Mécanique linéaire de la rupture

Taux de restitution d'énergie

Daniel Weisz-Patrault

Master AMMS

4 Mars 2020

Objectifs généraux

- Culture générale
- Concepts fondamentaux pour les matériaux fissurés
- Méthodes de calcul
- Prévision de la résistance résiduelle
- Durée de vie

Objectifs de le séance

- Hypothèses fondamentales de la mécanique linéaire de la rupture
- Notion de taux de relaxation d'énergie
- Critère énergétique de propagation de fissure
- Notion de facteur d'intensité de contrainte
- Pourquoi on peut se ramener à un problème linéaire
- Notion de propagation en fatigue
- Pratiquer sur un exemple

Plan de le séance

1. Hypothèses de la mécanique linéaire de la rupture
2. Facteurs d’intensité de contrainte
3. Rupture sous chargement monotone (ténacité)
4. Rupture sous chargement cyclique (loi de Paris)

Plan de le séance

Hypothèses de la mécanique linéaire de la rupture

Rappels et intégrale invariante de contour

- Puissance dissipée en tête de fissure

$$D^{fiss} = \underbrace{\lim_{\epsilon \to 0} \left[\int_{\partial B_\epsilon} \underline{N}. \left[- {}^t\underline{\underline{B}}.\underline{\underline{F}} + \rho_0 \left(\Psi + \frac{\underline{v}.\underline{v}}{2} \right) \right] \mathrm{d}S_0 \right]}_{\underline{g}(t)} .\underline{V}_0(t)$$

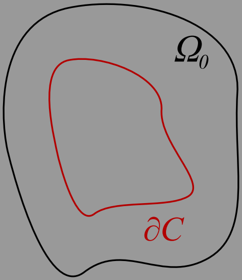
- Finallement on écrit

$$\boxed{D^{fiss} = \underline{g}(t).\underline{V}_0(t)}$$

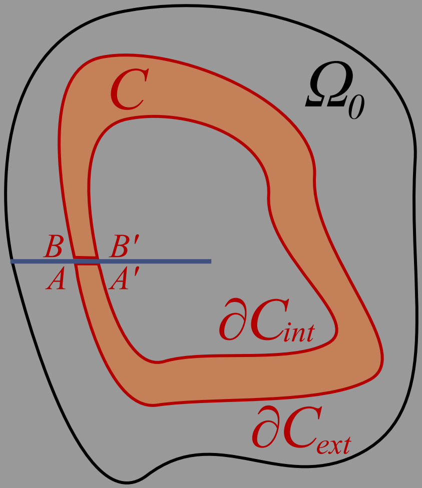
Rappels et intégrale invariante de contour

- Hypothèses
  - Hyperélasticité
  - Quasi-statique
  - Lèvres de la fissure libres de contraintes
  - Vitesse $\underline{V}_0(t)$ colinéaire à $\underline{e}_1$
- Pour tout contour fermé ∂C

$$\underline{g}(t).\underline{e}_1 = \left[\int_{\partial C} \underline{N}.\left[\rho_0 \Psi - {}^t\underline{\underline{B}}.\underline{\underline{F}}\right] \mathrm{d}S_0\right].\underline{e}_1 = 0$$



Rappels et intégrale invariante de contour



Rappels et intégrale invariante de contour

- Dans une structure fissurée : intégrale indépendante du contour dans la zone élastique

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{J} &= \left[\int_{\partial C_{int}} \underline{N}.\left[\rho_0 \Psi - {}^t\underline{\underline{B}}.\underline{\underline{F}}\right] \mathrm{d}S_0\right].\underline{e}_1 \\ &= \left[\int_{\partial C_{ext}} \underline{N}.\left[\rho_0 \Psi - {}^t\underline{\underline{B}}.\underline{\underline{F}}\right] \mathrm{d}S_0\right].\underline{e}_1 \end{aligned}}$$

- Si tout reste élastique on peut retirer la limite

$$\underline{g}.\underline{e}_1 = \left[\int_{\partial B} \underline{N}.\left[-{}^t\underline{\underline{B}}.\underline{\underline{F}} + \rho_0\left(\Psi + \frac{\underline{v}.\underline{v}}{2}\right)\right] \mathrm{d}S_0\right].\underline{e}_1$$

Rappels et intégrale invariante de contour

- En général le matériau ne reste pas élastique
- Augmentation des contraintes près de la tête de fissure
  - Plasticité
  - Endommagement
- Dissipations induites par la fissuration
- Mais non comptabilisées dans D^{fiss}

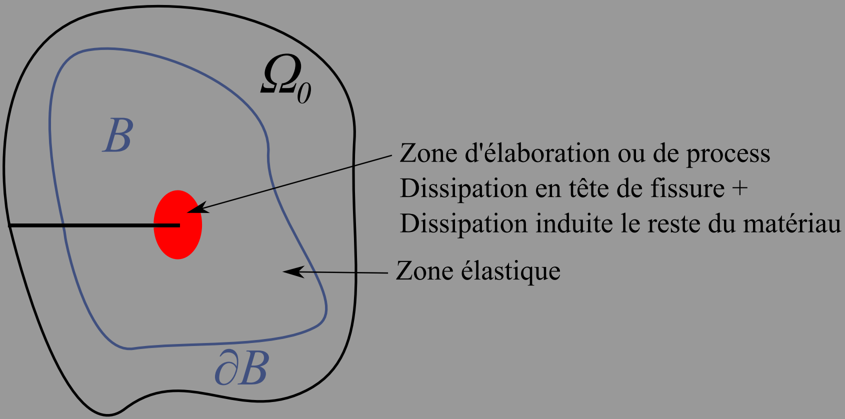
Rappels et intégrale invariante de contour

- Recherche d'un critère pour l'ingénieur
- Compromis entre :
  - Energie gagnée en fissurant
  - Coût de dissipation
- Il faut compter le prix total de dissipation pour fissurer et non juste la dissipation en tête de fissure

