

---

ENPC – BETON ARME

# CALCUL DU FERRAILLAGE D'UNE PLAQUE à l'ELU

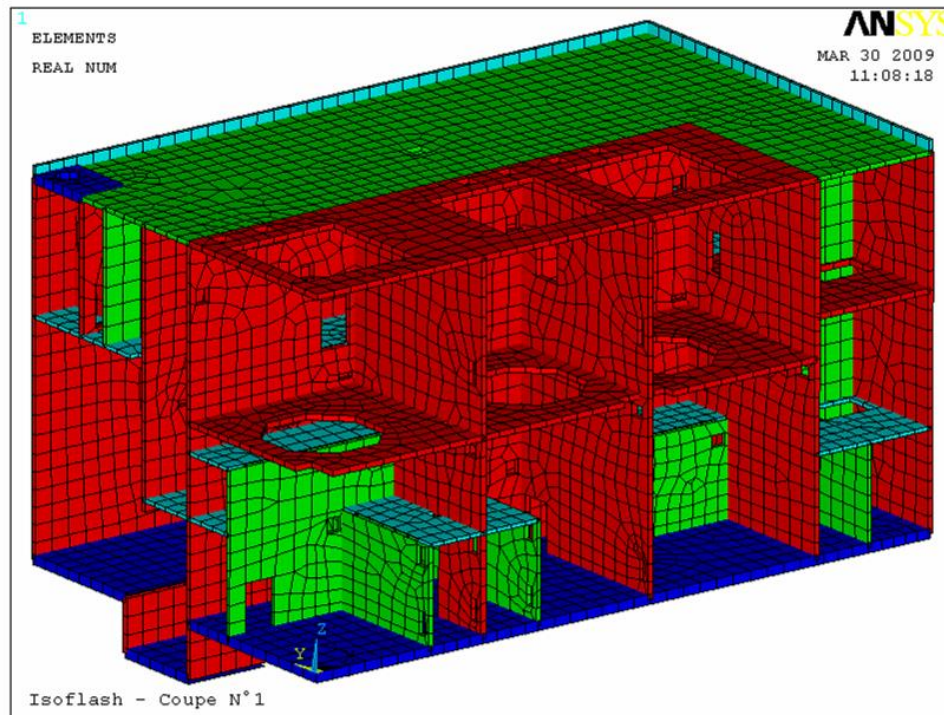
*M. Bué - Le 14/05/2020*

1. Présentation
2. Plaque soumise uniquement à des efforts de membrane : méthode de Wood
3. Plaque soumise à des efforts quelconques : méthode de Capra-Maury
4. Exemples de calcul
5. Exercice d'application

# 1. PRESENTATION

## > Contexte général

Les structures sont de plus en plus fréquemment justifiées par des calculs aux éléments finis -> modélisation des voiles et planchers en éléments de coques. D'où la nécessité de pouvoir calculer ensuite les armatures à mettre en place dans les coques.



*Exemple - Bâtiment « Isoflash » de l'usine Comurhex Malvés*

# 1. PRESENTATION

- On considère une plaque d'épaisseur  $h$
- On se place au voisinage d'un nœud (élément infiniment petit)
- On suppose la plaque soumise aux 6 efforts ELU suivants :

- **$F_{xx}$ ,  $F_{yy}$  et  $F_{xy}$**  en kN/ml  
Efforts de membrane

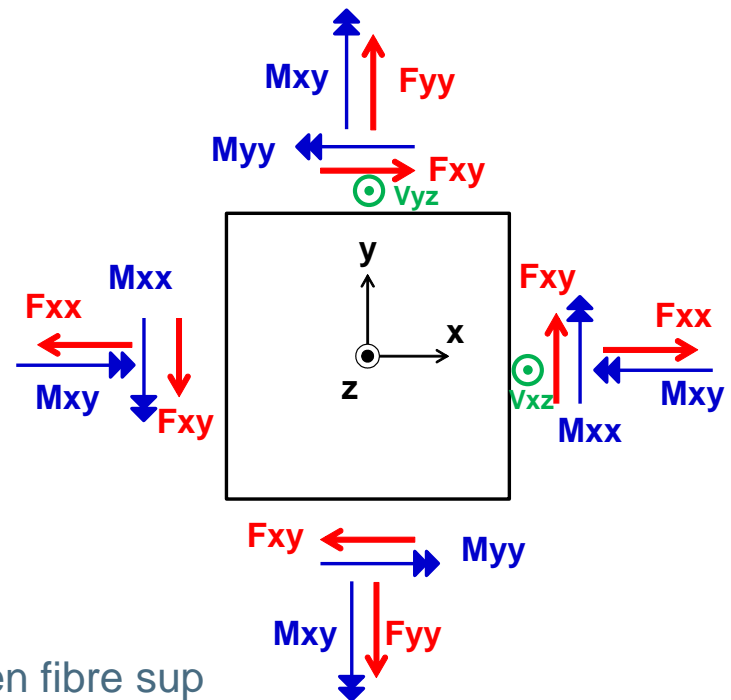
## Convention de signes :

