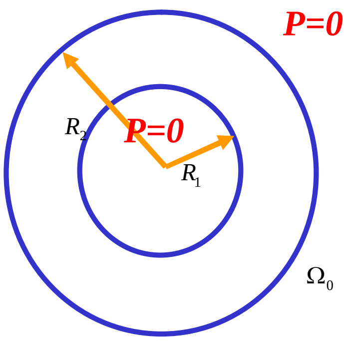
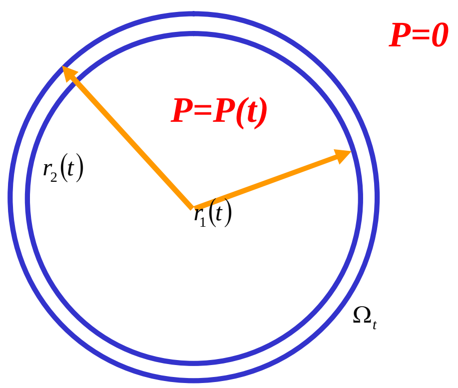
Gonflement dôun ballon à paroi épaisse constituée dôun matériau hyperélastique incompressible isotrope

Nous considérons un ballon sphérique à paroi épaisse.
Notons R_1 le rayon intérieur et R_2 le rayon extérieur dans la configuration de référence.
La configuration de référence est un état naturel (contraintes initiales nulles).
La pression extérieure reste nulle.
La pression intérieure évolue et est égale à $P(t)$ à lôinstant t.
Notons $r_1(t)$ le rayon intérieur et $r_2(t)$ le rayon extérieur dans la configuration actuelle.
Nous nous intéressons aux évolutions isothermes.
Le matériau constitutif du ballon est hyperélastique incompressible isotrope et son comportement est donné par la densité massique dôénergie libre $\Psi(I_1, I_2)$, où $I_1 = tr(\underline{\underline{C}})$ et $I_2 = \frac{1}{2}\left(I_1^2 - tr(\underline{\underline{C}}.\underline{\underline{C}})\right)$.

Nous souhaitons déterminer la relation entre $P(t)$ et $r_1(t)$.



Configuration de référence



Configuration actuelle

Question 1 :

Nous recherchons les solutions du problème dôévolution à symétrie sphérique.
Ainsi en notant $\underline{X} = R\underline{e}_r(\theta,\varphi)$ on cherche $\underline{\Phi}(\underline{X},t)$ sous la forme $\underline{\Phi}(\underline{X},t) = \Phi_r(R,t)\underline{e}_r(\theta,\varphi)$.
On rappelle que, en coordonnées sphériques :

$$\underline{\underline{Grad}}(\underline{\Phi}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Phi_r}{\partial R} & \dfrac{1}{R}\left[\dfrac{\partial \Phi_r}{\partial \varphi} - \Phi_\varphi\right] & \dfrac{1}{R}\left[\dfrac{1}{\sin\varphi}\dfrac{\partial \Phi_r}{\partial \theta} - \Phi_\theta\right] \\ \dfrac{\partial \Phi_\varphi}{\partial R} & \dfrac{1}{R}\left[\dfrac{\partial \Phi_\varphi}{\partial \varphi} + \Phi_r\right] & \dfrac{1}{R}\left[\dfrac{1}{\sin\varphi}\dfrac{\partial \Phi_\varphi}{\partial \theta} - \Phi_\theta \cot\varphi\right] \\ \dfrac{\partial \Phi_\theta}{\partial R} & \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial \Phi_\theta}{\partial \varphi} & \dfrac{1}{R}\left[\dfrac{1}{\sin\varphi}\dfrac{\partial \Phi_\theta}{\partial \theta} + \Phi_\varphi \cot\varphi + \Phi_r\right] \end{bmatrix}$$

1.a) En exprimant lôincompressibilité du matériau, **établir** une équation différentielle sur $\Phi_r(R,t)$.

