remarque 2 : dans le cas de milieux fissurés, on peut considérer un écoulement de Poiseuille dans les fissures (i.e.  $v_{\max} = \frac{h^2}{8\eta_f} \frac{dp}{dx}$  entre 2 plaques espacées de  $h$ ).

## Couplages poromécaniques secondaires

Les variations de porosité modifient la perméabilité du milieu. Le modèle de Kozeny-Carman est l'un des plus utilisés pour en rendre compte :

$$k_f(\phi) = k_f^0 \left( \frac{\phi}{\phi_0} \right)^3 \left( \frac{1 - \phi_0}{1 - \phi} \right)^2 \quad (79)$$

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Thermodynamique des milieux poreux
  - Généralités et notations
  - Premier principe
  - Second principe de la thermodynamique
  - Inégalité de Clausius-Duhem
- 3 Thermoporoélasticité
  - Thermoporoélasticité
- 4 Transfert de masse fluide
  - Transfert de masse fluide
- 5 Transfert de chaleur
  - Transfert de chaleur

# Transfert de chaleur I

Par conduction : la loi de Fourier permet d'assurer la non-négativité de la dissipation d'énergie associée au transfert de chaleur.

$$\mathbf{q} = -\lambda \cdot \mathbf{grad} T \quad (80)$$

avec  $\mathbf{q}$  le flux de chaleur [ $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ ] et  $\lambda$  la conductivité thermique [ $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ], qui est éventuellement un tenseur si le matériau est anisotrope.

L'équation de la chaleur s'écrit (conduction seulement) :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \mathbf{grad} T) \quad (81)$$

Ordres de grandeur de  $\lambda$  :

- Grains solides :  $\lambda$  entre 1 et 3  $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .
- Eau :  $\lambda = 0,6 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  à température ambiante.
- Air :  $\lambda = 0,025 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .

## Transfert de chaleur II

Par rayonnement : loi de Stefan-Boltzmann (en  $T^4$ ). En général, ce mode de transfert est négligeable dans les sols et les roches.

Par convection : transport lié au mouvement des fluides.

## Paramètres thermiques

**Capacité thermique volumique** [ $\text{J.m}^{-3}$ ] :

$$\rho C_{mass} = (1 - n)\rho_s C_s + n S_r \rho_w C_w + n(1 - S_r)\rho_g C_g \quad (82)$$

**Conductivité thermique** [ $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ] :

dans le cas isotrope, plusieurs modèles sont proposés pour déterminer la conductivité thermique en fonction des propriétés et de l'arrangement des constituants. L'état de saturation (degré  $S_r$ ) joue en particulier un rôle important.

$$\lambda_{sat} = \lambda_{sec}^{1-n} \lambda_w^n \quad (83)$$

$$\lambda = (1 - n)\lambda_s + n S_r \lambda_w + n(1 - S_r)\lambda_g \quad (84)$$

**Diffusivité thermique** [ $\text{m}^2/\text{s}$ ] (**analogie ?**) :

$$\beta = \frac{\lambda}{\rho C_{mass}} \quad (85)$$