Hypothèses de la mécanique linéaire de la rupture

Hypothèse 1/3

$$\boxed{\text{Il existe une zone d'élaboration confinée}}$$



Hypothèses de la mécanique linéaire de la rupture

Dissipation globale lors de l'avancée d'une fissure

- Hypothèses
  - Petites transformations
  - Quasi-statique (succession d'états d'équilibre)
  - Localement isotherme
- Transformation et déplacement

$$\underline{\Phi} = \underline{X} + \underline{u}$$

- Gradient de la transformation

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\nabla}}\left[\underline{u}\right]$$

- Equilibre, énergie cinétique et résultante négligées

$$\underline{v}.\underline{v} \quad \text{et} \quad \int_{\partial B} \underline{\underline{\sigma}}.\underline{n} \mathrm{d}S$$

Dissipation globale lors de l'avancée d'une fissure

- Equation des bilans, puissance dissipée volumique

$$D = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla v}} - \rho \left(\dot{\Psi} + \cancel{\dot{T} s} \right) - \cancel{\frac{\underline{q}.\nabla T}{T}}$$

- Puissance dissipée dans B hors dissipation en tête de fissure

$$\mathcal{D} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{B - B_\epsilon} \left(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla v}} - \rho \left(\dot{\Psi} + \cancel{\dot{T} s} \right) - \cancel{\frac{\underline{q}.\nabla T}{T}} \right) \mathrm{d}\Omega$$

- Puissance dissipée en tête de fissure

$$D^{fiss} = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\int_{\partial B_\epsilon} \underline{n}. \left[-\underline{\underline{\sigma}}. \left(\cancel{\underline{\underline{I}}} + \underline{\underline{\nabla u}} \right) + \rho \left(\Psi + \cancel{\frac{\underline{v}.\underline{v}}{2}} \right) \right] \mathrm{d}S \right] .\underline{V}$$

- Intégrale indépendante de contour

$$\mathcal{J} = \left[\int_{\partial B} \underline{n}. \left[\rho \Psi - \underline{\underline{\sigma}}. \left(\cancel{\underline{\underline{I}}} + \underline{\underline{\nabla u}} \right) \right] \mathrm{d}S \right] .\underline{e}_1$$

Dissipation globale lors de l'avancée d'une fissure

- Puissance dissipée dans B hors dissipation en tête de fissure

$$\mathcal{D} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{B-B_\epsilon} \left(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla v}} - \rho \dot{\Psi} \right) \mathrm{d}\Omega$$

- Puissance dissipée en tête de fissure

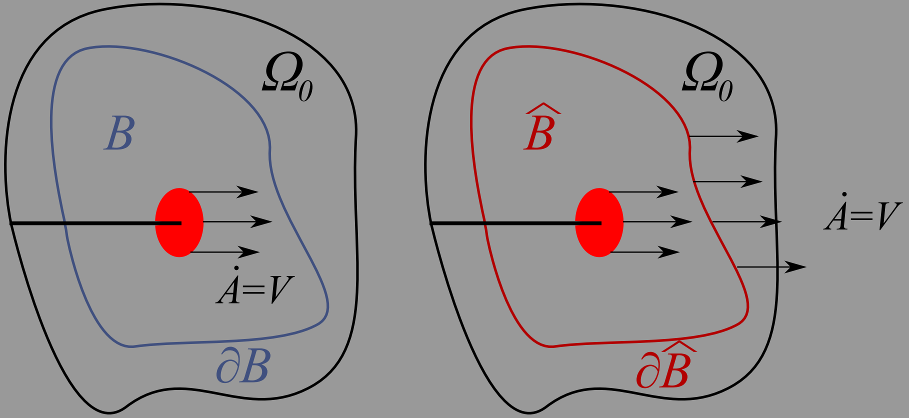
$$D^{fiss} = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\int_{\partial B_\epsilon} \underline{n}. \left[-\underline{\underline{\sigma}}.\underline{\underline{\nabla u}} + \rho \Psi \right] \mathrm{d}S \right] .\underline{V}(t)$$

- Intégrale indépendante du contour dans la zone élastique

$$\mathcal{J} = \int_{\partial B} \left[n_1 \rho \Psi - \underline{n}.\underline{\underline{\sigma}}.\frac{\partial \underline{u}}{\partial X_1} \right] \mathrm{d}S$$

Dissipation globale lors de l'avancée d'une fissure

- Domaine fixe et domaine mobile



Dissipation globale lors de l'avancée d'une fissure

- Calcul

$$\mathrm{div}\left[\underline{\underline{\sigma}}.\underline{v}\right] = \frac{\partial\left(\sigma_{ij}v_j\right)}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}v_j + \sigma_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \underbrace{\mathrm{div}\left[\underline{\underline{\sigma}}\right]}_{0\text{ (équilibre)}}.\underline{v} + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla v}}$$

- Puissance dissipée dans $B^\epsilon = B - B_\epsilon$ fixe

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^\epsilon &= \int_{B^\epsilon}\left(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla v}} - \rho\dot{\Psi}\right)\mathrm{d}\Omega \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{B^\epsilon}\rho\Psi\mathrm{d}\Omega\right] + \int_{B^\epsilon}\mathrm{div}\left[\underline{\underline{\sigma}}.\underline{v}\right]\mathrm{d}\Omega \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{B^\epsilon}\rho\Psi\mathrm{d}\Omega\right] + \int_{\partial B^\epsilon}\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}.\underline{v}\mathrm{d}S\end{aligned}$$

Dissipation globale lors de l'avancée d'une fissure

- On suppose qu'on est en régime permanent dans $\widehat{B}$, car assez proche de la fissure

$$\widetilde{\Psi}(\underline{X}, t) = \widetilde{\Psi}(\underline{X} - \underline{F}(t))$$

$$\dot{\widetilde{\Psi}}(\underline{X}, t) = -\dot{A}\underline{\nabla}\widetilde{\Psi}.\underline{e}_1$$

