

Examen MPM

27/01/2020

Daniel Weisz-Patrault

Vos documents de cours sont autorisés

Enroulement des tôles métalliques en grandes transformations

Le bobinage est un procédé important qui consiste à enrouler une tôle sur un cylindre (mandrin) en appliquant un couple sur le mandrin ce qui permet d'appliquer une force de traction résultante F_b (traction de bobinage) sur la tôle. Cet enroulement a lieu après le procédé de laminage (cf. figure 1a). Un certain nombre de problèmes intéressants sont associés à ce procédé d'enroulement, notamment l'apparition de contraintes résiduelles et de défauts de planéité par flambement sous contraintes internes (cf. figure 1b).

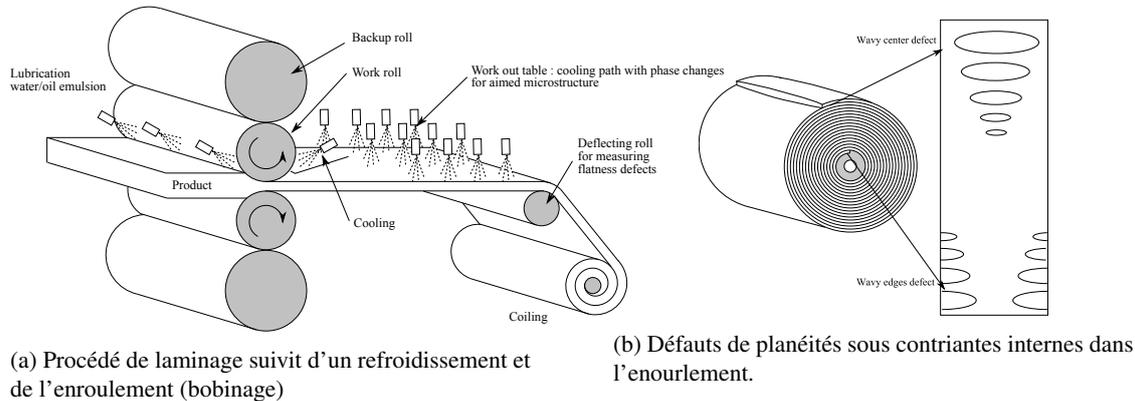


FIGURE 1

Dans sa configuration initiale la surface moyenne de la tôle est plane. Un aspect important pour les contraintes résiduelles est que la section S_0 de la tôle n'est pas rectangulaire, mais a un profil d'épaisseur quadratique (cf. figure 2a). Le domaine de référence est donné en cartésien (X, Y, Z) (vecteurs élémentaires $\underline{e}_X, \underline{e}_Y, \underline{e}_Z$) par :

$$\Omega_0 = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3, X \in [0, +\infty[, Y \in [-\delta(Z), \delta(Z)], Z \in [-L, L]\} \quad (1)$$

où $Z \in [-L, L] \mapsto \delta(Z)$ est une fonction quadratique simple. **Bien que ce problème ressemble à un problème de plaque, on l'étudiera avec un modèle 3D de Cauchy.**

Pour étudier la transformation d'enroulement on fixe l'observateur sur le cylindre central (mandrin) et l'on regarde la tôle s'enrouler en tournant autour (cf. figure 2b). Ainsi la configuration actuelle est paramétrée en polaire (r, θ, z) (vecteurs élémentaires $\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z$).

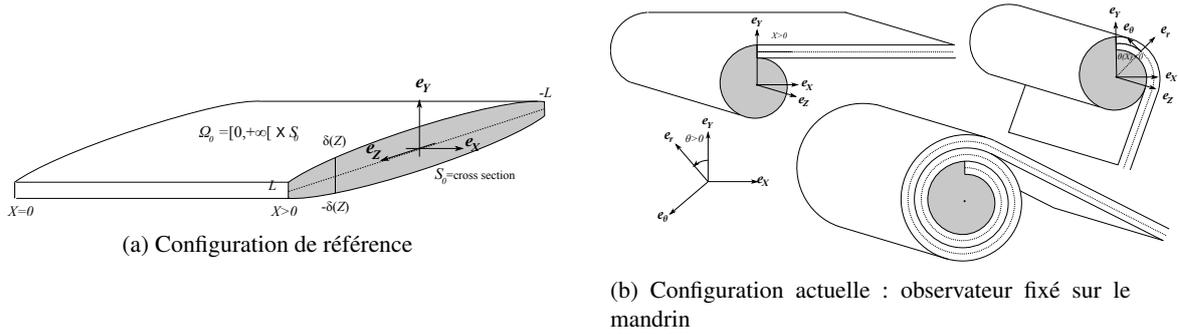


FIGURE 2

La démarche de modélisation repose sur quelques hypothèses.