- $F_{xx}$  et  $F_{yy} > 0$  en en traction
- $F_{xy} > 0$  si tourné de  $+90^\circ$  par rapport  $F_{xx}$

- **$M_{xx}$ ,  $M_{yy}$  et  $M_{xy}$**  en kN.m/ml  
Moments de flexion et de torsion

## Convention de signes :

- $M_{xx} > 0$  s'il tend la fibre sup ( $z > 0$ )
- $M_{yy} > 0$  s'il tend la fibre sup
- $M_{xy} > 0$  s'il crée un cisaillement  $\sigma_{xy} > 0$  en fibre sup

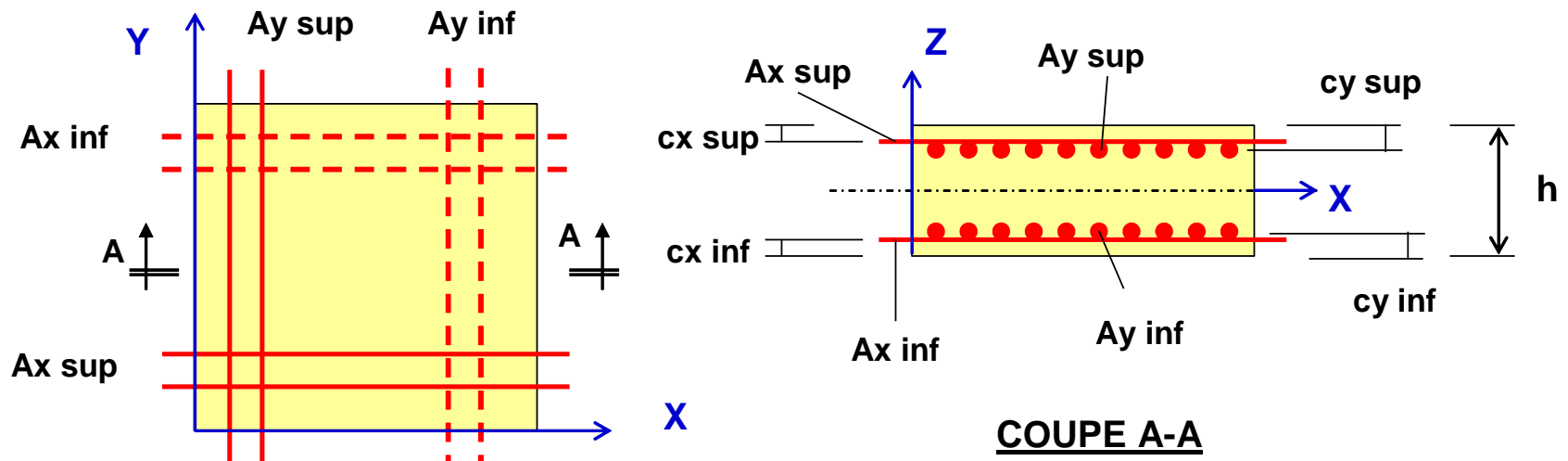


Nota : il existe également 2 efforts tranchants  $V_{xz}$  et  $V_{yz}$ , dont nous ne parlerons pas dans le présent exposé.

