

Exercices d'entraînement

Daniel Weisz-Patrault

28 janvier 2017

1 Exercices

1.1 Rupture rapide et en fatigue

Exercice 1. Bidon sphérique ★

On considère un bidon sphérique de diamètre $D = 1$ m, qui doit être rempli avec un gaz à la pression $p = 20$ MPa. On dispose pour le fabriquer d'un acier de limite à la rupture $\sigma_c = 200$ MPa et de ténacité $K_I^c = 100$ MPa.m^{1/2}. Le procédé de soudure laisse des défauts de type fissure dans la tôle d'acier. Les fissures sont recherchées avec un moyen qui permet de détecter les fissures supérieures à 100 μ m. Ces fissures sont réparées avant mise en service.

1. Quelle épaisseur de tôle choisiriez-vous pour que le bidon n'explose pas au premier remplissage ? Expliquez soigneusement pourquoi.
2. On souhaite pouvoir vider et remplir le bidon en toute sécurité un millier de fois. La propagation de fissure en fatigue est régie par la loi de Paris avec un exposant $\alpha = 4$ et un pré-facteur $\beta = 10^{-8}$ MPa⁻⁴.m⁻¹.Cycle⁻¹. La loi de Paris est donnée par :

$$\frac{da}{dN} = \beta \Delta K^\alpha$$

Quelle épaisseur faut-il donner au bidon pour éviter l'explosion avant le 1000^{ième} cycle de chargement ?

1.2 Stabilité des structures fissurées

Exercice 2. Stabilité d'une fissure dans une plaque soumise à une force ★

Une structure bidimensionnelle (plaque de profondeur B) fissurée est soumise à un chargement qui dépend d'un paramètre scalaire F (en N). Le déplacement associé est noté U (en m). La fissure a pour longueur caractéristique a . La relation entre F et U est linéaire. Ainsi il existe un scalaire $C(a)$ tel que $U = C(a)F$.

1. On suppose que la force est imposée. Exprimez l'énergie potentielle E_P^F dans la structure à l'aide de $C(a)$ et F . (N'oubliez pas que l'énergie potentielle est la différence entre l'énergie élastique et le potentiel des efforts extérieurs.)
2. On suppose maintenant que le déplacement U est imposé. Exprimez l'énergie potentielle E_P^U dans la structure à l'aide de $C(a)$ et U . (Si le déplacement est imposé, le potentiel des effort extérieurs est nul).

3. Quelle est la relation simple entre E_P^F et E_P^U ?
4. On rappelle que le taux surfacique de relaxation d'énergie est $G = -\frac{1}{B} \frac{dE_P}{da}$. Exprimez G en fonction de F et $\frac{dC}{da}(a)$ dans le cas d'un chargement à force imposé.
5. Exprimez G en fonction de U , $C(a)$ et $\frac{dC}{da}(a)$ dans le cas d'un chargement à déplacement imposé.
6. Vérifiez que ces deux valeurs de G sont égales et expliquez pourquoi.
7. On rappelle que la fissure est stable si $\frac{dG}{da} < 0$. Expliquez pourquoi et commentez la stabilité de la fissure dans chacun des cas de chargement en fonction de $\frac{d^2C}{da^2}$.

Exercice 3. Stabilité d'une fissure dans une plaque soumise à deux forces ★

Une structure bidimensionnelle (plaque de profondeur B) fissurée est soumise à un chargement qui dépend de deux paramètres scalaires F_1 et F_2 (en N). Les déplacements associés respectivement à chacune des forces sont notés U_1 et U_2 (en m). La fissure a pour longueur caractéristique a . La relation entre $\underline{F} = (F_1, F_2)$ et $\underline{U} = (U_1, U_2)$ est linéaire. Ainsi il existe un tenseur d'ordre deux $\underline{\underline{C}}(a)$ tel que $\underline{U} = \underline{\underline{C}}(a)\underline{F}$.

1. On suppose que les forces sont imposées. Exprimez l'énergie potentielle E_P^F dans la structure à l'aide de $\underline{\underline{C}}(a)$ et \underline{F} . (N'oubliez pas que l'énergie potentielle est la différence entre l'énergie élastique et le potentiel des efforts extérieurs.)
2. On suppose maintenant que les déplacements sont imposés. Exprimez l'énergie potentielle E_P^U dans la structure à l'aide de $\underline{\underline{C}}(a)$ et \underline{U} . (Si le déplacement est imposé, le potentiel des effort extérieurs est nul).
3. Quelle est la relation simple entre E_P^F et E_P^U ?
4. Exprimez G en fonction de \underline{F} et $\frac{d\underline{\underline{C}}}{da}(a)$ dans le cas d'un chargement à force imposé.
5. Exprimez G en fonction de \underline{U} , $\underline{\underline{C}}(a)$ et $\frac{d\underline{\underline{C}}}{da}(a)$ dans le cas d'un chargement à déplacement imposé.
6. Vérifiez que ces deux valeurs de G sont égales et expliquez pourquoi.
7. Commentez la stabilité de la fissure dans chacun des cas de chargement.

1.3 Intégrales de Cauchy

Exercice 4. ★

Soit \mathcal{L} une ligne fermée du plan complexe. Calculer (pour z à l'intérieur strictement et pour z à l'extérieur strictement) l'intégrale :

$$\int_{\mathcal{L}} \frac{1}{t-z} dt$$

1.4 Elasticité plane

Les exercices suivants sont à traiter analytiquement grâce aux équations de Muskhelishvili. Il s'agit de déterminer le champ des contraintes. Il sera nécessaire d'écrire une discontinuité de fonction holomorphe grâce aux conditions aux limites.

Exercice 5. Plaque infinie en tension *

On applique à une plaque infinie les conditions aux limites suivantes $\sigma_{xx} = \sigma$, $\sigma_{yy} = 0$ et $\sigma_{xy} = 0$.

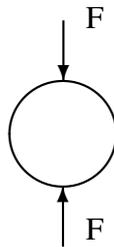
Exercice 6. Plaque infinie percée d'un trou en tension *

On applique à une plaque infinie percée d'un trou de rayon R les conditions aux limites à l'infini suivantes $\sigma_{xx} = \sigma$, $\sigma_{yy} = 0$ et $\sigma_{xy} = 0$ et aucun chargement sur le trou.