- Dans $\widehat{B}^\epsilon = \widehat{B} - \widehat{B}_\epsilon$ mobile

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{\widehat{B}^\epsilon} \rho\Psi \mathrm{d}\Omega\right] &= \int_{\widehat{B}^\epsilon} \rho\dot{\Psi}\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\widehat{B}^\epsilon} \rho\Psi\dot{A}\underline{n}.\underline{e}_1 \mathrm{d}S \\ &= \int_{\widehat{B}^\epsilon} \left(\rho\dot{\Psi} + \mathrm{div}\left[\rho\Psi\dot{A}\underline{e}_1\right]\right)\mathrm{d}\Omega \\ &= \int_{\widehat{B}^\epsilon} \underbrace{\left(\rho\dot{\Psi} + \dot{A}\underline{\nabla}\left[\rho\Psi\right].\underline{e}_1\right)}_{0}\mathrm{d}\Omega \end{aligned}$$

Dissipation globale lors de l'avancée d'une fissure

- On a

$$\int_{\widehat{B}^\epsilon} \rho \dot{\Psi} \mathrm{d}\Omega + \int_{\partial \widehat{B}^\epsilon} \rho \Psi \dot{A} n_1 \mathrm{d}S = 0$$

- B^ϵ et $\widehat{B}^\epsilon$ coincident à l'instant t

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{B^\epsilon} \rho \Psi \mathrm{d}\Omega\right] = \int_{\widehat{B}^\epsilon} \rho \dot{\Psi} \mathrm{d}\Omega$$

- D'où en régime permanent

$$\boxed{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{B^\epsilon} \rho \Psi \mathrm{d}\Omega\right] = \int_{\partial \widehat{B}^\epsilon} \rho \Psi \dot{A} n_1 \mathrm{d}S}$$

Dissipation globale lors de l'avancée d'une fissure

- En régime permanent

$$\underline{u}(X_1, X_2, t) = \underline{u}(X_1 - A(t), X_2)$$

- D'où

$$\underline{v}(\underline{X}, t) = -\dot{A}\frac{\partial \underline{u}}{\partial X_1}(\underline{X}, t)$$

- On a donc

$$\boxed{\int_{\partial B^\epsilon} \underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}.\underline{v}\mathrm{d}S = -\int_{\partial B^\epsilon} \underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}.\frac{\partial \underline{u}}{\partial X_1}\dot{A}\mathrm{d}S}$$

Dissipation globale lors de l'avancée d'une fissure

- Puissance dissipée dans $B^\epsilon = B - B_\epsilon$ fixe

$$\mathcal{D}^\epsilon = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{B^\epsilon} \rho\Psi \mathrm{d}\Omega\right] + \int_{\partial B^\epsilon} \underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}.\underline{v}\mathrm{d}S$$

- Par ailleurs

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{B^\epsilon} \rho\Psi \mathrm{d}\Omega\right] = \int_{\partial \widehat{B}^\epsilon} \rho\Psi \dot{A} n_1 \mathrm{d}S$$

- Et

$$\int_{\partial B^\epsilon} \underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}.\underline{v}\mathrm{d}S = -\int_{\partial B^\epsilon} \underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}.\frac{\partial \underline{u}}{\partial X_1}\dot{A}\mathrm{d}S$$

- D'où puisque $\partial \widehat{B}^\epsilon$ et ∂B^ϵ coincident à l'instant t

$$\mathcal{D}^\epsilon = \int_{\partial \widehat{B}^\epsilon} \left(\rho\Psi n_1 - \underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}.\frac{\partial \underline{u}}{\partial X_1}\right)\dot{A}\mathrm{d}S$$

Dissipation globale lors de l'avancée d'une fissure

- Puissance dissipée dans B hors dissipation en tête de fissure

$$\mathcal{D} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{B-B_\epsilon} \left(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla v}} - \rho \dot{\Psi} \right) \mathrm{d}\Omega$$

- On a obtenu

$$\mathcal{D} = \lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{D}^\epsilon = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial B - \partial B_\epsilon} \left(\rho \Psi n_1 - \underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}.\frac{\partial \underline{u}}{\partial X_1} \right) \dot{A} \mathrm{d}S$$

- Puissance dissipée en tête de fissure

$$D^{fiss} = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\int_{\partial B_\epsilon} \underline{n}. \left[-\underline{\underline{\sigma}}.\underline{\underline{\nabla u}} + \rho \Psi \right] \mathrm{d}S \right] .\underline{V}(t)$$

- D'où

$$D^{fiss} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial B_\epsilon} \left[\rho \Psi n_1 - \underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}.\frac{\partial \underline{u}}{\partial X_1} \right] \dot{A} \mathrm{d}S$$

Dissipation globale lors de l'avancée d'une fissure

- Puissance dissipée totale dans le domaine B

$$D^B = \mathcal{D} + D^{fiss} = \underbrace{\int_{\partial B} \left(\rho \Psi n_1 - \underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}.\frac{\partial \underline{u}}{\partial X_1} \right) \mathrm{d}S}_{G} \, \dot{A}$$