> **Objectif :**

Détermination du ferrailage, c'est-à-dire des 4 sections d'armatures :

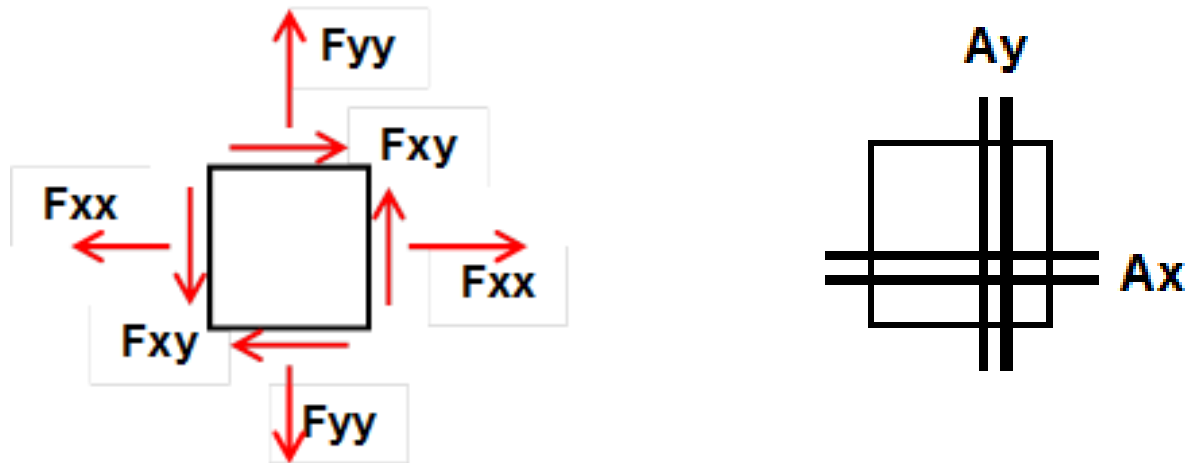
- $A_{x\_inf}$        $A_{x\_sup}$
- $A_{y\_inf}$        $A_{y\_sup}$       (en  $\text{cm}^2/\text{ml}$ )



## 2. PLAQUE SOUMISE UNIQUEMENT A DES EFFORTS DE MEMBRANE : METHODE DE WOOD

### > Présentation

- Plaque d'épaisseur  $h$  soumise uniquement à des efforts de membrane



- Objectif : déterminer le ferrailage nécessaire pour résister à ces efforts ELU (en  $\text{cm}^2/\text{ml}$ )

## 2. Méthode de Wood

---

### > Enoncé de la méthode de Wood :

(i) Il faut placer des aciers équilibrant les efforts suivants (>0 en traction) :

- dans le sens X :  $R_x = F_{xx} + |F_{xy}|$

- dans le sens Y :  $R_y = F_{yy} + |F_{xy}|$

On aura donc :

$$A_x = R_x / f_{yd}$$

$$A_y = R_y / f_{yd}$$

$$\text{avec } f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s$$

(ii) Si l'une de ces quantités est négative, les formules deviennent :

1<sup>er</sup> cas -  $R_x < 0$  :  $R_x = 0$

$$R_y = F_{yy} + F_{xy}^2 / |F_{xx}|$$

2<sup>ème</sup> cas -  $R_y < 0$  :  $R_y = 0$

$$R_x = F_{xx} + F_{xy}^2 / |F_{yy}|$$

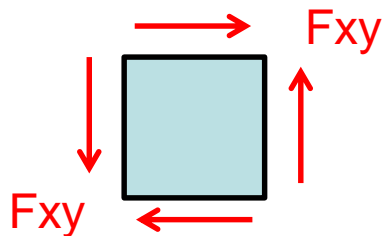
(iii) Si les 2 quantités  $R_x$  et  $R_y$  sont  $< 0$ , on adopte :  $R_x = 0$  et  $R_y = 0$

Nota : la méthode de Wood s'applique également au cas d'une plaque soumise uniquement à des moments  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$ ,  $M_{xy}$