Indications : On pourra chercher la solution sous forme d'une série de Laurent (en z^n et $1/z^n$)

Exercice 7. Essai brésilien **

Nous considérons un disque de rayon R , auquel on applique deux forces ponctuelles F comme indiqué sur la figure. Ainsi les conditions aux limites sont $\sigma_{rr} = -\frac{F}{R}(\delta_{\frac{\pi}{2}} + \delta_{-\frac{\pi}{2}})$ et $\sigma_{r\theta} = 0$. Il s'agit de l'essai brésilien, très classique pour caractériser la résistance en traction des bétons alors que l'on comprime a priori l'éprouvette.



Indications : Il sera nécessaire de poser la fonction holomorphe à l'extérieur du cercle définie par :

$$\Phi_2 : z \rightarrow \overline{\Phi\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)}$$

1.5 Problèmes de fissuration

Exercice 8. Double fissures dans une plaque infinie **

On considère une plaque infinie contenant deux fissures définies respectivement par $[-b, -a]$ et $[a, b]$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $0 < a < b$. Le chargement à l'infini est donné par $\sigma_{yy} = \sigma$ et les autres composantes du tenseur nulles. Résoudre ce problème d'élasticité linéaire. Déduire le facteur d'intensité de contrainte.

1.6 Problème de fissuration 3D

Exercice 9. Facteur d'intensité de contrainte d'une fissure plane circulaire de rayon a ★★

1. On se restreint au demi-plan supérieur. Ecrire les conditions aux limites du problème en utilisant les symétries.
2. Quel potentiel de Boussinesq utiliser ? Justifier
3. Ré-écrire les conditions aux limites à l'aide de ce potentiel, en simplifiant.
4. Rappeler la forme intégrale vue en cours des potentiels harmonique en coordonnées polaire
5. Sachant

$$J_1(x) = -J_0'(x)$$

ré-écrire les conditions aux limites grâce à cette forme intégrale. Obtenir un système d'équations intégrales duales . Ce système a pour solution

$$B(s) = \sqrt{\frac{2}{s\pi}} \int_0^a \frac{J_{\frac{3}{2}}(st)}{\sqrt{t}} \left(\int_0^t \frac{r^2 q(r) dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right) dt$$

6. En utilisant le résultat suivant

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2x}{\pi}} \frac{d}{dx} \left[\frac{\sin x}{x} \right] (x)$$

et grâce à une intégration par parties montrer que

$$\int_0^a J_{\frac{3}{2}}(st) \frac{g(t)}{\sqrt{t}} dt = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{g(a) \sin(sa)}{s^{\frac{3}{2}} a} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \frac{\sin(st)}{s^{\frac{3}{2}} t} g'(t) dt$$

7. En calculant $\sigma_{rz}(r, 0)$ et en opérant un changement dans l'ordre d'intégration et en tenant compte du fait que quelque soit x et y

$$\int_0^\infty \sin(xs) J_1(ys) ds = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < y < x \\ \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}} & \text{pour } 0 < x < y \end{cases}$$

prouver que

$$K_{II} = \frac{2}{\sqrt{\pi} a^{\frac{3}{2}}} \int_0^a \frac{r^2 q(r) dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

2 Solutions

2.1 Rupture rapide et en fatigue

Solution 1. Bidon sphérique

1. Le bidon travaille en membrane. Nous notons R le rayon du bidon et e son épaisseur. La contrainte de tension est :

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{pR}{2e}$$

Pour retrouver ce résultat classique nous pouvons utiliser une formule du cours de coques qui assure que la pression p multipliée par la surface d'un disque diamétral de la sphère est égale à la contrainte de tension membranaire multipliée par la surface du bidon coupée par le disque diamétral. Nous avons donc :

$$p\pi R^2 = \sigma_{\theta\theta}\pi((R+e)^2 - R^2)$$

Nous avons le résultat en négligeant le terme en e^2 . Sans connaître ce résultat, nous pouvons couper une demi-sphère et calculer la résultante des efforts appliqués par la pression p par une intégrale et équilibrer le chargement par $\sigma_{\theta\theta}\pi((R+e)^2 - R^2)$. L'intégrale à calculer est

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} pR^2 \underline{e}_\rho \sin \varphi d\theta d\varphi$$

Il suffit d'exprimer $\underline{e}_\rho = \cos \varphi \underline{e}_z + \sin \varphi \cos \theta \underline{e}_x + \sin \varphi \sin \theta \underline{e}_y$ et d'intégrer le terme en \underline{e}_z uniquement car les autres composantes s'annulent évidemment à cause de l'intégrale en selon θ de $\cos \theta$ et $\sin \theta$. Il reste à calculer

$$2\pi pR^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \underline{e}_z = \pi pR^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\varphi) d\varphi \underline{e}_z = \pi pR^2 \underline{e}_z$$

La limite d'élasticité de l'acier utilisée est notée σ_c . Nous cherchons à ne pas plastifier donc :

$$e > \frac{pR}{2\sigma_c}$$

L'application numérique donne $e > 25$ mm.

Par ailleurs nous cherchons à éviter l'explosion du bidon par propagation de fissure rapide. Le facteur d'intensité de contrainte est $K_I = 1,12\sigma_{\theta\theta}\sqrt{\pi a}$ (où a est la longueur caractéristique d'une fissure). Ce facteur est maximale lorsque a est maximal (nous avons $a_{max} = 100 \mu\text{m}$). Le facteur d'intensité de contrainte doit vérifier : $K_I^{max} < K_I^c$. Donc nous avons :

$$e > 1,12 \frac{pR}{2K_I^c} \sqrt{\pi a_{max}}$$

L'application numérique donne $e > 1$ mm.

Ainsi la ruine plastique prédomine dans le dimensionnement.

2. Nous cherchons la longueur critique de fissure, c'est-à-dire la longueur de fissure à partir de laquelle la structure va fissurer rapidement. Pour cette longueur a_c nous avons $K_I = K_I^c$ soit :

$$a_c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I^c}{1,12\sigma_{\theta\theta}} \right)^2 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2K_I^c e}{1,12pR} \right)^2$$

Nous avons $a_c \gg a_0$. Nous cherchons maintenant le nombre de cycle critique N_c (ou durée de vie) qui amène une fissure de longueur initiale a_0 à la longueur de fissuration

rapide a_c (ce qui signifie la ruine de la structure). Nous avons $K_I(a) = 1,12 \frac{pR}{2e} \sqrt{\pi} \sqrt{a}$. Par la loi de Paris nous avons donc :

$$N_c = \int_{a_0}^{a_c} \frac{da}{\beta (K_I(a))^\alpha} = \frac{(2e)^\alpha}{\beta (1,12pR\sqrt{\pi})^\alpha} \frac{2}{\alpha - 2} \left(a_0^{\frac{2-\alpha}{2}} - a_c^{\frac{2-\alpha}{2}} \right)$$

Le terme $a_c^{\frac{2-\alpha}{2}}$ est négligeable car $2 - \alpha < 0$. Ainsi l'épaisseur nécessaire pour résister à 1000 cycles est :

$$e > \frac{1,12pR\sqrt{\pi}}{2} \left(\beta \frac{\alpha - 2}{2} a_0^{\frac{\alpha-2}{2}} N_c \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

L'application numérique donne $e > 56$ mm. La fatigue est dimensionnante.