Réponse 1.a)

En tenant compte de la symétrie sphérique (champs ne dépendant que de R, $\Phi_\theta = \Phi_\varphi = 0$), il vient $\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_r}{\partial R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Phi_r}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Phi_r}{R} \end{bmatrix}$

Loi de comportement hyperélastique <u>incompressible</u> implique $\det \underline{\underline{F}} = \frac{\partial \Phi_r}{\partial R}\left(\frac{\Phi_r}{R}\right)^2 = 1$

1.b) En intégrant cette équation **exprimer** $r(t) = \Phi_r(R,t)$ en fonction de $(R, R_1, r_1(t))$

Réponse 1.b)

$$\Phi_r(R,t) = \left(R^3 + (r_1(t))^3 - R_1^3\right)^{\frac{1}{3}} = r(t)$$

1.c) **Vérifier** ce résultat en calculant le volume de matériau compris entre les rayons R_1 et R dans la configuration de référence et entre les rayons $r_1(t)$ et $r(t) = \Phi_r(R,t)$ dans la configuration actuelle.

Réponse 1.c)

$$\frac{4\pi}{3}\left[(r(t))^3 - (r_1(t))^3\right] = \frac{4\pi}{3}\left(R^3 - R_1^3\right)$$

1.d) **Montrer** que $\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \left[\frac{r(t)}{R}\right]^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \left[\frac{r(t)}{R}\right] & 0 \\ 0 & 0 & \left[\frac{r(t)}{R}\right] \end{bmatrix}$

Réponse 1.d)

trivial

<u>**Question 2 :**</u>

Nous supposons que le matériau est néo-hookéen incompressible isotrope, c'est-à-dire que $\rho_0 \Psi(I_1, I_2) = C_{10}(I_1 - 3)$.

2.a) **Montrez** que le champ de contrainte de Cauchy sœxprime à lœaide du comportement sous la forme

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 2C_{10}\left[\frac{r(t)}{R}\right]^{-4} + c(R,t) & 0 & 0 \\ 0 & 2C_{10}\left[\frac{r(t)}{R}\right]^{2} + c(R,t) & 0 \\ 0 & 0 & 2C_{10}\left[\frac{r(t)}{R}\right]^{2} + c(R,t) \end{bmatrix}$$

Où $c(R,t)$ est un champ scalaire indéterminé.

Réponse 2.a)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho_0\left[\left(2\frac{\partial\Psi}{\partial I_1}+2I_1\frac{\partial\Psi}{\partial I_2}\right)\underline{\underline{F}}.{}^t\underline{\underline{F}}-2\frac{\partial\Psi}{\partial I_2}\underline{\underline{F}}.{}^t\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}}.{}^t\underline{\underline{F}}\right]+c\underline{\underline{I}}\,,\ c\ quelconque$$

Avec $\rho_0\Psi(I_1,I_2)=C_{10}(I_1-3)$, il vient $\underline{\underline{\sigma}}=2C_{10}\underline{\underline{F}}.{}^t\underline{\underline{F}}+c\underline{\underline{I}}$.

Comme $\underline{\underline{F}}=\begin{bmatrix}\left[\frac{r(t)}{R}\right]^{-2} & 0 & 0\\ 0 & \left[\frac{r(t)}{R}\right] & 0\\ 0 & 0 & \left[\frac{r(t)}{R}\right]\end{bmatrix}$

$$\underline{\underline{\sigma}}=\begin{bmatrix}2C_{10}\left[\frac{r(t)}{R}\right]^{-4}+c(R,t) & 0 & 0\\ 0 & 2C_{10}\left[\frac{r(t)}{R}\right]^{2}+c(R,t) & 0\\ 0 & 0 & 2C_{10}\left[\frac{r(t)}{R}\right]^{2}+c(R,t)\end{bmatrix}$$

2.b) Nous avons noté $r(R,t)=\left(R^3+(r_1(t))^3-R_1{}^3\right)^{\frac{1}{3}}$.