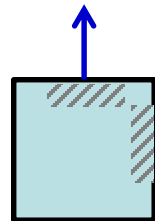
## 2. Méthode de Wood

### > Justification dans le cas particulier du cisaillement simple

#### EFFORTS APPLIQUES

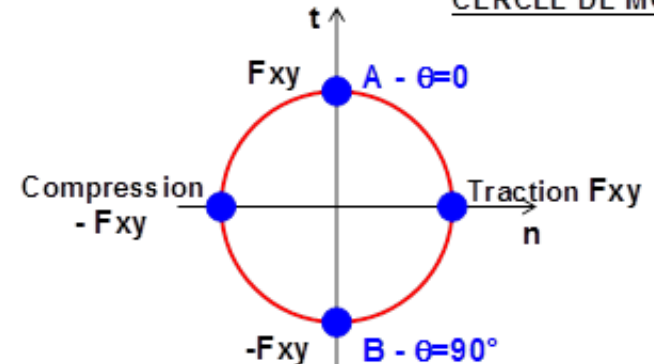


Facette B -  $\theta=90^\circ$

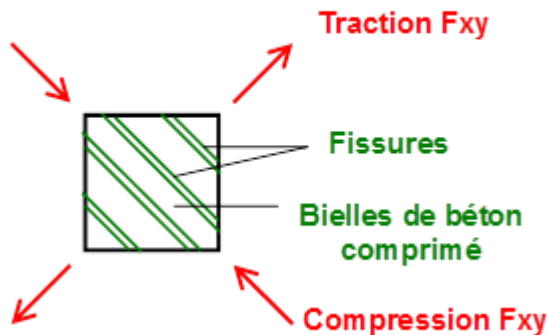


Facette A -  $\theta=0^\circ$

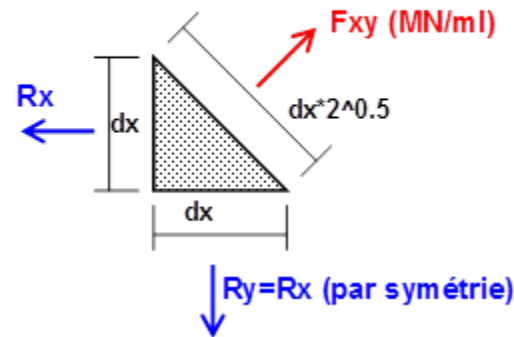
#### CERCLE DE MOHR



#### EFFORTS PRINCIPAUX



#### EFFORTS REPRIS PAR LES ARMATURES : $R_x$ et $R_y$

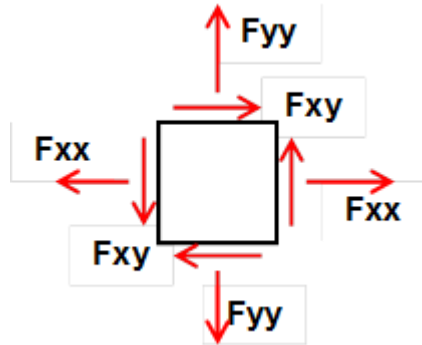


Equilibre horizontal :  $-R_x \cdot dx + (F_{xy} \cdot dx \cdot \sqrt{2}) \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow R_x = F_{xy} = R_y$   
*(il s'agit ici d'efforts linéiques, en MN/ml)*



## 2. Méthode de Wood

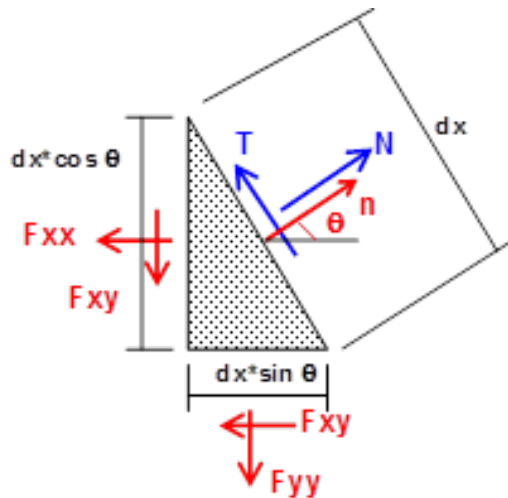
### > Justification dans le cas général - Avec 3 efforts $F_{xx}$ , $F_{yy}$ et $F_{xy}$



Par analogie avec ce qui précède, on calcule l'effort "N( $\theta$ )" s'exerçant perpendiculairement à une facette d'angle  $\theta$  quelconque.