2.2 Stabilité des structures fissurées

Solution 2. Stabilité d'une fissure dans une plaque soumise à une force

1. Si la force F est imposée :

$$E_P^F = \frac{C(a)F^2}{2} - C(a)F^2 = -\frac{C(a)F^2}{2}$$

2. Si le déplacement U est imposé le potentiel des efforts extérieurs est nul et nous avons :

$$E_P^U = \frac{U^2}{2C(a)}$$

3. Nous avons en utilisant $U = C(a)F$:

$$E_P^F = -E_P^U$$

4. Nous avons $G = -\frac{1}{B} \frac{dE_P}{da}$. Donc à force imposée nous avons :

$$G_F = \frac{F^2}{2B} \frac{dC}{da}(a)$$

5. A déplacement imposé nous avons

$$G_U = \frac{1}{2B} \frac{U^2}{C(a)^2} \frac{dC}{da}(a)$$

6. Grâce à $U^2 = C(a)^2 F^2$ nous avons évidemment $G_F = G_U$. Cela est dû au fait que U et F sont des variables duales du problème mécanique.

7. La fissure est stable si $\frac{dG}{da} < 0$. En effet, dans ce cas $G(a)$ est une fonction décroissante lorsque a croît. Ainsi puisque la fissure est initialement au repos $G(a) < G^c$ (G^c est le G critique qui permet l'extension de la fissure). $G(a)$ étant décroissante on ne peut jamais avoir $G(a) > G^c$ qui permettrait l'extension de la fissure, celle-ci est donc stable.

Pour un chargement piloté en force :

$$\frac{dG_F}{da} = \frac{F^2}{2B} \frac{d^2C}{da^2}(a)$$

Et la fissure est instable si $\frac{d^2C}{da^2}(a) > 0$ et stable si $\frac{d^2C}{da^2}(a) < 0$. Par ailleurs nous avons pour un chargement piloté en déplacement :

$$\frac{dG_U}{da} = -\frac{1}{B} \frac{U^2}{C(a)^3} \left(\frac{dC}{da}(a) \right)^2 + \frac{1}{2B} \frac{U^2}{C(a)^2} \frac{d^2C}{da^2}(a)$$

Nous avons :

$$\frac{dG_U}{da} < 0 \Leftrightarrow C(a) \frac{\frac{d^2C}{da^2}(a)}{\left(\frac{dC}{da}(a) \right)^2} < 2$$

Dans ce cas la fissure est stable, dans le cas contraire la fissure est instable.

Il peut être intéressant de remarquer que si la fissure est instable en déplacement alors elle est instable en force. De plus si la fissure est stable en force alors elle est stable en déplacement.

Solution 3. Stabilité d'une fissure dans une plaque soumise à deux forces

1. Si la force F_1 et F_2 sont imposées :

$$E_P^F = \frac{(\underline{C}(a) \cdot \underline{F}) \cdot \underline{F}}{2} - (\underline{C}(a) \cdot \underline{F}) \cdot \underline{F} = -\frac{(\underline{C}(a) \cdot \underline{F}) \cdot \underline{F}}{2} = -\frac{1}{2} \underline{C}(a) : (\underline{F} \otimes \underline{F})$$

2. Si le déplacement U est imposé le potentiel des efforts extérieurs est nul et nous avons :

$$E_P^U = \frac{(\underline{C}^{-1}(a) \cdot \underline{U}) \cdot \underline{U}}{2} = \frac{1}{2} \underline{C}^{-1}(a) : (\underline{U} \otimes \underline{U})$$

3. Nous avons en utilisant $\underline{U} = \underline{C}(a) \cdot \underline{F}$:

$$E_P^F = -E_P^U$$

4. Nous avons $G = -\frac{1}{B} \frac{dE_P}{da}$. Donc à force imposée nous avons :

$$G_F = \frac{(\underline{F} \otimes \underline{F})}{2B} : \frac{d\underline{C}}{da}(a)$$

5. A déplacement imposé nous avons

$$G_U = -\frac{(\underline{U} \otimes \underline{U})}{2B} : \frac{d\underline{C}^{-1}}{da}(a) = \frac{(\underline{U} \otimes \underline{U})}{2B} : \left(\underline{C}^{-1}(a) \cdot \frac{d\underline{C}}{da}(a) \cdot \underline{C}^{-1}(a) \right)$$

6. Grâce à $\underline{U} \otimes \underline{U} = (\underline{C}(a) \cdot \underline{F}) \otimes (\underline{C}(a) \cdot \underline{F})$, nous avons si $\underline{C}(a)$ est symétrique $G_F = G_U$. Cela est dû au fait que \underline{U} et \underline{F} sont des variables duales du problème mécanique.

7. La fissure est stable si $\frac{dG}{da} < 0$. En effet, dans ce cas $G(a)$ est une fonction décroissante lorsque a croît. Ainsi puisque la fissure est initialement au repos $G(a) < G^c$ (G^c est le G critique qui permet l'extension de la fissure). $G(a)$ étant décroissante on ne peut jamais avoir $G(a) > G^c$ qui permettrait l'extension de la fissure, celle-ci est donc stable.

Pour un chargement piloté en force :

$$\frac{dG_F}{da} = \frac{(F \otimes F)}{2B} : \frac{d^2 C}{da^2}(a)$$

Et la fissure est instable si $\frac{dG_F}{da}(a) > 0$ et stable si $\frac{dG_F}{da}(a) < 0$. Par ailleurs nous avons pour un chargement piloté en déplacement :

$$\frac{dG_U}{da} = \frac{(U \otimes U)}{B} : \left[\underline{C}^{-1}(a) \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 \underline{C}}{da^2}(a) - \left(\frac{d \underline{C}}{da}(a) \right)^2 \right) \cdot \underline{C}^{-1}(a) \right]$$

Et la fissure est instable si $\frac{dG_U}{da}(a) > 0$ et stable si $\frac{dG_U}{da}(a) < 0$.