En faisant le changement de variable $R\rightarrow r$, nous avons en inversant cette relation $R(r,t)=\left(r^3-(r_1(t))^3+R_1{}^3\right)^{\frac{1}{3}}$.

Montrez que le champ de contrainte de Cauchy s'exprime à l'aide du comportement sous la forme

$$\underline{\underline{\sigma}}(r,t)=\begin{bmatrix}2C_{10}\left[\frac{r}{R(r,t)}\right]^{-4}+\tilde{c}(r,t) & 0 & 0\\ 0 & 2C_{10}\left[\frac{r}{R(r,t)}\right]^{2}+\tilde{c}(r,t) & 0\\ 0 & 0 & 2C_{10}\left[\frac{r}{R(r,t)}\right]^{2}+\tilde{c}(r,t)\end{bmatrix}$$

Où $\tilde{c}(r,t)$ est un champ scalaire indéterminé.

Réponse 2.b)

trivial

2.c) On rappelle qu'en coordonnées sphériques

$$\underline{div}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)=\left[\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{2\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}-\sigma_{\theta\theta}+\sigma_{r\varphi}\cot\varphi}{r}\right]\underline{e}_r$$
$$+\left[\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial\sigma_{\varphi\theta}}{\partial\theta}+\frac{\left(\sigma_{\varphi\varphi}-\sigma_{\theta\theta}\right)\cot\varphi+3\sigma_{r\varphi}}{r}\right]\underline{e}_\varphi$$
$$+\left[\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi\theta}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{3\sigma_{r\theta}+2\sigma_{\varphi\theta}\cot\varphi}{r}\right]\underline{e}_\theta$$

Déterminer $\frac{\partial\tilde{c}}{\partial r}$ à lœaide de lœéquilibre en fonction de $\left(C_{10},\left[\frac{r}{R(r,t)}\right],\frac{\partial}{\partial r}\left(\left[\frac{r}{R(r,t)}\right]^{-4}\right)\right)$

Réponse 2.c)

En tenant compte de la symétrie sphérique

(champs ne dépendant que de *r*, $\sigma_{\theta\theta}=\sigma_{\varphi\varphi},\sigma_{r\theta}=\sigma_{r\varphi}=\sigma_{\theta\varphi}=0$) lœéquilibre se réécrit :

$$\underline{div}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)=\left[\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{2\sigma_{rr}-2\sigma_{\theta\theta}}{r}\right]\underline{e}_r=\underline{0}$$

Cela donne : $\frac{\partial\tilde{c}}{\partial r}=2C_{10}\left[-\frac{2}{r}\left[\frac{r}{R(r,t)}\right]^{-4}+\frac{2}{r}\left[\frac{r}{R(r,t)}\right]^{2}-\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{r}{R(r,t)}\right]^{-4}\right]$

$\tilde{c}(r,t)$ est déterminé par intégration à une constante (fonction du temps) près.

La constante est choisie pour que $\sigma_{rr}(r_2,t)=0$

Question 3 :

Pour déterminer $\tilde{c}(r,t)$ on peut utiliser la condition aux limites $\sigma_{rr}(r_2,t)=0$ en intégrant lœéquation ci dessus.

Ensuite, la relation recherchée entre $P(t)$ et $r_1(t)$ serait donnée par $\sigma_{rr}(r_1,t)=-P(t)$.

Ces calculs sont lourds, aussi nous allons utiliser une méthode plus astucieuse.

En remarquant que $\sigma_{rr}(r_2)=0$ et $\sigma_{rr}(r_1)=-P$ on a $P=\int_{r_1}^{r_2}\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}dr$.

3.a) En utilisant lœéquation dœéquilibre, **exprimer** $P=\int_{r_1}^{r_2}\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}dr$ à lœaide dœune intégrale ne faisant pas intervenir $\tilde{c}(r,t)$.