On peut faire ce calcul de 2 façons :

#### a) 1<sup>ère</sup> méthode : équilibre d'un coin



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{xx} \cdot dx \cdot \cos\theta - F_{xy} \cdot dx \cdot \sin\theta + N \cdot \cos\theta \cdot dx - T \cdot \sin\theta \cdot dx = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_{xy} \cdot dx \cdot \cos\theta - F_{yy} \cdot dx \cdot \sin\theta + N \cdot \sin\theta \cdot dx + T \cdot \cos\theta \cdot dx = 0$$

Il s'agit d'un système de 2 équations à 2 inconnues N et T.

On pose  $C = \cos \theta$

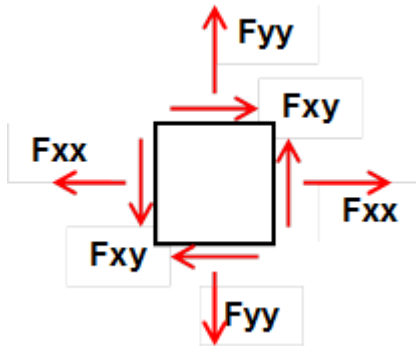
$S = \sin \theta$

On obtient tous calculs faits :

$$N = C^2 \cdot F_{xx} + S^2 \cdot F_{yy} + 2CS \cdot F_{xy}$$

## 2. Méthode de Wood

### b) 2<sup>ème</sup> méthode : calcul matriciel

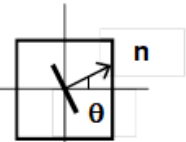


Dans le repère global (0,X,Y) on pose :

$$[F] = \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{bmatrix}$$

- 1<sup>ère</sup> colonne = efforts s'exerçant sur la facette  $\theta=0$
- 2<sup>ème</sup> colonne = efforts s'exerçant sur la facette  $\theta=90^\circ$

- On effectue un changement de base par rotation d'un angle  $\theta$  :



$$[F(\theta)] = {}^t[P] \cdot [F] \cdot [P] \quad \text{avec} \quad [P] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix} \quad (= \text{matrice de passage})$$

$$[F(\theta)] = \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 \cdot F_{xx} + S^2 \cdot F_{yy} + 2CS \cdot F_{xy} & \dots \\ CS \cdot (F_{yy} - F_{xx}) + (C^2 - S^2) \cdot F_{xy} & \dots \end{pmatrix}$$

- Le 1er terme de cette matrice correspond à l'effort  $F(\theta)$  s'exerçant perpendiculairement à la facette de normale  $\theta$  ; on retrouve bien la même valeur que précédemment.

## 2. Méthode de Wood

---

### > Effort résistant selon cette même facette d'angle

- On fait l'hypothèse que les aciers ne peuvent exercer qu'un effort parallèle à leur direction :

$$[R] = \begin{bmatrix} R_x & 0 \\ 0 & R_y \end{bmatrix}$$

- Changement de repère (rotation d'angle  $q$ ) :  $R(\theta) = C^2 \cdot R_x + S^2 \cdot R_y$

### > Mise en équation

- La résistance de la section sera assurée si  $\forall \theta : R(\theta) \geq F(\theta)$

soit  $C^2 \cdot R_x + S^2 \cdot R_y \geq C^2 \cdot F_{xx} + S^2 \cdot F_{yy} + 2CS \cdot F_{xy} \quad \forall \theta$

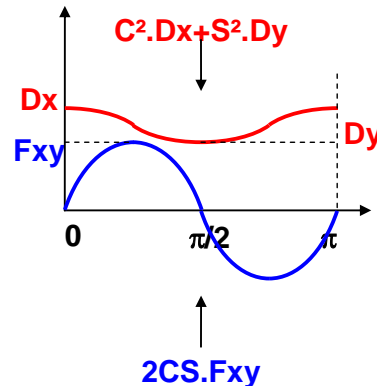
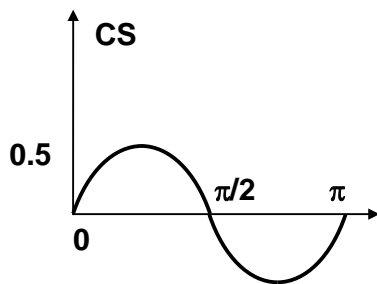
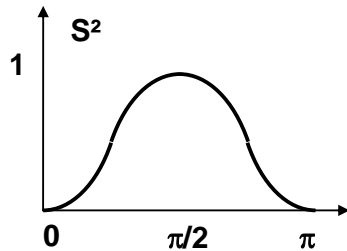
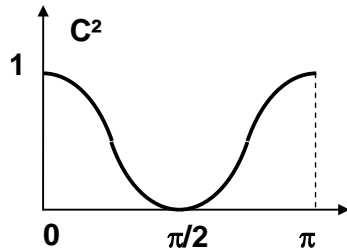
- On pose  $D_x = R_x - F_{xx}$  (= supplément d'armatures à placer en X par rapport à  $F_{xx}$ )  
 $D_y = R_y - F_{yy}$  (= supplément d'armatures à placer en Y par rapport à  $F_{yy}$ )

