Enoncé :Compression plane en canal

Description de l’essai de compression plane en canal.

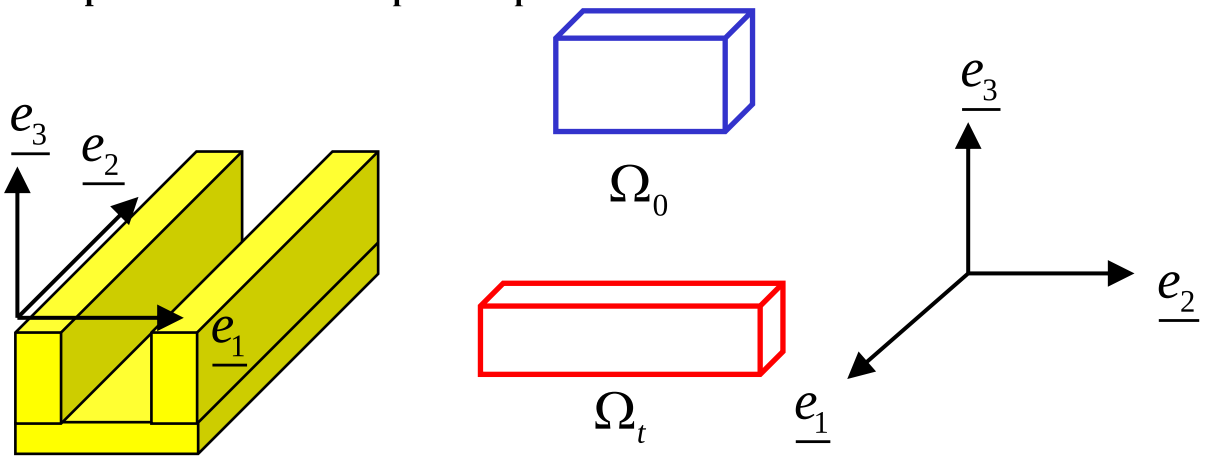

Figure 1

A/ Géométrie

Considérons un solide parallélépipédique dans sa configuration de référence Ω_0.

Notons L_0, l_0, h_0 les longueurs des 3 cotés du parallélépipède dans cette configuration de référence.

Nous choisissons un repère orthonormé $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ de façon que

$$\Omega_0 = \left\{ X_1 \in \left[-\frac{L_0}{2}, \frac{L_0}{2} \right], X_2 \in \left[-\frac{l_0}{2}, \frac{l_0}{2} \right], X_3 \in [0, h_0] \right\}$$

B/ Chargement

L’essai est réalisé en effectuant une « compression » suivant $\underline{e}_3$ à l’aide d’une plaque rigide au dessus de l’échantillon. La direction suivant $\underline{e}_2$ est libre et la direction suivant $\underline{e}_1$ est fixée par deux cloisons rigides. Les contacts entre l’échantillon et les cloisons sont des contacts sans frottement.

Nous pouvons donc supposer que nous sommes dans un état de déformation et de contrainte uniforme.

La transformation peut alors être supposée égale à $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & F_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & F_3(t) \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$

Avec $F_3(t) \leq 1$ connu et décroissant (compression à déplacement imposé).

et $F_2(t)$ inconnu

Le gradient du champ de la transformation dans Ω_0 peut alors s’écrire sous la forme :

$$\underline{\underline{F}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & F_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & F_3(t) \end{bmatrix}$$

La configuration actuelle Ω_t est, elle aussi, un parallélépipède

$$\Omega_t = \left\{ x_1 \in \left[-\frac{L_t}{2}, \frac{L_t}{2} \right], x_2 \in \left[-\frac{l_t}{2}, \frac{l_t}{2} \right], x_3 \in [0, h_t] \right\} \text{ avec } L_t = L_0, \; l_t = F_2(t) l_0, h_t = F_3(t) h_0$$

C/ Comportement

Le matériau est un métal dont l'élasticité est isotrope de module d'incompressibilité k_0 et de module de cisaillement μ_0 , et dont la plasticité est à écrouissage isotrope et la loi d'écoulement est standard..

<u>Rappelons les équations de ce comportement.</u>

Le gradient de transformation $\underline{\underline{F}}\left(\underline{X},t\right)$ est factorisé en une partie plastique $\underline{\underline{P}}\left(\underline{X},t\right)$ et une partie élastique $\underline{\underline{E}}\left(\underline{X},t\right)$.

$\underline{\underline{F}}\left(\underline{X},t\right)=\underline{\underline{E}}\left(\underline{X},t\right)\bullet\underline{\underline{P}}\left(\underline{X},t\right)$,

S'agissant d'un métal la partie plastique de la transformation se fait sans variation de volume, soit : $\det\left(\underline{\underline{P}}\right)=1$ ou encore $tr\left(\underline{\underline{\dot{P}}}.\underline{\underline{P}}^{-1}\right)=0$.