Hypothèse 1 Une fois en contact, il n'y a pas de glissement entre les spires de la bobine (uniquement pression aux interface pas de cisaillement).

Hypothèse 2 Les sections plane dans la configuration de référence (" $X=\text{Constant}$ ") sont transformées en section planes dans la configuration actuelle (" $\theta=\text{Constant}$ ").

Hypothèse 3 Déformations planes : plans " $Z=\text{Constant}$ " dans la configuration de référence sont transformés en plans " $z=\text{Constant}$ " dans la configuration actuelle).

Question 1 Expliquer pourquoi les hypothèses 1 et 2 permettent de conclure que l'angle $\theta(X, Y, Z, t)$ de la particule dans la configuration actuelle ne dépend en fait que de X , et $\theta : X \mapsto \theta(X)$ est bijective.

Question 2 On écrit la transformation d'enroulement comme suit

$$\Phi(X, Y, Z, t) = r(X, Y, Z, t)e_r + z(X, Y, Z, t)e_z \quad (2)$$

Expliquer pourquoi l'hypothèse 1 permet de remplacer le temps t par X_{max} qui représente la longueur de tôle enroulée à l'instant t .

Question 3 De même expliquer pourquoi l'hypothèse 3 permet d'écrire $Z = z(X, Y, Z, t)$ et $e_Z = e_z$

Dans la suite on cherche à déterminer $\theta(X)$ et $r(X, Y, Z, X_{max})$. Pour cela on décompose le problème en deux sous-problèmes plus simples. On considère une portion de tôle comprise entre X et $X + dX$ que l'on va enrouler sur le reste de la bobine.

La première étape du modèle consiste à courber la surface moyenne de la portion de tôle sur un cylindre de rayon R arbitraire (cf. figure 3a). (La surface moyenne de ce domaine est en $Y = 0$). Ce rayon sera déterminé par la suite.

La deuxième étape du modèle consiste à plaquer la portion de tôle courbée (rayon R) sur le reste de la bobine déjà formée. Il s'agit donc de calculer les pressions de contact (cf. figure 3b). Ces pressions dépendent bien sûr du rayon de courbure R .

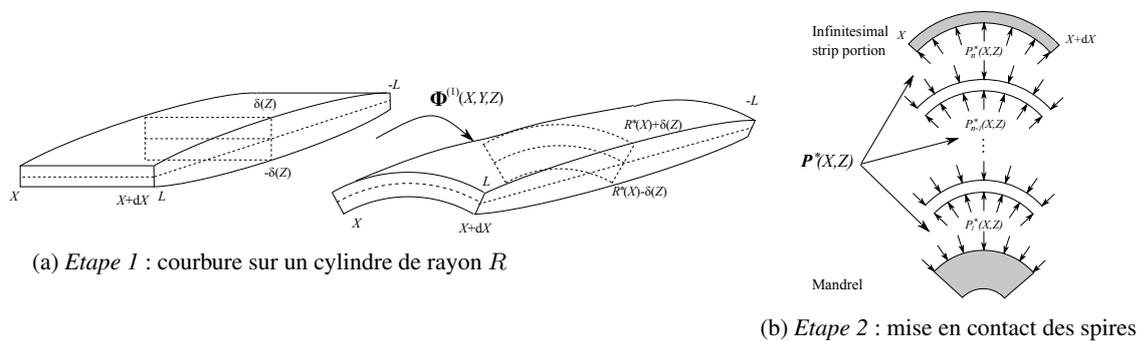


FIGURE 3

La troisième étape du modèle consiste à déterminer R de telle sorte que la résultante de traction totale $\int_{S_0} \sigma_{\theta\theta}^{tot} dS$ issue des étapes 1 et 2 soit égale à la traction de bobinage F_b .

Dans ce devoir on ne traitera que la première étape du calcul.