- Taux de relaxation d'énergie : G

$$\boxed{\boxed{D^B = G\dot{A}}}$$

- Intégrale indépendante du contour dans la zone élastique

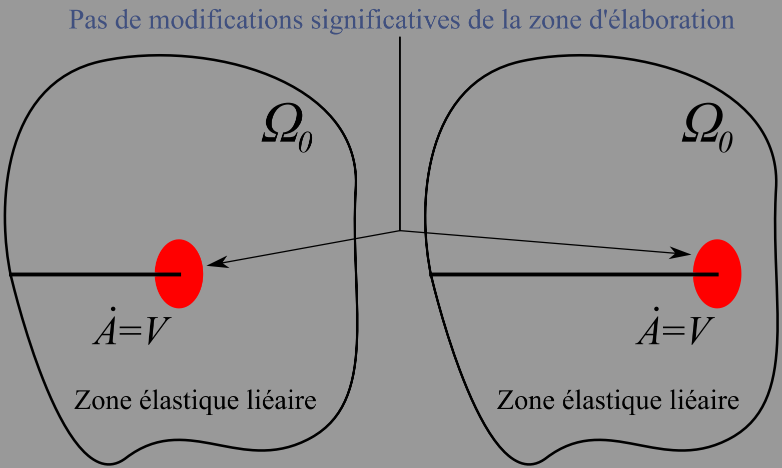
$$\mathcal{J} = \int_{\partial B} \left[n_1 \rho \Psi - \underline{n}.\underline{\underline{\sigma}}.\frac{\partial \underline{u}}{\partial X_1} \right] \mathrm{d}S = G$$

- Attention $G \neq g$
- G : concept d'ingénieur, g : concept de physicien

Hypothèses de la mécanique linéaire de la rupture

Hypothèse 2/3

$$\boxed{\text{Un régime permanent s'établit rapidement}}$$



Hypothèse 2/3

Conséquence importante

- La puissance dissipée est constante
- L'énergie dissipée par unité de surface de fissure est constante
- Le taux de relaxation d'énergie est constant pendant la progression de la fissure

$\exists G_C$ caractérisitique de la dissipation surfacique dans la structure
$G = G_C$ pendant la progression de la fissure

Hypothèses de la mécanique linéaire de la rupture

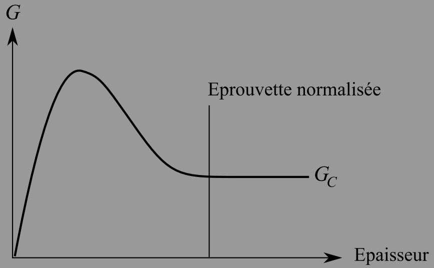
Hypothèse 3/3

$$\boxed{\text{La zone d'élaboration est indépendante de la structure}}$$

- G_C : une constante caractéristique du matériau
- G_C : résistance à la fissuration du matériau
- G_C : taux de ralaxation d'énergie du matériau

Hypothèse 3/3

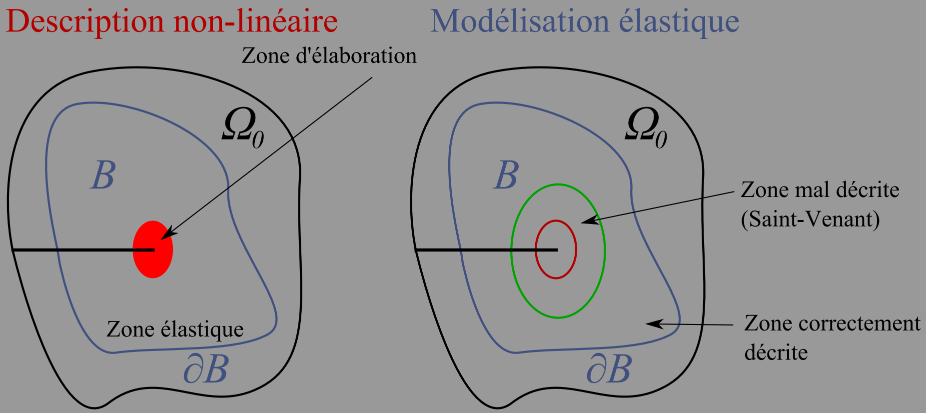
- Validité de l'hypothèse 3 ?
- Eprouvettes normalisées pour la sécurité



- Microstructures variées selon la structure
- Mise en forme
- Cas des matériaux aléatoires (céramiques)

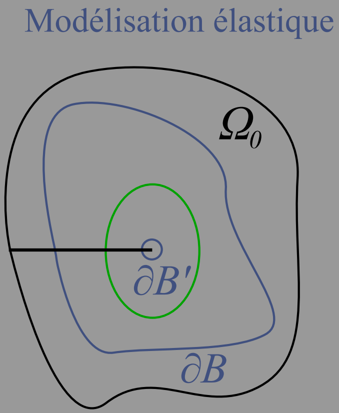
Hypothèses de la mécanique linéaire de la rupture

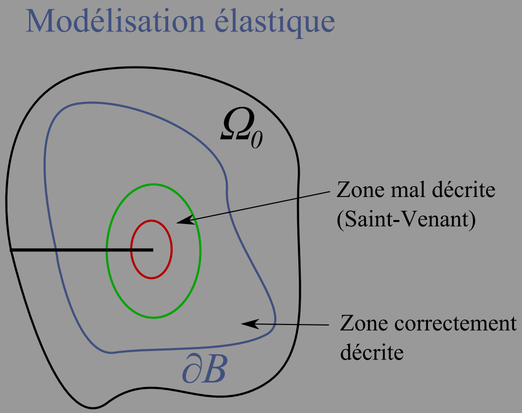
Modélisation en mécanique linéaire de la rupture



- Sur ∂B avec un modèle purement élastique linéaire G est correctement calculé

Modélisation en mécanique linéaire de la rupture





- G est indépendante du contour dans un domaine élastique
- Sur $\partial B'$ avec un modèle purement élastique linéaire G est correctement calculé

Modélisation en mécanique linéaire de la rupture

On peut calculer G à partir des champs du modèle linéaire dans le voisinage de l'extrémitié de la fissure, bien que ces champs soient très différents, à cet endroit, des champs réels

- Sous réserve que les 3 hypothèses de la Mécaniques Linéaire de la Rupture soient vérifiées

Plan de le séance

Facteurs d'intensité de contrainte

- Développement asymptotique
- Facteurs d'intensité de contrainte

Développement asymptotique

- Equations d'équilibre en élasticité plane : div $\left[\underline{\sigma}\right] = 0$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0$$