Ainsi la variation de volume, due à la transformation totale, est $J=\det\left(\underline{\underline{F}}\right)=\det\left(\underline{\underline{E}}\right)$.

On introduit un taux de déformation plastique, tenseur d'ordre deux symétrique, par $\underline{\underline{d}}^{p}=\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\dot{P}}}.\underline{\underline{P}}^{-1}+{}^{t}\underline{\underline{P}}^{-1}.{}^{t}\underline{\underline{\dot{P}}}\right)$, et une déformation plastique cumulée par $p_{cum}=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\frac{2}{3}\underline{\underline{d}}^{p}:\underline{\underline{d}}^{p}}\,dt$.

Le critère de plasticité et l'écrouissage isotrope sont donnés par la puissance dissipée massique $D=\frac{k\left(p_{cum}\right)\dot{p}_{cum}}{\rho_{\mathrm{Re}l}}$.

<u>On démontre alors que</u>

Le tenseur de contrainte de Cauchy est donné par

$$\underline{\underline{\sigma}}=\frac{\mu_0}{J^{\frac{5}{3}}}\underline{\underline{E}}.{}^{t}\underline{\underline{E}}+\left(k_0\left(J-1\right)-\frac{\mu_0}{J^{\frac{5}{3}}}\frac{tr\left(\underline{\underline{E}}.{}^{t}\underline{\underline{E}}\right)}{3}\right)\underline{\underline{I}}, \qquad (1)$$

En particulier $tr\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)=3k_0\left(J-1\right)$

La contrainte plastique est symétrique grâce à l'isotropie de l'élasticité et est égale à $\underline{\underline{\psi}}_{\mathrm{Re}l}=J\underline{\underline{\sigma}}$

Le domaine d'élasticité est donné par un critère de Von Mises sur la partie déviatorique de la contrainte plastique

$$\sqrt{\frac{3}{2}\underline{\underline{\psi}}^{d,s}_{\mathrm{Re}l}:\underline{\underline{\psi}}^{d,s}_{\mathrm{Re}l}}\leq k\left(p_{cum}\right), \qquad (2)$$

Et la loi d'écoulement plastique est une loi normale au critère

$$\underline{\underline{d}}^{p}=\frac{3}{2}\frac{\dot{p}_{cum}}{k\left(p_{cum}\right)}\underline{\underline{\psi}}^{d,s}_{\mathrm{Re}l} \qquad (3)$$

(on vérifie que $tr\left(\underline{\underline{d}}^{p}\right)=0$)

<u>Questions préliminaires</u>

Avant d'attaquer le problème de la détermination des champs dans l'essai de compression en canal, nous allons faire un certain nombre de remarques préliminaires qui vont nous faciliter la tâche ultérieurement.

<u>Remarque n°1 :</u>

L'équation (1) ci-dessus montre que $\underline{\underline{E}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$ se diagonalisent dans la même base.

<u>Question1 :</u>

En notant $\underline{\underline{E}}=\begin{bmatrix}E_1&0&0\\0&E_2&0\\0&0&E_3\end{bmatrix}$ et $\underline{\underline{\sigma}}=\begin{bmatrix}\sigma_1&0&0\\0&\sigma_2&0\\0&0&\sigma_3\end{bmatrix}$ et en utilisant (1) exprimez $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ à l'aide de J,E_1,E_2,E_3 (C'est bien sûr redondant puisque $J=E_1E_2E_3$, mais c'est commode pour la suite)

Question1bis :

Les trois composantes principales du déviateur de $\underline{\underline{E}}.\underline{\underline{E}}$ sont $\dfrac{2E_1^{\,2}-E_2^{\,2}-E_3^{\,2}}{3}$, $\dfrac{-E_1^{\,2}+2E_2^{\,2}-E_3^{\,2}}{3}$ et $\dfrac{-E_1^{\,2}-E_2^{\,2}+2E_3^{\,2}}{3}$ A l'aide de la réponse à la question 1 exprimez les à l'aide de $J,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$

Question1ter :

Exprimez $E_2^{\,2}$ en fonction de $E_1^{\,2}$, J et $(\sigma_2-\sigma_1)$ et $E_3^{\,2}$ en fonction de $E_1^{\,2}$, J et $(\sigma_3-\sigma_1)$, puis, en utilisant le fait que $E_1^{\,2}E_2^{\,2}E_3^{\,2}=J^2$ montrez que $E_1^{\,2}$ est racine d'un polynome de degré 3 dont les coefficients sont fonction de J , $(\sigma_2-\sigma_1)$ et $(\sigma_3-\sigma_1)$

On pourrait déterminer analytiquement $E_1^{\,2}$ à partir des formules de Cardan qui expriment analytiquement les solutions d'un polynôme de degré 3, mais ici $E_1^{\,2}$ reste proche de 1.