Etape 1 : courbure élasto-plastique en grandes transformations

Question 4 En pratique on obtient une courbure en imposant des conditions aux limites (en déplacement ou en contrainte) sur la tôle. Mais cela nous conduirait à un problème trop difficile à résoudre à la main. A la place, on impose la transformation dans le domaine considéré. Cela ne serait possible qu'en imposant des forces de volume pour contrôler les déplacements dans tout le domaine, ce qui n'est pas possible en pratique. L'approche proposée est donc une forte approximation d'un vrai problème de mécanique avec conditions aux limites.

En posant $\underline{\Phi}^{(1)}(X, Y, Z)$ la transformation de la première étape (courbure sur un cylindre de rayon R cf. figure 3a). Montrer que la transformation suivante vérifie les hypothèses 1 à 3 et a bien l'effet voulu de courbure :

$$\underline{\Phi}^{(1)}(X, Y, Z) = (R + Y)\underline{e}_r + Z\underline{e}_z \quad (3)$$

Question 5 Dans le système de coordonnées choisi (cf. figure 2b) on a :

$$\begin{cases} \underline{e}_r = -\sin(\theta)\underline{e}_X + \cos(\theta)\underline{e}_Y \\ \underline{e}_\theta = -\cos(\theta)\underline{e}_X - \sin(\theta)\underline{e}_Y \\ \underline{e}_z = \underline{e}_Z \end{cases} \quad (4)$$

En déduire que le gradient de la transformation $\underline{F}(X, Y, Z)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{F}(X, Y, Z) = \underline{\nabla}_X \underline{\Phi}^{(1)}(X, Y, Z) = -\frac{R+Y}{R}\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_X + \underline{e}_r \otimes \underline{e}_Y + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_Z \quad (5)$$

Question 6 Calculer $J = \det [\underline{F}(X, Y, Z)]$ et écrire $\underline{F}(X, Y, Z)$ en fonction de J .

Question 7 On considère que la tôle est élasto-plastique de Von Mises (hypothèses thermodynamiques du cours) avec écrouissage isotrope (pas d'écrouissage cinématique). On introduit donc une configuration relâchée et un tenseur plastique \underline{P} et un tenseur élastique \underline{E} . Faire un schéma représentant les configurations de référence, actuelle et relâché et indiquer l'action de \underline{P} , \underline{E} et \underline{F} . En déduire la relation liant ces trois tenseurs et commenter la compatibilité de chacun.

Question 8 On suppose qu'on peut écrire le tenseur plastique sous la forme suivante :

$$\underline{P} = -P_1\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_X + P_2\underline{e}_r \otimes \underline{e}_Y + P_3\underline{e}_z \otimes \underline{e}_Z \quad (6)$$

Calculer $\det [\underline{P}]$ en fonction de P_1, P_2, P_3 .

Question 9 Expliquer pourquoi le tenseur plastique est isochore pour la plupart des métaux, en déduire une relation simple entre P_1, P_2, P_3 .

Question 10 Calculer l'inverse de \underline{P} .

Question 11 Déduire de la question précédente et de la question 6 que :

$$\underline{E} = \frac{J}{P_1}\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{1}{P_2}\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{P_3}\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (7)$$

Question 12 On suppose que le comportement du métal est un Néo-Hookéen. On a donc d'après le cours (où k est le coefficient d'incompressibilité et μ le module de cisaillement)

$$\underline{\sigma} = \frac{\mu}{J^{\frac{5}{3}}}\underline{E} \cdot {}^t\underline{E} + \left(k(J-1) - \frac{\mu}{J^{\frac{5}{3}}}\frac{\text{tr}(\underline{E} \cdot {}^t\underline{E})}{3} \right) \underline{1} \quad (8)$$

En déduire les composantes non-nulle de $\underline{\sigma}$ en fonction de J, P_1, P_2, P_3 .

Question 13 Calculer la contrainte plastique dans la configuration relâchée (notée $\underline{\Psi}_{rel}$) et calculer les composantes de sa partie déviatorique-symétrique (notée $\underline{\Psi}$) en fonction de J, P_1, P_2, P_3 .

Question 14 On note \underline{d}^p le taux de déformation plastique défini par :

$$\underline{d}^p = \frac{1}{2} \left(\underline{\dot{P}} \cdot \underline{P}^{-1} + {}^t \underline{P}^{-1} \cdot \underline{\dot{P}} \right) \quad (9)$$

Calculer \underline{d}^p en fonction de P_1, P_2, P_3 et $\dot{P}_1, \dot{P}_2, \dot{P}_3$.