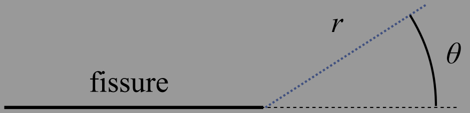
- Potentiel d'Airy

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \qquad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \qquad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

- Les équations de compatibilité de Beltrami-Mitchell donnent

$$\Delta \Delta A = 0$$

Développement asymptotique



- Voisinage de la tête de fissure
- On cherche A sous la forme

$$A(r,\theta) = r^{\alpha} f(\theta)$$

- Laplacien

$$\Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = r^{\alpha-2}\left(\alpha^2 f(\theta) + f''(\theta)\right)$$

- Bi-Laplacien

$$\boxed{\Delta\Delta A = r^{\alpha-4}\left(\alpha^2(\alpha-2)^2 f(\theta) + \left((\alpha-2)^2+\alpha^2\right) f''(\theta) + f^{(4)}(\theta)\right)}$$

Développement asymptotique

- Equation différentielle en θ

$$\left(\alpha^2(\alpha-2)^2 f(\theta) + \left((\alpha-2)^2+\alpha^2\right) f''(\theta) + f^{(4)}(\theta)\right) = 0$$

- Polynôme caractérisitque

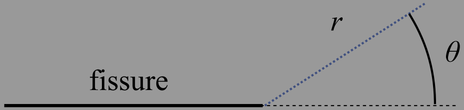
$$\begin{aligned} P(X) &= X^4 + \left((\alpha-2)^2+\alpha^2\right) X^2 + \alpha^2(\alpha-2)^2 \\ &= (X-i\alpha)(X+i\alpha)(X-i(\alpha-2))(X+i(\alpha-2)) \end{aligned}$$

- Solution

$$\boxed{\begin{aligned} f(\theta) &= A_1\cos(\alpha\theta) + A_2\cos((\alpha-2)\theta) \\ &+A_3\sin(\alpha\theta) + A_4\sin((\alpha-2)\theta) \end{aligned}}$$

- On a 4 constantes à déterminer
- On a 4 conditions aux limites

Développement asymptotique



- Conditions aux limites

$$\sigma_{xy}(\pi) = \sigma_{xy}(-\pi) = \sigma_{yy}(\pi) = \sigma_{yy}(-\pi) = 0$$

- Or

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \qquad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

- Conditions sur $f(\theta)$

$$f(\pi) = f(-\pi) = f'(\pi) = f'(-\pi) = 0$$

Développement asymptotique

- Conditions

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\alpha\pi) & \cos((\alpha-2)\pi) & \sin(\alpha\pi) & \sin((\alpha-2)\pi) \\ \cos(\alpha\pi) & \cos((\alpha-2)\pi) & -\sin(\alpha\pi) & -\sin((\alpha-2)\pi) \\ -\alpha\sin(\alpha\pi) & -(\alpha-2)\sin((\alpha-2)\pi) & \alpha\cos(\alpha\pi) & (\alpha-2)\cos((\alpha-2)\pi) \\ \alpha\sin(\alpha\pi) & (\alpha-2)\sin((\alpha-2)\pi) & \alpha\cos(\alpha\pi) & (\alpha-2)\cos((\alpha-2)\pi) \end{pmatrix}}_{M(\alpha)} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Si la matrice $M(\alpha)$ est inversible $f(\theta) = 0$
- La matrice $M(\alpha)$ n'est pas inversible pour certaines valeurs de α

$$\text{Det}\left[M(\alpha)\right] = 0$$

- Infinité de solutions : demi-entiers

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \alpha_k = \frac{k}{2}$$

Développement asymptotique

- A est en r^α
- $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ sont en $r^{\alpha-2}$
- $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$ est en $1/r^{-2(\alpha-2)}$
- Energie au voisinage de la tête de fissure

$$\frac{1}{2}\int_0^r \int_{-\pi}^{\pi} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}\, r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta$$

- Intégrabilité de l'énergie élastique en $r \to 0$

$$-2\alpha + 3 < 1 \Rightarrow \alpha > 1$$

- Solution la plus singulière avec énergie intégrable

$$\boxed{\alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\sigma}} \simeq \frac{1}{\sqrt{r}}}$$

- Termes moins singuliers en $\alpha_k = k/2$ avec $k \geq 4$ négligeables

$$\left(\sqrt{r}\right)^{(k-4)} << \frac{1}{\sqrt{r}}$$

Facteurs d'intensité de contrainte

- Développement asymptotique
- Facteurs d'intensité de contrainte

Facteurs d'intensité de contrainte

- Solution la plus singulière en plan : Westergaard

$$\boxed{\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\
\sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\
\sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)
\end{aligned}}$$

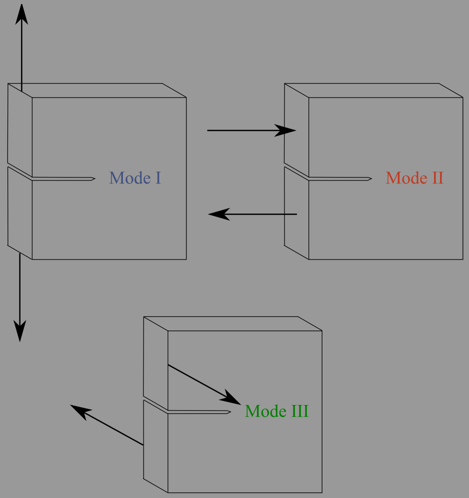
- Solution la plus singulière en anti-plan

$$\sigma_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad \sigma_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