2.3 Intégrales de Cauchy

Solution 4. Soit $z \in \mathbb{C}/\mathcal{L}$. En considérant que \mathcal{L} est un arc paramétrique de classe \mathcal{C}^1 , il existe $(s_A, s_B) \in \mathbb{R}^2$ et $s \rightarrow x(s)$ et $s \rightarrow y(s)$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 définies sur $[s_A, s_B]$ tels que $\mathcal{L} = \{x(s) + iy(s)/s \in [s_A, s_B]\}$. Nous pouvons écrire formellement :

$$\int_{\mathcal{L}} \frac{1}{t-z} dt = \ln(x(s_B) + iy(s_B) - z) - \ln(x(s_A) + iy(s_A) - z)$$

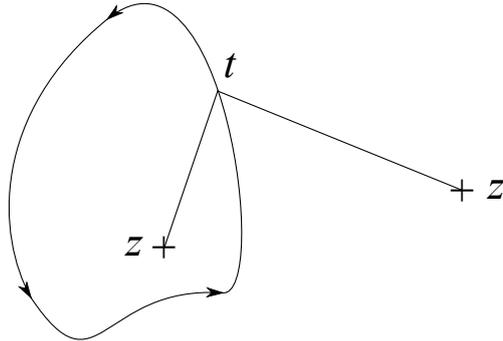


FIGURE 1 – Intégration sur un lacet

Supposons que z est à l'intérieur (au sens strict) de la zone définie par la ligne fermée \mathcal{L} . Dans ce cas le complexe $t - z$ tourne d'un angle 2π au cours de l'intégration, il a donc changement de feuillet dans le logarithme, et nous avons donc la discontinuité de $2i\pi$ qui apparaît ainsi :

$$\int_{\mathcal{L}} \frac{1}{t-z} dt = 2i\pi$$

Supposons que z est à l'extérieur (au sens strict) de la zone définie par la ligne fermée \mathcal{L} . Dans ce cas le complexe $t - z$ tourne d'un angle strictement inférieur 2π au cours de l'intégration, il n'y a donc pas de changement de feuillet dans le logarithme, et nous avons donc :

$$\int_{\mathcal{L}} \frac{1}{t-z} dt = 0$$

2.4 Elasticité plane

Solution 5. Plaque infinie en tension

Le cas d'une plaque infinie est particulièrement simple dans la mesure où l'équation de Kolosov-Muskhelishvili est alors valable sur tout le plan complexe. Ainsi les fonctions $\Phi(z)$ et $\Psi(z)$ sont des fonctions entières, elle admettent donc un développement en série entière qui se trouve être borné à l'infini du fait des conditions aux limites et donc constant d'après le théorème de Liouville, d'où :

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n z^n$$

$$\Psi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n z^n$$

Pour $|z| \rightarrow +\infty$ les équations donnent :

$$\begin{cases} \sigma = 4\text{Re}(\phi_0) \\ -\sigma = 2\psi_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \phi_n = \psi_n = 0 \end{cases}$$

Nous avons immédiatement (notons que pour le potentiel $\Phi(z)$ il ne s'agit que d'une condition suffisante car nous n'avons pas pris de partie imaginaire ce qui ne change rien car celle-ci n'intervient pas dans les équations) :

$$\begin{cases} \Phi(z) = \frac{\sigma}{4} \\ \Psi(z) = -\frac{\sigma}{2} \end{cases}$$

Nous retrouvons ce qui était évident, à savoir que partout dans la plaque $\sigma_{xx} = \sigma$, $\sigma_{yy} = 0$ et $\sigma_{xy} = 0$.

Solution 6. Plaque infinie percée d'un trou en tension

Ce problème est plus délicat dans la mesure où d'une part les fonctions holomorphes des équations de Kolosov-Muskhelishvili ne sont pas entières, donc pas a priori développables en série entière, et d'autre part nous devons traiter deux conditions aux limites (celle du trou et celle à l'infini). Au niveau du trou nous avons $\sigma_{rr} = 0$ et $\sigma_{r\theta} = 0$. Nous éliminons $\sigma_{\theta\theta}$ des équations en soustrayant les deux équations en contrainte de Kolosov-Muskhelishvili et nous obtenons :

$$\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} = \Phi(z) - e^{2i\theta} (\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)) + \overline{\Phi(z)}$$

Nous savons qu'à l'infini les fonctions holomorphe admettent un développement asymptotique en z^n et $1/z^n$, nous essayons compte tenu de la configuration simple du problème un tel développement sur tout le domaine. Ainsi :

$$\Phi(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_n z^n \quad \left| \quad \Psi(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi_n z^n$$

L'équation se réécrit au niveau du trou donc pour $z = Re^{i\theta}$:

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_n R^n e^{in\theta} - Re^{i\theta} n\phi_n R^{n-1} e^{i(n-1)\theta} - e^{2i\theta} \psi_n R^n e^{in\theta} + \overline{\phi_n} R^n e^{-in\theta}$$

Soit

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_n(1-n)R^n e^{in\theta} - \psi_n R^n e^{i(n+2)\theta} + \overline{\phi_n} R^n e^{-in\theta}$$

Donc en regroupant les exponentielles et en identifiant les termes on a :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, R^n \phi_n(1-n) + R^{-n} \overline{\phi_{-n}} - R^{n-2} \psi_{n-2} = 0$$

Nous avons donc une relation de récurrence. Il reste à écrire les contraintes à l'infini. Les termes en puissance négatives sont nuls à l'infini, il ne reste donc que les termes en puissance positive. Ainsi ces termes forment une série entière bornée à l'infinie donc constante d'après le théorème de Liouville. Ainsi on a pour $|z| \rightarrow +\infty$:

$$\begin{cases} \sigma = 4Re(\phi_0) \\ -\sigma = 2\psi_0 \\ \forall n \geq 1, \phi_n = \psi_n = 0 \end{cases}$$

En appliquant la relation de récurrence précédente on trouve

$$\begin{cases} \forall n \geq 3, \phi_{-n} = 0 \\ \forall n \geq 5, \psi_{-n} = 0 \\ \psi_0 = \frac{-\sigma}{2} \\ \psi_{-2} = \frac{R^2 \sigma}{2} \\ \psi_{-4} = \frac{-3R^4 \sigma}{2} \\ \phi_0 = \frac{\sigma}{4} \\ \phi_{-2} = \frac{-R^2 \sigma}{2} \\ \psi_{-1} = \phi_{-1} \\ \psi_{-3} = 2R^2 \phi_{-1} \end{cases}$$

Nous avons donc :

$$\begin{cases} \Phi(z) = \frac{\sigma}{4} + \phi_{-1} \frac{R^2}{z} - \frac{\sigma R^2}{2z^2} \\ \Psi(z) = -\frac{\sigma}{2} + \phi_{-1} \frac{R^2}{z} + 2\phi_{-1} \frac{R^4}{z^3} + \frac{\sigma R^2}{2z^2} - \frac{3\sigma R^4}{2z^4} \end{cases}$$