$$\Rightarrow C^2 \cdot D_x + S^2 \cdot D_y \geq 2CS \cdot F_{xy} \quad \forall \theta$$

## 2. Méthode de Wood

> 1<sup>ère</sup> méthode de résolution : tracé de courbes fonction de  $\theta$

$$C^2 \cdot D_x + S^2 \cdot D_y \geq 2CS \cdot F_{xy} \quad \forall \theta$$



- Il est clair que  $D_x = D_y = |F_{xy}|$  est une solution

Mais est-ce la solution optimale, celle qui minimise la quantité totale  $D_x + D_y$  ?

- Pour  $\theta=45^\circ$  :  $(D_x + D_y)/2 \geq F_{xy}$

$$\Rightarrow D_x + D_y \geq 2 F_{xy}$$

- Donc on ne pourra pas trouver mieux que  $D_x = D_y = F_{xy}$

**Cette solution est bien optimale**

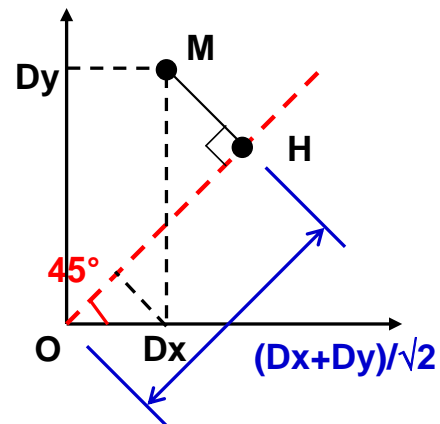
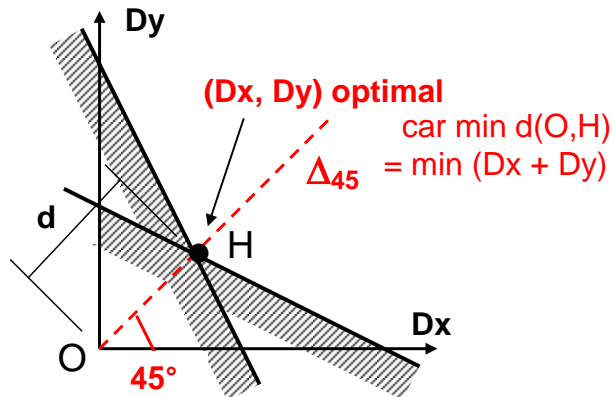
**Cqfd :**

- les armatures de la direction X doivent résister à  $F_{xx} + F_{xy}$
- les armatures de la direction Y doivent résister à  $F_{yy} + F_{xy}$

## 2. Méthode de Wood

### > 2<sup>ème</sup> méthode de démonstration : géométrie dans un plan (Dx, Dy)

- On veut :  $f(\theta) = C^2 \cdot D_x + S^2 \cdot D_y - 2CS \cdot F_{xy} \geq 0 \quad \forall \theta$
  - Pour une valeur donnée de  $\theta$ , et en se plaçant en coordonnées (Dx, Dy), ceci est l'équation d'un demi-plan limité par la droite d'équation  $f(\theta) = 0$
  - On peut remarquer que pour  $\theta' = \pi/2 - \theta$ , on a :  $\cos(\pi/2 - \theta) = \sin(\theta) = S$   
 $\sin(\pi/2 - \theta) = \cos(\theta) = C$   
 donc l'équation devient :  $f(\theta') = S^2 \cdot D_x + C^2 \cdot D_y - 2CS \cdot F_{xy} > 0$
- Ceci est une droite de pente inverse à la précédente, et passant par un même point de la bissectrice à 45° :  $D_x = D_y = 2CS \cdot F_{xy}$
- 2<sup>ème</sup> remarque : pour un point  $M = (D_x, D_y)$  quelconque, la distance (O, H) = projection de M sur la bissectrice à 45° vaut  $(D_x + D_y) / \sqrt{2}$  donc est une mesure de "Dx+Dy"