Avec une excellente approximation l'équation peut être approchée par un polynôme du premier degré en $(E_1^{\,2}-1)$.

Déterminez l'approximation de $(E_1^{\,2}-1)$ en sont fonction de J , $(\sigma_2-\sigma_1)$ et $(\sigma_3-\sigma_1)$.

Remarque n°2 :

Notons $\underline{\underline{s}}=\begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}$ le déviateur de $\underline{\underline{\sigma}}$.

Nous avons $s_1+s_2+s_3=0$

De plus le critère (2) s'écrit $s_1^{\,2}+s_2^{\,2}+s_3^{\,2}\le\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{k(p_{cum})}{J}\right)^2$

Question2 :

Considérons le petit problème auxiliaire de math suivant :

On s'intéresse à tous les triplets $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ vérifiant les deux équations suivantes

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$$

$$\alpha_1^{\,2}+\alpha_2^{\,2}+\alpha_3^{\,2}=\frac{3}{2}$$

Démontrez qu'il existe θ tel que

$$\alpha_1=\cos(\theta)$$

$$\alpha_2=\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\alpha_3=\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)$$

(L'ordre importe peu ici)

Question3 :

En déduire que lorsque le critère est atteint : $s_1^{\,2}+s_2^{\,2}+s_3^{\,2}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{k(p_{cum})}{J}\right)^2$, il existe θ tel que

$$s_1=\frac{2}{3}\frac{k(p_{cum})}{J}\cos(\theta)$$

$$s_2=\frac{2}{3}\frac{k(p_{cum})}{J}\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$s_3 = \frac{2}{3}\frac{k(p_{cum})}{J}\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

<u>Remarque n°3 :</u>

Nous supposons qu'initialement $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{I}}$. La loi d'écoulement (3) implique que dans notre problème $\underline{\underline{P}}$ se diagonalise la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ comme $\underline{\underline{F}}$, $\underline{\underline{E}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$

Rappelons que $\underline{\underline{F}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & F_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & F_3(t) \end{bmatrix}$, $F_3(t)$ imposé.

Compte tenu des bords libres de normales $\underline{e}_2$, le champ de contrainte de Cauchy peut s'écrire dans Ω_t :

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \begin{bmatrix} \sigma_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3(t) \end{bmatrix}$$

Nous notons $\underline{\underline{E}}(t) = \begin{bmatrix} E_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & E_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & E_3(t) \end{bmatrix}$ et $\underline{\underline{P}}(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & p_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & p_3(t) \end{bmatrix}$

L'objectif de ce problème est de tracer les composantes $\sigma_1(t)$, $\sigma_3(t)$ en fonction de $\ln(F_3(t))$

Etude de la première phase pendant laquelle le comportement est élastique

Pendant cette première phase le comportement reste élastique donc $\underline{\underline{P}}$ reste égal à l'identité et donc $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{F}}$. On peut donc en déduire que $E_1 = 1$ pendant cette phase.

L'objectif de ce problème étant de tracer les composantes $\sigma_1(t)$, $\sigma_3(t)$ en fonction de $\ln(F_3(t))$, nous allons exprimer ces trois grandeurs à l'aide de la variation de volume J qui va décroitre à partir de 1.
Nous obtiendrons ainsi deux courbes paramétrées : $\left(\ln(F_3(J)), \sigma_1(J)\right)$ et $\left(\ln(F_3(J)), \sigma_3(J)\right)$.

Question4 :
En utilisant le fait que $\sigma_2 = 0$, que $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{F}}$ et le résultat de la question 1, donnez une expression de $\left[2F_2^{\ 2} - F_3^{\ 2}\right]$ en fonction de J.