- Notion de facteurs d'intensité de contrainte : K_I, K_{II} et K_{III}

Facteurs d'intensité de contrainte

- Notion de mode



Facteurs d'intensité de contrainte

- Définition des facteurs d'intensité de contrainte

$$K_I = \lim_{r \to 0} \left[\sigma_{yy}(r,\theta)\sqrt{2\pi r} \right]$$

$$K_{II} = \lim_{r \to 0} \left[\sigma_{xy}(r,\theta)\sqrt{2\pi r} \right]$$

$$K_{III} = \lim_{r \to 0} \left[\sigma_{yz}(r,\theta)\sqrt{2\pi r} \right]$$

Plan de le séance

Rupture sous chargement monotone (ténacité)

- Loi d'Irwin et ténacité
- Catalogue de facteurs d'intensité de contrainte

Loi d'Irwin et ténacité

- Taux de relaxation d'énergie (indépendant du contour)

$$G = \int_{\partial B} \left(\rho \Psi n_1 - \underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}.\frac{\partial \underline{u}}{\partial X_1} \right) \mathrm{d}S$$

- Loi d'Irwin (1948)

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} \left(K_I^2 + K_{II}^2 + K_{III}^2 \right)$$

- Critère énergétique de propagation

$$G = G_C$$

- Les facteurs d'intensité de contraintes n'ont pas de sens physique
- Mais sont utiles pour déterminer la propagation d'une fissure

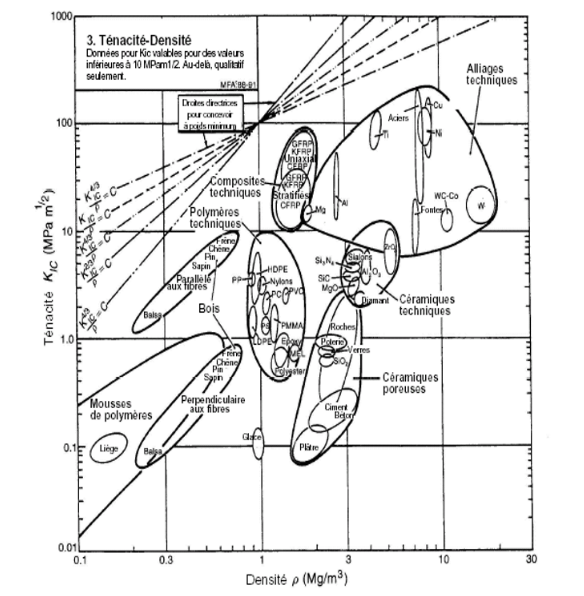
Loi d'Irwin et ténacité

- Ouverture en mode I

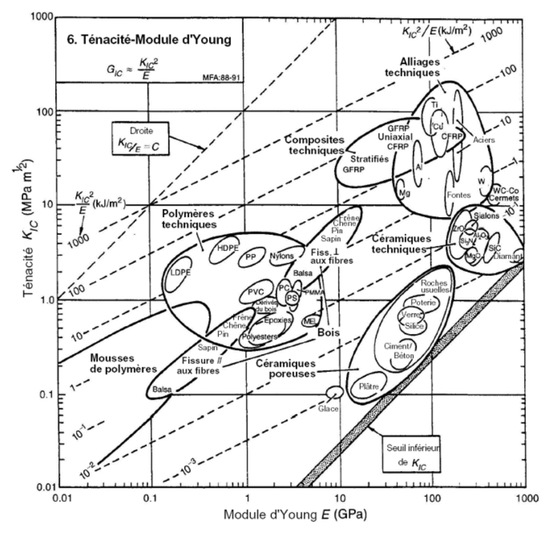
$$\boxed{K_I = K_{IC}}$$

- K_{IC} est la ténacité
- Caractérisitique matrériau de résistance à la fissuration sous chargement monotone

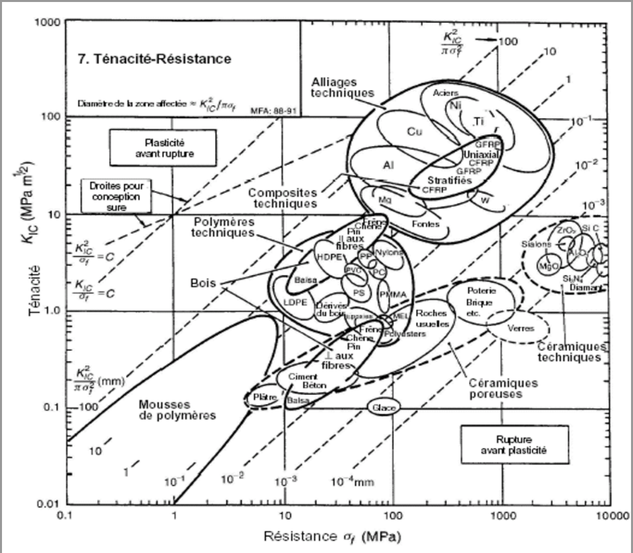
Loi d'Irwin et ténacité



Loi d'Irwin et ténacité



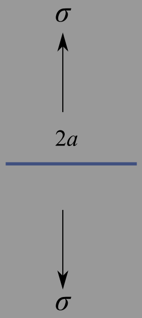
Loi d'Irwin et ténacité



Rupture sous chargement monotone (ténacité)

- Loi d'Irwin et ténacité
- Catalogue de facteurs d'intensité de contrainte

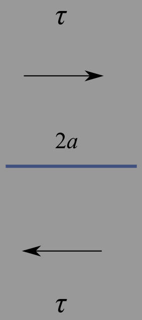
Catalogue de facteurs d'intensité de contrainte



- Démontré au cours 3

$$\boxed{K_I = \sigma\sqrt{\pi a}} \qquad \sigma_C = \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi a}}$$

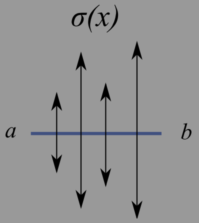
Catalogue de facteurs d'intensité de contrainte