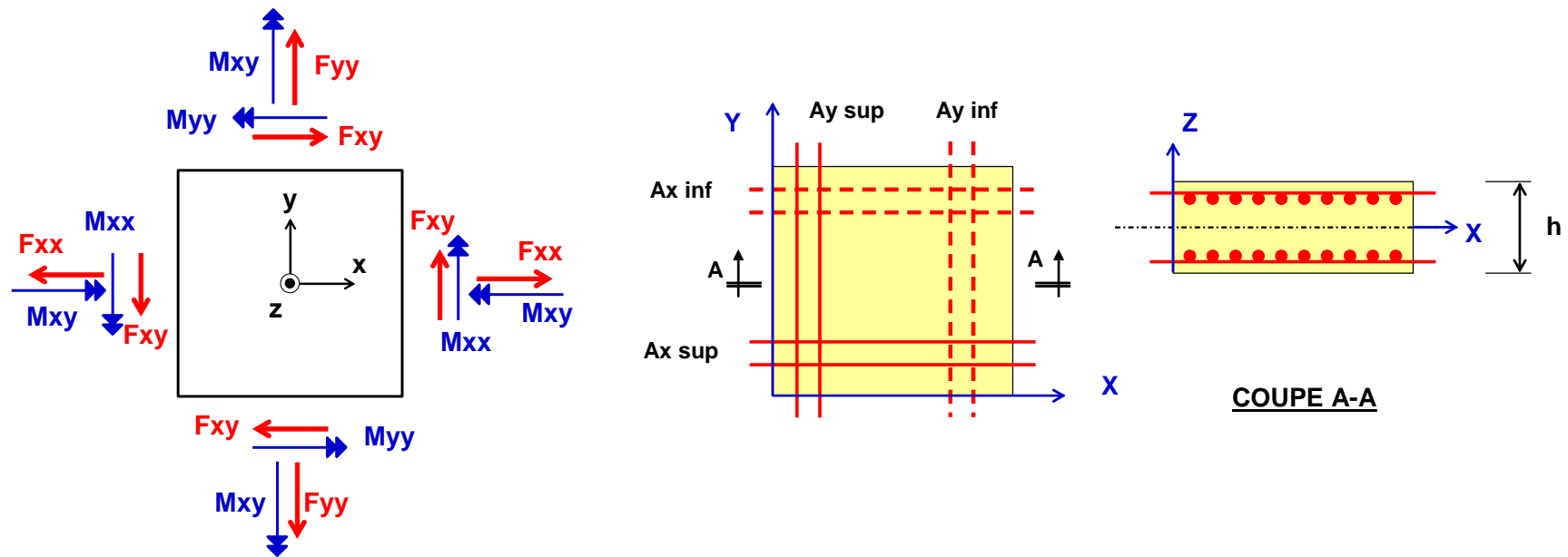


L'optimum correspond donc bien à  $D_x = D_y$   
 Et la fonction « 2CS » vaut 1 au maximum  
 $\Rightarrow D_x = D_y = F_{xy}$  **cqfd**  
 ( $R_x = F_{xx} + F_{xy}$ , etc.)

# 3. PLAQUE SOUMISE A DES EFFORTS QUELCONQUES : METHODE DE CAPRA-MAURY

## > Présentation

- Plaque d'épaisseur  $h$  soumise à 6 efforts quelconques



- Objectif : déterminer le ferrailage nécessaire pour résister à ces efforts à l'ELU (en  $cm^2/ml$ )