Nous savons par ailleurs que $\phi_{-1} = 0$ car le trou est libre de contrainte donc il n'y a pas de logarithme impliqué dans $\phi(z)$ (potentiel déplacement tel que $\phi'(z) = \Phi(z)$). Donc :

$$\begin{cases} \Phi(z) = \frac{\sigma}{4} - \frac{\sigma R^2}{2z^2} \\ \Psi(z) = -\frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma R^2}{2z^2} - \frac{3\sigma R^4}{2z^4} \end{cases}$$

Solution 7. Essai brésilien

Cet exercice ne fait intervenir qu'une seule discontinuité. De même que dans l'exercice précédent nous soustrayons les deux équations du système de Kolosov-Muskhelishvili (écrit en polaire) pour éliminer $\sigma_{\theta\theta}$ sur laquelle nous n'avons pas d'informations. Nous obtenons donc :

$$\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} = \Phi(z) - e^{2i\theta} (\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)) + \overline{\Phi(z)}$$

Se qui se réécrit pour $z = Re^{i\theta}$:

$$\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} = \Phi(z) - z\Phi'(z) - \frac{z^2}{R^2}\Psi(z) + \overline{\Phi(z)}$$

Les potentiels $\Phi(z)$ et $\Psi(z)$ sont définis sur l'intérieur du cercle que nous noterons \mathcal{D} , le cercle lui-même étant $\mathcal{L} = \partial\mathcal{D}$. La fonction $\overline{\Phi(z)}$ n'est pas holomorphe. Nous introduisons la fonction $\Phi_2(z)$ holomorphe à l'extérieur du disque (\mathbb{C}/\mathcal{D} :

$$\Phi_2 : z \rightarrow \overline{\Phi\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)}$$

Comme précédemment nous orientons le cercle dans le sens direct. Donc pour un point du cercle z^+ est à l'intérieur et $z^- = \frac{R^2}{z^+}$ est à l'extérieur d'où :

$$\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} = \Phi(z^+) - z\Phi'(z^+) - \frac{z^2}{R^2}\Psi(z^+) + \Phi_2(z^-)$$

Posons la fonction holomorphe définie sur \mathbb{C}/\mathcal{L} :

$$\Omega : z \rightarrow \begin{cases} \Phi(z) - z\Phi'(z) - \frac{z^2}{R^2}\Psi(z) & \text{à l'intérieur} \\ -\Phi_2(z) & \text{à l'extérieur} \end{cases}$$

Nous pouvons donc écrire le problème de Cauchy suivant :

$$\Omega(z^+) - \Omega(z^-) = \sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta}$$

Le comportement de $\Omega(z)$ lorsque $|z| \rightarrow +\infty$ est $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \Omega(z) = -\overline{\Phi(0)} = \overline{a_0}$. Nous avons donc un problème de Cauchy bien posé et :

$$\Omega(z) = -\overline{a_0} + \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta}}{t - z} dt$$

Calcul de $\Omega(z)$

$$\Omega(z) = -\overline{a_0} - \frac{F}{2i\pi R} \int_{\mathcal{L}} \frac{(\delta_{\frac{\pi}{2}} + \delta_{-\frac{\pi}{2}})}{t - z} dt$$

Opérons le changement de variable \mathcal{C}^1 -difféomorphisme sur $[0, 2\pi[$, $t = Re^{i\theta}$ d'où $dt = iRe^{i\theta}d\theta$. (Remarquons que nous avons bien orienté le cercle dans le sens trigonométrique, c'est important ici, sinon nous trouverions l'opposé du résultat)

$$\Omega(z) = -\overline{a_0} - \frac{F}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\delta_{\frac{\pi}{2}} + \delta_{-\frac{\pi}{2}})}{Re^{i\theta} - z} e^{i\theta} d\theta$$

Nous avons après intégration :

$$\begin{aligned}\Omega(z) &= -\bar{a}_0 - \frac{F}{2\pi R} \left(\frac{i}{Ri - z} + \frac{i}{Ri + z} \right) \\ \Omega(z) &= -\bar{a}_0 - \frac{F}{\pi R} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2}\end{aligned}\quad (1)$$

Calcul de $\Phi(z)$

Pour $z \in \mathcal{D}$ on a $\Phi(z) = \overline{\Phi_2\left(\frac{R^2}{z}\right)} = -\overline{\Omega\left(\frac{R^2}{z}\right)}$ donc $\Phi(z) = a_0 + \frac{F}{\pi R} \times \frac{1}{1 + \frac{R^2}{z^2}}$. Donc nous avons :

$$\Phi(z) = a_0 + \frac{F}{\pi R} \times \frac{\left(\frac{z}{R}\right)^2}{1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2}\quad (2)$$

Calcul de $\Phi'(z)$

D'après (2) on a immédiatement :

$$\Phi'(z) = \frac{2F}{\pi R^2} \times \frac{\frac{z}{R}}{\left(1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^2}\quad (3)$$

Calcul de $\Psi(z)$

D'après la définition de $\Omega(z)$ nous avons :

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= \frac{\Phi(z) - \Omega(z)}{\left(\frac{z}{R}\right)^2} - \frac{R\Phi'(z)}{\frac{z}{R}} \\ \Psi(z) &= \frac{F}{\pi R} \left(\frac{1}{\left(\frac{z}{R}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2\right)} + \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2} - \frac{2}{\left(1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^2} \right) + 2 \frac{Re(a_0)}{\left(\frac{z}{R}\right)^2}\end{aligned}$$

Et finalement :

$$\Psi(z) = \frac{F}{\pi R} \times \frac{1 + \left(\frac{z}{R}\right)^4}{\left(\frac{z}{R}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^2} + 2 \frac{Re(a_0)}{\left(\frac{z}{R}\right)^2}\quad (4)$$

Changement d'écriture

Nous posons pour des raisons de lisibilité $r = \left|\frac{z}{R}\right|$ et nous noterons abusivement $z = \frac{z}{R}$ (donc $r \in [0, 1]$).