Question5 :
En utilisant la réponse à la question 4 et le fait que $J = F_2 F_3$ en déduire les expressions de F_2 et F_3 en fonction de J pendant cette phase élastique.
(Petite aide : $\left(2F_2^{\ 2}\right)\left(-F_3^{\ 2}\right) = -2J^2$)

Question6 :
En utilisant $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{F}}$ pendant cette phase, les résultats de la première question et les résultats de la question 5, donnez les expressions de σ_1 et σ_3 en fonction de J. Vérifiez vos calculs en calculant $tr\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)$

Question7 :
Calculez la contrainte équivalent plastique de Von Mises du critère $\sqrt{\frac{3}{2}\underline{\underline{\psi}}^{d,s}_{\mathrm{Re}l} : \underline{\underline{\psi}}^{d,s}_{\mathrm{Re}l}} \leq k\left(p_{cum}\right)$ en fonction de J et donnez l'équation donnant la valeur limite J_{el} de J à la fin de cette première phase de comportement élastique sous la forme d'une expression de J_{el} égale à $\left(k(0)\right)^2$, $Expr\left(J_{el}\right) = k(0)^2$
On ne résoudra bien sûr pas, mais on vérifiera que $Expr(1) = 0$ et pour les plus courageux, on tracera $Expr(J)$ pour J décroissant à partir de 1 pour vérifier graphiquement que $Expr(J)$ est monotone et positif.

Question8 :
Cette question est facultative.
Tracez les composantes $\sigma_1(t)$, $\sigma_3(t)$ en fonction de $\ln(F_3(t))$

Etude de la deuxième phase pendant laquelle le comportement est plastique

Nous avons montré question 2 que lorsque le critère est atteint : $s_1^2+s_2^2+s_3^2=\frac{2}{3}\left(\frac{k(p_{cum})}{J}\right)^2$, il existe θ tel que

$$s_1=\frac{2}{3}\frac{k(p_{cum})}{J}\cos(\theta)$$
$$s_2=\frac{2}{3}\frac{k(p_{cum})}{J}\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$s_3=\frac{2}{3}\frac{k(p_{cum})}{J}\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)$$

Par ailleurs $tr\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)=3k_0(J-1)$

Question9 :

Déterminez la valeur de $\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)$ en fonction de J et $k(p_{cum})$ pendant la phase plastique.

Question10 :

En déduire les valeurs de $\cos(\theta)$ et $\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)$ en fonction de J et $k(p_{cum})$.

Question11 :

En déduire les expressions de σ_1 et σ_3 en fonction de J et $k(p_{cum})$ pendant la phase plastique.

Au point où nous en sommes remarquons que si l'on sait calculer l'évolution de J et p_{cum} en fonction de $F_3(t)$ imposé, nous saurons tracer les courbes $\sigma_1(t)$, $\sigma_3(t)$ en fonction de $\ln\left(F_3(t)\right)$.

Nous allons montrer ci-dessous que l'on sait calculer $\dot{J}$ et $\dot{p}_{cum}$ en fonction de $\dot{F}_3(t)$ imposé (on peut choisir plutôt $\dot{\theta}$ et $\dot{p}_{cum}$ au lieu de $\dot{J}$ et $\dot{p}_{cum}$, compte tenu de la réponse à la question 9 c'est équivalent)

Question12 :

On sait que $\underline{\underline{d}}^p=\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\dot{P}}}\cdot\underline{\underline{P}}^{-1}+{}^t\underline{\underline{P}}^{-1}\cdot{}^t\underline{\underline{\dot{P}}}\right)$ est donné par la li d'écoulement plastique par $\underline{\underline{d}}^p=\frac{3}{2}\frac{\dot{p}_{cum}}{k(p_{cum})}\underline{\underline{\psi}}^{d,s}_{\mathrm{Re}l}$, avec $\underline{\underline{P}}(t)=\begin{bmatrix} p_1(t) & 0 & 0\\ 0 & p_2(t) & 0\\ 0 & 0 & p_3(t)\end{bmatrix}$.

Exprimez $\frac{\dot{p}_1}{p_1}$, $\frac{\dot{p}_2}{p_2}$, $\frac{\dot{p}_3}{p_3}$ en fonction de $\dot{p}_{cum}$, J et $k(p_{cum})$ (ou en fonction de $\dot{p}_{cum}$, J et θ)

Question13 :

En vous servant de la réponse donnée à la question 1ter et des résultats ci-dessus, donnez les deux équations linéaires permettant de calculer $\dot{J}$ et $\dot{p}_{cum}$ en fonction de $\dot{F}_3(t)$.

Si vous ne souhaitez pas développer les calculs, expliquez en soigneusement le principe.

Application numérique (facultatif)

Pour l'application numérique, on utilise les données ci-dessous

$$\underline{\underline{F}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & F_2(t) & 0\\ 0 & 0 & F_3(t)\end{bmatrix} \text{ avec } \quad F_3(t)=1+\alpha_3 * t,\ \ \alpha_3=-0.01$$

$\sigma_0=600$ MPa, $k_0=175000$ MPa, $\mu_0=80769$ MPa

$k(p_{cum})=\sigma_0\left(1+\alpha\left(e^{p_{cum}}-1\right)\right), k'(p_{cum})=\sigma_0\alpha e^{p_{cum}}$, $\alpha=0.1$