Question 15 On note \dot{p}_{cum} le taux de déformation plastique cumulée défini par :

$$\dot{p}_{cum} = \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{d}}^p : \underline{\underline{d}}^p} \quad (10)$$

Calculer \dot{p}_{cum} en fonction de P_1, P_2, P_3 et $\dot{P}_1, \dot{P}_2, \dot{P}_3$.

Question 16 En notant $\sigma_Y(p_{cum})$ la limite d'élasticité, le critère de Von Mises (sans écrouissage cinématique) s'écrit :

$$\sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{\Psi}} : \underline{\underline{\Psi}}} \leq \sigma_Y(p_{cum}) \quad (11)$$

Dans la zone élastique que valent P_1, P_2, P_3 ? Dans la zone plastique, que devient la relation (11) ? En écrivant qu'une frontière élastique/plastique est à la fois dans la zone élastique et dans la zone plastique, déduire qu'il y a deux zones plastiques définies par le système d'équation suivant. On notera qu'à une frontière élastique/plastique il n'y a pas encore eu d'écrouissage c'est-à-dire $p_{cum} = 0$

$$\begin{cases} \mu J^{-\frac{2}{3}} (1 - J^2) = \sigma_Y(0) & \text{si } 1 \geq J^2 \\ \mu J^{-\frac{2}{3}} (J^2 - 1) = \sigma_Y(0) & \text{si } 1 \leq J^2 \end{cases} \quad (12)$$

Faire un schéma de la portion de tôle courbée en affichant les 2 zones plastiques dans l'épaisseur de la tôle. Indiquer les conditions $1 \geq J^2$ ou $1 \leq J^2$ dans chacune des zones et indiquer qualitativement la direction du taux de déformation plastique.

Question 17 La loi d'écoulement est associée, c'est-à-dire que $\underline{\underline{d}}^p = \lambda \underline{\underline{N}}$ avec $\lambda \geq 0$ et $\underline{\underline{N}}$ la normal au domaine d'élasticité. On sait calculer $\underline{\underline{N}}$ pour un matériaux de Von Mises et on obtient :

$$\frac{\underline{\underline{N}}}{\sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{N}}}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \underline{\underline{e}}_\theta \otimes \underline{\underline{e}}_\theta - \frac{1}{\sqrt{6}} (\underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r + \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_z) \quad (13)$$

En déduire que :

$$\frac{\dot{P}_2}{P_2} = \frac{\dot{P}_3}{P_3} = -\frac{1}{2} \frac{\dot{P}_1}{P_1} \quad (14)$$

Intégrer ces relations pour obtenir des relations entre P_1, P_2, P_3 .

Question 18 Déduire de la question précédente et de la question 15 que :

$$\dot{p}_{cum} = \left| \frac{\dot{P}_1}{P_1} \right| \quad (15)$$

Question 19 En reprenant le schéma de la question 16, expliquer qualitativement pourquoi :

$$\begin{cases} \frac{\dot{P}_1}{P_1} \leq 0 & \text{si } 1 \geq J^2 \\ \frac{\dot{P}_1}{P_1} \geq 0 & \text{si } 1 \leq J^2 \end{cases} \quad (16)$$

Question 20 En déduire p_{cum} en fonction de la zone plastique en intégrant le résultat de la question 18.

Question 21 On se donne une loi d'écrouissage exponentielle du type :

$$\sigma_Y(p_{cum}) = \sigma_0 (1 + \gamma(\exp(p_{cum}) - 1)) \quad (17)$$

où σ_0 est la limite d'élasticité initiale et γ un paramètre d'écrouissage. En réinjectant le résultat de la question précédente déduire $\sigma_Y(p_{cum})$ en fonction de P_1 et J selon les zones plastiques.

Question 22 En écrivant le critère de Von Mises dans les zones plastiques, montrer que P_1 est la racine d'un polynôme de degré 3 (un polynôme différent pour chacune des deux zones plastiques), ce qui détermine tout le problème.

Question 23 Calculer la divergence de $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction de P_1 et J et calculer les forces de volume qu'il faudrait imposer pour réaliser la transformation $\underline{\underline{\Phi}}^{(1)}$.