Réponse 3.a)

Lœéquilibre sœécrit $\underline{div}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)=\left[\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{2\sigma_{rr}-2\sigma_{\theta\theta}}{r}\right]\underline{e}_r=\underline{0}$

Ainsi $P=\int_{r_1}^{r_2}\frac{2\left(\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{rr}\right)}{r}dr$

Or $\underline{\underline{\sigma}}(r,t)=\begin{bmatrix} 2C_{10}\left[\dfrac{r}{R(r,t)}\right]^{-4}+\tilde{c}(r,t) & 0 & 0 \\ 0 & 2C_{10}\left[\dfrac{r}{R(r,t)}\right]^{2}+\tilde{c}(r,t) & 0 \\ 0 & 0 & 2C_{10}\left[\dfrac{r}{R(r,t)}\right]^{2}+\tilde{c}(r,t) \end{bmatrix}$

Donc $P=\int_{r_1}^{r_2} 2C_{10}\left[-\dfrac{2}{r}\left[\dfrac{r}{R(r)}\right]^{-4}+\dfrac{2}{r}\left[\dfrac{r}{R(r)}\right]^{2}\right]dr$, avec $r_2=\left(R_2{}^3+(r_1)^3-R_1{}^3\right)^{\frac{1}{3}}$ et

$R(r)=\left(r^3-(r_1)^3+R_1{}^3\right)^{\frac{1}{3}}$

3.b) En **déduire** P exprimé à l'aide d'une intégrale de $\lambda_1=\dfrac{r_1}{R_1}$ à

$\lambda_2(\lambda_1)=\dfrac{r_2}{R_1}=\dfrac{\left(R_2{}^3+(r_1)^3-R_1{}^3\right)^{\frac{1}{3}}}{R_1}$, d'une grandeur fonction de $\left(C_{10},\lambda=\dfrac{r}{R_1},\rho(\lambda)\right)$

où $\rho(\lambda)=\left(\lambda^3-(\lambda_1)^3+1\right)^{\frac{1}{3}}$

Réponse 3.b)

Evident avec le changement de variable $\lambda=\dfrac{r}{R_1}$, dans l'intégrale.

3.c)Lorsque l'on fait l'approximation de paroi mince, on montre que

$P(\lambda_1)=\dfrac{4(R_2-R_1)C_{10}}{R_1}\left(\dfrac{1}{\lambda_1}-\dfrac{1}{\lambda_1{}^7}\right)$ avec $\lambda_1=\dfrac{r_1}{R_1}$. **Vérifier** que le résultat de la question 3.b est cohérent avec cette approximation.

Réponse 3.c)

En notant $\dfrac{r}{R}=\lambda$ et $r_2-r_1=e=\dfrac{E}{\lambda^2}$, nous avons $r\approx\lambda R_1$

En approchant la fonction à intégrer par une constante on a

$$P(\lambda_1)\approx(r_2-r_1)2C_{10}\left[-\frac{2}{r}\left[\frac{r}{R(r)}\right]^{-4}+\frac{2}{r}\left[\frac{r}{R(r)}\right]^{2}\right]\approx\frac{4EC_{10}}{R_1}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^7}\right)$$

<u>Les résultats sont cohérents</u>

3.d) On revient aux ballons à paroi épaisse. **Tracer** les courbes

$P(r_1)=\int_{r_1}^{r_2(r_1)} 2C_{10}\left[-\dfrac{2}{r}\left[\dfrac{r}{R(r)}\right]^{-4}+\dfrac{2}{r}\left[\dfrac{r}{R(r)}\right]^{2}\right]dr$ avec les valeurs suivantes de $\dfrac{R_2}{R_1}$

$\dfrac{R_2}{R_1}=2$, $\dfrac{R_2}{R_1}=1{,}5$, $\dfrac{R_2}{R_1}=1{,}1$ et $\dfrac{R_2}{R_1}=1{,}01$.

Comparer avec l'approximation de paroi mince et **commenter**.

Je ne l'ai pas fait.