Calcul de $\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}$

Nous avons d'après les équations de Kolosov-Muskhelishvili écrites en polaire :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= 2(\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}) \\ \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= \frac{2F}{\pi R} \left(\frac{z^2}{1 + z^2} + \frac{\bar{z}^2}{1 + \bar{z}^2} \right) + 4Re(a_0) \\ \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= \frac{2F}{\pi R} \times \frac{z^2(1 + \bar{z}^2) + \bar{z}^2(1 + z^2)}{1 + 2r^2 \cos 2\theta + r^4} + 4Re(a_0) \\ \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= \frac{4F}{\pi R} \times \frac{r^2 \cos 2\theta + r^4}{1 + 2r^2 \cos 2\theta + r^4} + 4Re(a_0)\end{aligned}\quad (5)$$

Calcul de $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} + 2i\sigma_{r\theta}$

Nous avons également :

$$-\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + 2i\sigma_{r\theta} = 2e^{2i\theta}(\Psi(z) + \bar{z}\Phi'(z))$$

$$-\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + 2i\sigma_{r\theta} = 2e^{2i\theta} \times \frac{F}{\pi R} \left(\frac{1+z^4}{z^2(1+z^2)^2} + \frac{2z\bar{z}}{(1+z^2)^2} \right) + 4 \frac{Re(a_0)}{r^2}$$

$$-\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + 2i\sigma_{r\theta} = e^{2i\theta} \times \frac{2F}{\pi R} \times \frac{1+z^4+2z^3\bar{z}}{z^2(1+z^2)^2} + 4 \frac{Re(a_0)}{r^2}$$

On multiplie par la quantité conjuguée dans le terme complexe et on a :

$$-\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + 2i\sigma_{r\theta} = \frac{2F}{\pi R} \times \frac{(1+z^4+2z^3\bar{z})(1+2\bar{z}^2+\bar{z}^4)}{r^2(1+2r^2\cos 2\theta+r^4)^2} + 4 \frac{Re(a_0)}{r^2}$$

$$-\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + 2i\sigma_{r\theta} = \frac{2F}{\pi R} \times \frac{1+4r^6+r^8+2(r^4+r^6)e^{2i\theta}+2(r^2+r^8)e^{-2i\theta}+2r^4\cos 4\theta}{r^2(1+2r^2\cos 2\theta+r^4)^2} + 4 \frac{Re(a_0)}{r^2}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} -\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = \frac{2F}{\pi R} \times \frac{1+4r^6+r^8+2(r^2+r^4+r^6+r^8)\cos 2\theta+2r^4\cos 4\theta}{r^2(1+2r^2\cos 2\theta+r^4)^2} + 4 \frac{Re(a_0)}{r^2} \\ \sigma_{r\theta} = \frac{2F}{\pi R} \times \frac{(-1+r^2+r^4-r^6)\sin 2\theta}{(1+2r^2\cos 2\theta+r^4)^2} \end{cases} \quad (6)$$

Calcul de $Re(a_0)$

On détermine la constante $Re(a_0) \in \mathbb{R}$, en imposant que les champs de contrainte ne soient pas singuliers pour $r = 0$. D'après (6) nous avons

$$(-\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})(r, \theta) = \frac{2F}{\pi R} \times \frac{1+4r^6+r^8+2(r^2+r^4+r^6+r^8)\cos 2\theta+2r^4\cos 4\theta}{r^2(1+2r^2\cos 2\theta+r^4)^2} + 4 \frac{Re(a_0)}{r^2}$$

On fait un développement limité de $(-\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})(r, \theta)$ à l'ordre quatre, pour $r \rightarrow 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. Nous avons donc :

$$(-\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})(r, \theta) = \frac{2F}{\pi R} \times \frac{1+2(r^2+r^4)\cos 2\theta+2r^4\cos 4\theta+o(r^4)}{r^2+4r^4\cos 2\theta+o(r^4)} + 4 \frac{Re(a_0)}{r^2}$$

$$(-\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})(r, \theta) = \frac{2F}{\pi R} \times \frac{\frac{1}{r^2}+2(1+r^2)\cos 2\theta+2r^2\cos 4\theta+o(r^2)}{(1+4r^2\cos 2\theta+o(r^2))} + 4 \frac{Re(a_0)}{r^2}$$

$$(-\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})(r, \theta) = \frac{2F}{\pi R} \times \left(\frac{1}{r^2} + 2(1+r^2)\cos 2\theta + 2r^2\cos 4\theta + o(r^2) \right) (1 - 4r^2\cos 2\theta + o(r^2)) + 4 \frac{Re(a_0)}{r^2}$$

$$(-\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})(r, \theta) = \frac{2F}{\pi R} \times \left(\frac{1}{r^2} - 2\cos 2\theta + o(1) \right) + 4 \frac{Re(a_0)}{r^2}$$

$Re(a_0)$ doit équilibrer le terme en $\frac{1}{r^2}$ et donc

$$Re(a_0) = -\frac{F}{2\pi R} \quad (7)$$

Nous avons montré par ailleurs que

$$(-\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})(r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{-4F \cos 2\theta}{\pi R}$$

Calcul du tenseur des contraintes en polaire

D'après (5), (6) et (7) nous avons :

$$\sigma_{rr} = \frac{F}{\pi R} \times \frac{(-1 + r^2)^2(-1 + 2r^2 + r^4 + 2 \cos 2\theta)}{(1 + 2r^2 \cos 2\theta + r^4)^2}$$

Nous avons également :

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{F}{\pi R} \times \frac{(-1 + r^2)(1 + 5r^2 + r^4 + r^6 + 2(1 + r^2 + 2r^4) \cos 2\theta)}{(1 + 2r^2 \cos 2\theta + r^4)^2}$$

Nous résumons le tenseur des contraintes en coordonnées polaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = \frac{F}{\pi R} \times \frac{(-1 + r^2)^2(-1 + 2r^2 + r^4 + 2 \cos 2\theta)}{(1 + 2r^2 \cos 2\theta + r^4)^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{F}{\pi R} \times \frac{(-1 + r^2)(1 + 5r^2 + r^4 + r^6 + 2(1 + r^2 + 2r^4) \cos 2\theta)}{(1 + 2r^2 \cos 2\theta + r^4)^2} \\ \sigma_{r\theta} = \frac{2F}{\pi R} \times \frac{(-1 + r^2 + r^4 - r^6) \sin 2\theta}{(1 + 2r^2 \cos 2\theta + r^4)^2} \end{array} \right. \quad (8)$$

Nous retrouvons le résultat classique de l'essai brésilien au centre du cercle (pour $r = 0$ et $\theta = 0$ ou $\frac{\pi}{2}$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \sigma_{rr}(r = 0, \theta = 0) = \frac{F}{\pi R} \\ \sigma_{yy} = \sigma_{rr}(r = 0, \theta = \frac{\pi}{2}) = -\frac{3F}{\pi R} \end{array} \right. \quad (9)$$

Donc nous voyons tout l'intérêt de l'essai, en comprimant une éprouvette (de béton par exemple) nous pouvons obtenir une traction au centre dans le sens horizontale, si le matériau a une résistance en traction beaucoup plus faible que celle en compression comme c'est la cas du béton, nous pouvons mesurer cette résistance à la traction en comprimant l'éprouvette, ce qui a l'avantage d'être plus facile à réaliser expérimentalement (pas de problème de d'ancrage).