- Démontré au cours 3

$$\boxed{K_{II} = \tau\sqrt{\pi a}}$$

Catalogue de facteurs d'intensité de contrainte



- Démontré au cours 3

$$\boxed{K_I(a) = \sqrt{\frac{2}{\pi(b-a)}}\int_a^b \sigma(x)\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{K_I(b) = \sqrt{\frac{2}{\pi(b-a)}}\int_a^b \sigma(x)\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\mathrm{d}x}$$

Catalogue de facteurs d'intensité de contrainte

$$K_I(a) = \sqrt{\frac{2}{\pi(b-a)}} \int_a^b \sigma(x)\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\mathrm{d}x$$

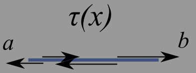
$$K_I(b) = \sqrt{\frac{2}{\pi(b-a)}} \int_a^b \sigma(x)\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\mathrm{d}x$$

- Cas particulier $b = a$ et $a = -a$ et $\sigma(x) = \sigma$

$$K_I(-a) = \sqrt{\frac{1}{\pi a}}\sigma \underbrace{\int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a-x}{x+a}}\mathrm{d}x}_{\pi a} = \sigma\sqrt{\pi a}$$

$$K_I(a) = \sqrt{\frac{1}{\pi a}}\sigma \underbrace{\int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{x+a}{a-x}}\mathrm{d}x}_{\pi a} = \sigma\sqrt{\pi a}$$

Catalogue de facteurs d'intensité de contrainte

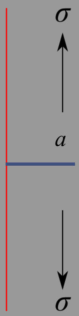


- Démontré au cours 3

$$\boxed{K_{II}(a) = \sqrt{\frac{2}{\pi(b-a)}} \int_a^b \tau(x) \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} \mathrm{d}x}$$

$$\boxed{K_{II}(b) = \sqrt{\frac{2}{\pi(b-a)}} \int_a^b \tau(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} \mathrm{d}x}$$

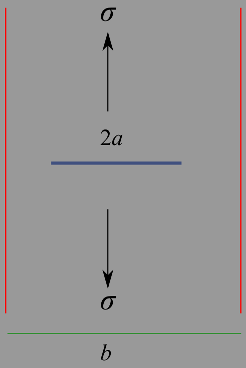
Catalogue de facteurs d'intensité de contrainte



- Perturbation liée au bord libre
- Solution de Koiter (1965)

$$\boxed{K_I = 1.122\sigma\sqrt{\pi a}}$$

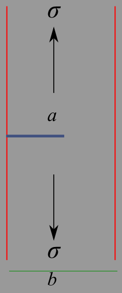
Catalogue de facteurs d'intensité de contrainte



- Perturbation liée aux bords libres
- Solution de Isida (1973)

$$\boxed{K_I = F\left(\frac{a}{b}\right)\sigma\sqrt{\pi a}} \quad F\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\left(1 - 0.025\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 0.06\left(\frac{a}{b}\right)^4\right)}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi a}{2b}\right)}}$$

Catalogue de facteurs d'intensité de contrainte

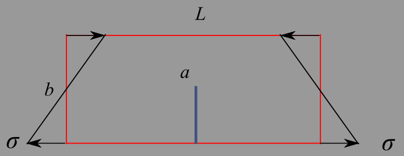


- Perturbation liée aux bords libres
- Solution de Tada (1970)

$$\boxed{K_I = F\left(\frac{a}{b}\right)\sigma\sqrt{\pi a}} \quad F\left(\frac{a}{b}\right) \simeq 1.122\left(1-\frac{a}{b}\right)^{-3/2}$$

$$F\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\sqrt{\frac{2b}{\pi a}\tan\left(\frac{\pi a}{2b}\right)}}{\cos\left(\frac{\pi a}{2b}\right)}\left(0.752 + 2.02\frac{a}{b} + 0.37\left(1-\sin\left(\frac{\pi a}{2b}\right)\right)^3\right)$$

Catalogue de facteurs d'intensité de contrainte



- Poutre fissurée
- Solution de Brown (1966)

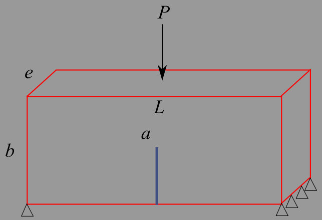
$$\boxed{K_I = F\left(\frac{a}{b}\right)\sigma\sqrt{\pi a}}$$

- Où

$$F\left(\frac{a}{b}\right) = \left(1.122 - 1.4\left(\frac{a}{b}\right) + 7.32\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 13.08\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 14\left(\frac{a}{b}\right)^4\right)$$

- Avec $\frac{L}{b} > 4 \qquad \frac{a}{b} < 0.6$

Catalogue de facteurs d'intensité de contrainte



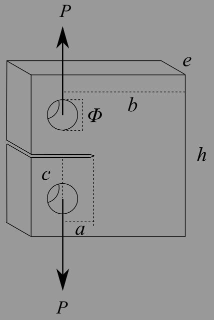
- Poutre fissurée
- Solution de Brown (1966) pour $L/b > 8$

$$\boxed{K_I = \frac{3PL\sqrt{a}}{2b^2e}\left(1.96 - 2.75\left(\frac{a}{b}\right) + 13.66\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 23.98\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 25.22\left(\frac{a}{b}\right)^4\right)}$$

- Solution de Brown (1966) pour $L/b > 4$

$$\boxed{K_I = \frac{3PL\sqrt{a}}{2b^2e}\left(1.93 - 3.07\left(\frac{a}{b}\right) + 14.53\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 25.11\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 25.80\left(\frac{a}{b}\right)^4\right)}$$

Catalogue de facteurs d'intensité de contrainte



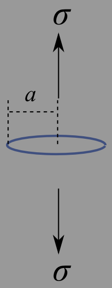
- Eprouvette standardisée
- Solution de Wessel

$$\boxed{K_I = \frac{P\sqrt{a}}{be}\left(29.6 - 185.5\left(\frac{a}{b}\right) + 655.7\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1017\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 638.9\left(\frac{a}{b}\right)^4\right)}$$