Calcul du tenseur des contraintes en cartésien

On effectue le changement de base défini par la matrice de passage P

$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix} P^{-1}$$

D'où

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \cos^2 \theta \sigma_{rr} + \sin^2 \theta \sigma_{\theta\theta} - 2 \sin \theta \cos \theta \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{yy} = \sin^2 \theta \sigma_{rr} + \cos^2 \theta \sigma_{\theta\theta} + 2 \sin \theta \cos \theta \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{xy} = \cos \theta \sin \theta (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sigma_{r\theta} \end{cases}$$

Finalement on a après calculs

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{F}{\pi R} \times \frac{(-1+r^2)(-1+r^2+r^4+r^6+2r^2(-1+r^2)\cos 2\theta - 2r^4\cos 4\theta)}{(1+2r^2\cos 2\theta+r^4)^2} \\ \sigma_{yy} = \frac{F}{\pi R} \times \frac{(-1+r^2)(3+r^2+r^4+r^6+2r^2(3+r^2)\cos 2\theta + 2r^4\cos 4\theta)}{(1+2r^2\cos 2\theta+r^4)^2} \\ \sigma_{xy} = \frac{-4F}{\pi R} \times \frac{(-1+r^2)(1+r^2\cos 2\theta)\sin 2\theta}{(1+2r^2\cos 2\theta+r^4)^2} \end{cases}$$

2.5 Problèmes de fissuration

Solution 8. Double fissures dans une plaque infinie

Cet exercice est du même type que celui traité en cours avec fissure simple. Nous décomposons le problème en une partie purement élastique et un problème auxiliaire fissuré avec comme vecteur contrainte imposé au niveau de la double fissure $-\underline{\sigma}_0 \cdot \underline{n}e_y = -\sigma e_y$. Nous avons donc en sommant les équations de Kolosv-Muskhelishvili écrites en cartésien au niveau des fissures et en posant $\Phi_2(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}$:

$$-\sigma = \Phi(z^+) + z\Phi'(z^+) + \Psi(z^+) + \Phi_2(z^-)$$

$$-\sigma = \Phi(z^-) + z\Phi'(z^-) + \Psi(z^-) + \Phi_2(z^+)$$

En posant $\Omega(z) = \Phi(z) + z\Phi'(z) + \Psi(z)$ et en soustrayant ces deux équations nous obtenons un problème de Cauchy

$$0 = (\Omega - \Phi_2)(z^+) - (\Omega - \Phi_2)(z^-)$$

Etudions le comportement à l'infini de $\Omega - \Phi_2$. Puisque nous n'avons pas de chargement à l'infini nous savons que $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \Phi(z) = 0$, $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \Psi(z) = 0$ et $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \Phi_2(z) = 0$ et donc nous avons trivialement $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} (\Omega - \Phi_2)(z) = 0$. Ainsi nous avons

$$\Omega(z) = \Phi_2(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}$$

Nous en déduisons le problème de Hilbert suivant :

$$\Phi(z^+) + \Phi(z^-) = -\sigma$$

Posons la fonction $\chi(z)$ suivante :

$$\chi : \begin{cases} \mathbb{C}/\mathcal{L} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \rightarrow & \frac{1}{\sqrt{z-a}\sqrt{z+a}\sqrt{z-b}\sqrt{z+b}} \end{cases}$$

Nous avons au bord des deux fissures $\chi(z^+) + \chi(z^-) = 0$ et donc nous étudions le comportement à l'infini de $\Phi(z)/\chi(z)$. Nous savons que $\Phi(z)$ et $\chi(z)$ sont holomorphes sur \mathbb{C}/\mathcal{L} donc $\Phi(z)/\chi(z)$ l'est aussi et admet donc un développement asymptotique en z^n et $1/z^n$.

De plus pour x réel nous avons lorsque $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{\chi(x)} = x^2 \sqrt{1 - \frac{a}{x}} \sqrt{1 + \frac{a}{x}} \sqrt{1 - \frac{b}{x}} \sqrt{1 + \frac{b}{x}} = x^2 \left(1 - \frac{a^2 + b^2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)$$

De plus la résultante autour de chaque fissure est nulle donc il n'y a pas de terme logarithmique dans le déplacement, donc pour $x \rightarrow +\infty$:

$$\Phi(x) = \frac{A}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Ainsi pour $x \rightarrow +\infty$:

$$\frac{\Phi(x)}{\chi(x)} = A + o(1)$$

Ainsi nous avons :

$$\Phi(z) = -\sigma \frac{\chi(z)}{2i\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{1}{\chi(t^+)(t-z)} dt + A\chi(z)$$

Pour évaluer la première intégrale on utilise le théorème du cours avec $h(z) = 1$ et $f(z) = z^2 - (a^2 + b^2)/2$ et on obtient

$$\Phi(z) = \frac{\sigma}{2} \left(\frac{z^2 - \frac{a^2+b^2}{2}}{\sqrt{z^2 - a^2}\sqrt{z^2 - b^2}} - 1 \right) + \frac{A}{\sqrt{z^2 - a^2}\sqrt{z^2 - b^2}}$$

Pour évaluer la constante A , il suffit d'écrire les déplacements au niveau de la fissure. En effet nous avons :

$$\Psi(z) = \overline{\Phi(\bar{z})} - \Phi(z) - z\Phi'(z)$$

On rappelle que $\phi'(z) = \Phi(z)$ et $\psi'(z) = \Psi(z)$ on pose $\phi_2(z)$ la primitive de $\Phi_2(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}$ donc (on ne considère pas de terme logarithmique car la résultante du vecteur contrainte est nulle sur chaque fissure) :

$$\psi(z) = \phi_2(z) - z\phi'(z)$$

Par ailleurs on rappelle que :

$$2\mu(u_x + iu_y) = \kappa\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}$$

Donc on a pour notre problème :

$$2\mu(u_x + iu_y) = \kappa\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\phi_2(z)} + \overline{z\phi'(z)}$$

On obtient donc :

$$2\mu(u_x + iu_y) = \kappa\phi(z) - \overline{\phi_2(z)} - 2iy\overline{\phi'(z)}$$