- Avec les contraintes

$$h = 1.2b \qquad a \in [0.3b, 0.7b] \qquad c = 0.275b \qquad \Phi = 0.25b \qquad e = 0.5b$$

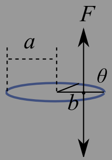
Catalogue de facteurs d'intensité de contrainte



- Fissure Penny-shaped
- Démontré au cours 4
- Solutionde Sih (1973)

$$\boxed{K_I = 2\sigma\sqrt{\frac{a}{\pi}}}$$

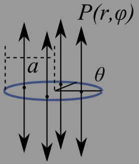
Catalogue de facteurs d'intensité de contrainte



- Fissure Penny-shaped
- Démontré au cours 4
- Solutionde Bueckner (1970)

$$\boxed{K_I(\theta) = \frac{F\sqrt{a^2 - b^2}}{\pi\sqrt{\pi a}\left(a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta)\right)}}$$

Catalogue de facteurs d'intensité de contrainte



- Fissure Penny-shaped
- Démontré au cours 4
- Solution de Bueckner (1970)

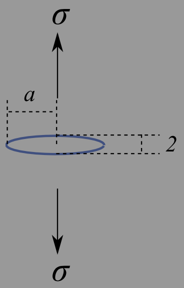
$$\boxed{K_I(\theta) = \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{p(r,\varphi)\sqrt{a^2-r^2}}{\pi\sqrt{\pi a}\,(a^2+r^2-2ar\cos(\theta-\varphi))} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi}$$

Catalogue de facteurs d'intensité de contrainte

- Cas particulier $p(r, \varphi) = \sigma$

$$\begin{aligned} K_I(\theta) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\sigma\sqrt{a^2 - r^2}}{\pi\sqrt{\pi a}\left(a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \varphi)\right)} r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^a \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi a}\left(a^2 - r^2\right)} r \mathrm{d}r \\ &= 2\sigma\sqrt{\frac{a}{\pi}} \end{aligned}$$

Catalogue de facteurs d'intensité de contrainte



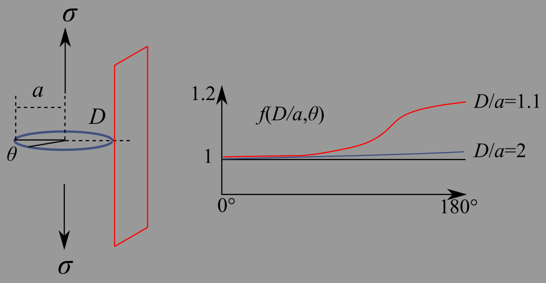
- Fissure elliptique
- Solution de Kassir (1960)

$$\boxed{K_I(\theta) = \sqrt{\pi}\frac{\sigma}{E(h)}\sqrt{\frac{b}{a}}\left(a^2\sin^2(\theta) + b^2\cos^2(\theta)\right)^{1/4}}$$

- Où

$$h = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \qquad E(h) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{1 - h^2\sin^2(u)}\right) \mathrm{d}u$$

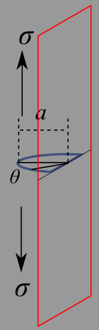
Catalogue de facteurs d'intensité de contrainte



- Fissure Penny-shaped près d'un bord libre
- Solution de Smith (1971)

$$\boxed{K_I = 2\sigma\sqrt{\frac{a}{\pi}}f\left(\frac{D}{a},\theta\right)}$$

Catalogue de facteurs d'intensité de contrainte



- Demi-fissure Penny-shaped près d'un bord libre
- Solution de Hartranft (1973)

$$\boxed{K_I(\theta) = 2\sigma\sqrt{\frac{a}{\pi}} f\left(\theta\right)} \qquad f(\theta) = 1.211 - 0.186\sqrt{\sin(\theta)}$$

- Où pour $\theta \in [10, 170]$ (en degrés)

Plan de le séance

Rupture sous chargement cyclique (loi de Paris)

- Principe de la rupture en fatigue
- Loi de Paris

Principe de la rupture en fatigue

- Chargement cyclique
- Trous ou fissures pré-existants
- A chaque cycle
  - Plasticité augmente la taille des trous
  - Longueur des fissures augmente
  - Pas de propagation de fissure
- Les fissures atteignent une taille critique
- Propagation de fissure ($G = G_C$)

Rupture sous chargement cyclique (loi de Paris)

- Principe de la rupture en fatigue
- Loi de Paris

Loi de Paris

- N nombre de cycles
- $\mathrm{d}N$: incrément de cycle

$$N = \int \mathrm{d}N$$

- $\mathrm{d}a$: incrément de longueur de fissure à chaque cycle
- $\Delta K_I(a)$: amplitude du facteur d'intensité de contrainte dans un cycle
- Loi de Paris

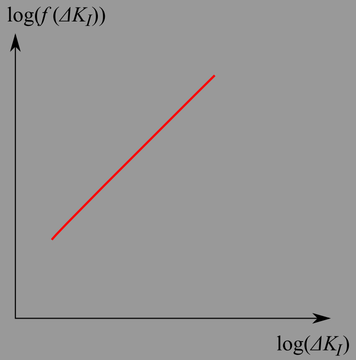
$$\boxed{\mathrm{d}a = f(\Delta K_I(a))\mathrm{d}N}$$

Loi de Paris

- Loi puissance

$$f(\Delta K_I(a)) = \alpha\,(\Delta K_I(a))^{\beta}$$

- β varie de 2 à 10 suivant les matériaux
- β est à peu près égal à 4 pour les aciers



Loi de Paris

Utilisation de la loi de Paris

- a_0 : taille initiale de fissure
- a_C : taille critique de fissure telle que $K_I^{max} = K_{IC}$
- N_V : durée de vie (nombre de cycles rupture)

$$\boxed{N_V = \int_{a_0}^{a_C} \frac{\mathrm{d}a}{f(\Delta K_I(a))}}$$