En prenant $y = 0$ (axe où les fissure se trouvent) on obtient :

$$4\mu iu_y = \kappa(\phi(z) - \overline{\phi(z)}) + \phi_2(z) - \overline{\phi_2(z)}$$

On a donc comme condition (sachant que u_y est nul en $y = 0$ pour $-a < x < a$, $x > b$ et $x < -b$):

$$y = 0, -a < x < a, x > b, x < -b, \text{Im}(\kappa\phi(x) + \phi_2(x)) = 0$$

On réécrit $\Phi(z)$ sous la forme classique :

$$\Phi(z) = \Phi_2(z) = \frac{\sigma}{2} \left(\frac{z^2 - \lambda^2}{\sqrt{z^2 - a^2}\sqrt{z^2 - b^2}} - 1 \right)$$

Et donc la condition à vérifier pour déterminer la constante λ devient :

$$y = 0, -a < x < a, x > b, x < -b, \text{Im}(\phi(x)) = 0$$

En étudiant la fonction $\chi(z)$ pour $y = 0$ on a pour $y = 0$:

$$\begin{cases} x > b & \chi(x) \in \mathbb{R}^+ \\ a < x < b & \chi(x) \in -i\mathbb{R}^+ \\ -a < x < a & \chi(x) \in -\mathbb{R}^+ \\ -b < x < -a & \chi(x) \in i\mathbb{R}^+ \\ x < -b & \chi(x) \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (10)$$

En prenant $\lambda \in \mathbb{R}$ la condition est vérifiée automatiquement, sauf pour $a < x < b$ lorsque $x \rightarrow a$ et $x \rightarrow b$ ainsi que pour $-b < x < -a$ lorsque $x \rightarrow -a$ et $x \rightarrow -b$. Il reste donc à intégrer $\Phi(x)$ ($y=0$ pour $a < x < b$) et de déterminer la partie imaginaire en $x = a$ et $x = b$ par symétrie les conditions en $-a$ et $-b$ seront automatiquement vérifiées. On a :

$$\phi(x) = -i\frac{\sigma}{2} \int_a^x \frac{(x^2 - \lambda^2)dx}{\sqrt{x^2 - a^2}\sqrt{b^2 - x^2}} - \frac{\sigma}{2}x + C$$

On pose les intégrales réelles définies sur $x \in [a, b]$:

$$I(x) = \int_a^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}\sqrt{b^2 - x^2}}$$

et

$$J(x) = \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}\sqrt{b^2 - x^2}}$$

On obtient :

$$\lambda^2 = \frac{I(x)}{J(x)}$$

Solution 9. 1. Les équations aux limites du problèmes sont en utilisant l'anti-symétrie du problème et l'indépendance selon θ :

$$\begin{cases} u_r = 0 & z = 0 \text{ et } r > a \\ \sigma_{zz} = 0 & z = 0 \text{ et } r \geq 0 \\ \sigma_{r\theta} = 0 & z = 0 \text{ et } r \geq 0 \\ \sigma_{rz} = q(r) & z = 0 \text{ et } 0 < r < a \\ \underline{\underline{\sigma}} = 0 & \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow +\infty \end{cases}$$

2. Il convient d'utiliser une solution G car celle-ci vérifie automatique l'a condition $\sigma_{zz} = 0$ en $z = 0$
3. En se référant au tableau vu en cours on a

$$\begin{cases} \frac{\partial \chi}{\partial r} = 0 & z = 0 \text{ et } r > a \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z} = q(r) & z = 0 \text{ et } 0 \leq r < a \end{cases}$$

4. Il a été vu en cours q'une forme harmonique intéressante pour les problèmes de fissuration est

$$\chi(r, z) = \int_0^\infty B(s) J_0(rs) \exp(-sz) ds = q(r)$$

5. Sachant

$$J_1(x) = -J_0'(x)$$

on obtient pour conditions aux limites

$$\begin{cases} \int_0^\infty s^2 B(s) J_1(rs) ds = q(r) & 0 \leq r < a \\ \int_0^\infty s B(s) J_1(rs) ds = 0 & r > a \end{cases}$$

qui admet pour solution

$$B(s) = \sqrt{\frac{2}{s\pi}} \int_0^a \frac{J_{\frac{3}{2}}(st)}{\sqrt{t}} \left(\int_0^t \frac{r^2 q(r) dr}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right) dt$$

6. En utilisant le résultat suivant

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2x}{\pi}} \frac{d}{dx} \left[\frac{\sin x}{x} \right] (x)$$

il suffit d'intégrer le terme $\frac{d}{dx} \left[\frac{\sin x}{x} \right] (st) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\sin(st)}{s^2 t} \right]$ et de dériver $g(t)$ (sachant que $\sin x/x$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0) pour obtenir le résultat souhaité

$$\int_0^a J_{\frac{3}{2}}(st) \frac{g(t)}{\sqrt{t}} dt = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{g(a) \sin(sa)}{s^{\frac{3}{2}} a} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \frac{\sin(st)}{s^{\frac{3}{2}} t} g'(t) dt$$

7. On a en posant

$$g(t) = \int_0^t \frac{r^2 q(r) dr}{\sqrt{t^2 - r^2}}$$

$$\sigma_{rz}(r, 0) = \int_0^\infty s^2 B(s) J_1(rs) ds = \int_0^\infty s^2 \frac{2}{\sqrt{s\pi}} \left(-\frac{g(a) \sin(sa)}{s^{\frac{3}{2}} a} + \int_0^a \frac{\sin(st)}{s^{\frac{3}{2}} t} g'(t) dt \right) J_1(rs) ds$$

$$\sigma_{rz}(r, 0) = \int_0^\infty \frac{2}{\pi} \left(-\frac{g(a) \sin(sa)}{a} + \int_0^a \frac{\sin(st)}{t} g'(t) dt \right) J_1(rs) ds$$

On a que quelque soit x et y

$$\int_0^\infty \sin(xs) J_1(ys) ds = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < y < x \\ \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}} & \text{pour } 0 < x < y \end{cases}$$

donc

$$\sigma_{rz}(r, 0) = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{g(a)}{r\sqrt{r^2 - a^2}} + \int_0^a \frac{g'(t)}{r\sqrt{r^2 - t^2}} dt \right)$$

on a $K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi(r - a)} \sigma_{r,z}(r, 0)$ (avec $r > a$) donc puisque $1/\sqrt{a - t}$ est intégrable sur le segment $[0, a]$ le terme intégrale de droite tend vers 0 tandis que le terme de gauche donne

$$K_{II} = \frac{2}{\sqrt{\pi} a^{\frac{3}{2}}} \int_0^a \frac{r^2 q(r) dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$