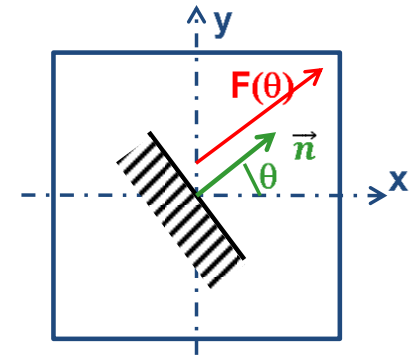
### 3. Méthode de Capra-Maury

#### Principe de la méthode :

- > **Efforts perpendiculaires à la facette d'angle  $\theta$**

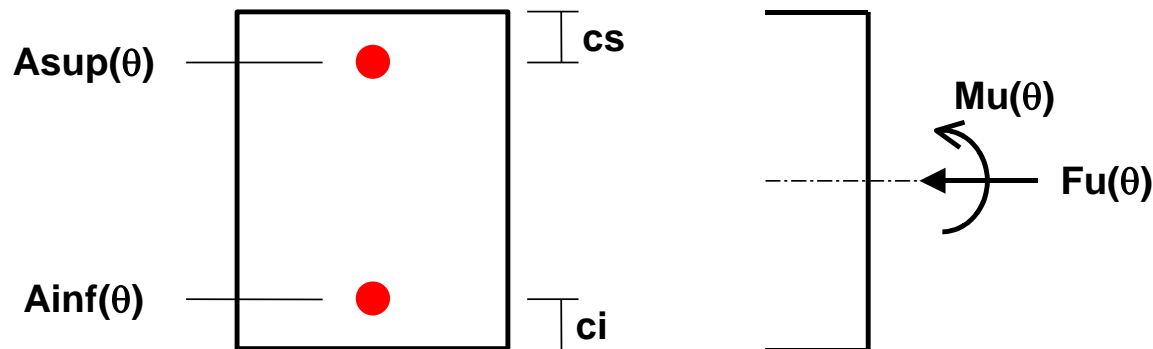
$$F(\theta) = C^2 \cdot F_{xx} + S^2 \cdot F_{yy} + 2CS \cdot F_{xy}$$

$$M(\theta) = C^2 \cdot M_{xx} + S^2 \cdot M_{yy} + 2CS \cdot M_{xy}$$



- > **Détermination des aciers  $A_{inf}(\theta)$  et  $A_{sup}(\theta)$**

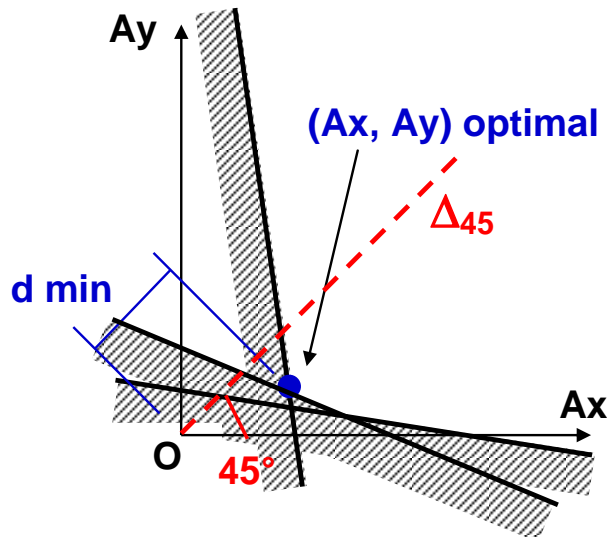
Les aciers peuvent être déterminés dans cette facette par un calcul de type : section rectangulaire (largeur 1ml ; épaisseur h) soumise à flexion composée => on peut calculer  $A_{inf}(\theta)$  et/ou  $A_{sup}(\theta)$ .



### 3. Méthode de Capra-Maury

> **Choix des 4 sections d'acier selon X, Y**

- On doit satisfaire :  $C^2 \cdot Ax_j + S^2 \cdot Ay_j \geq A_j(\theta)$  quel que soit  $\theta$  ( $j = \text{inf ou sup}$ ).
- On raisonne désormais sur une face de la section (inf ou sup), et on désigne par  $A_x$  et  $A_y$  les sections correspondantes.  
On doit choisir  $A_x$  et  $A_y$  tels que :  $C^2 \cdot A_x + S^2 \cdot A_y \geq A(\theta)$  quel que soit  $\theta$  tout en minimisant la somme  $A_x + A_y$
- Chaque condition peut s'interpréter de la façon suivante : le point  $(A_x, A_y)$  doit se trouver dans un demi-plan limité par la droite  $\Delta_\theta$  d'équation :  $C^2 \cdot A_x + S^2 \cdot A_y = A(\theta)$



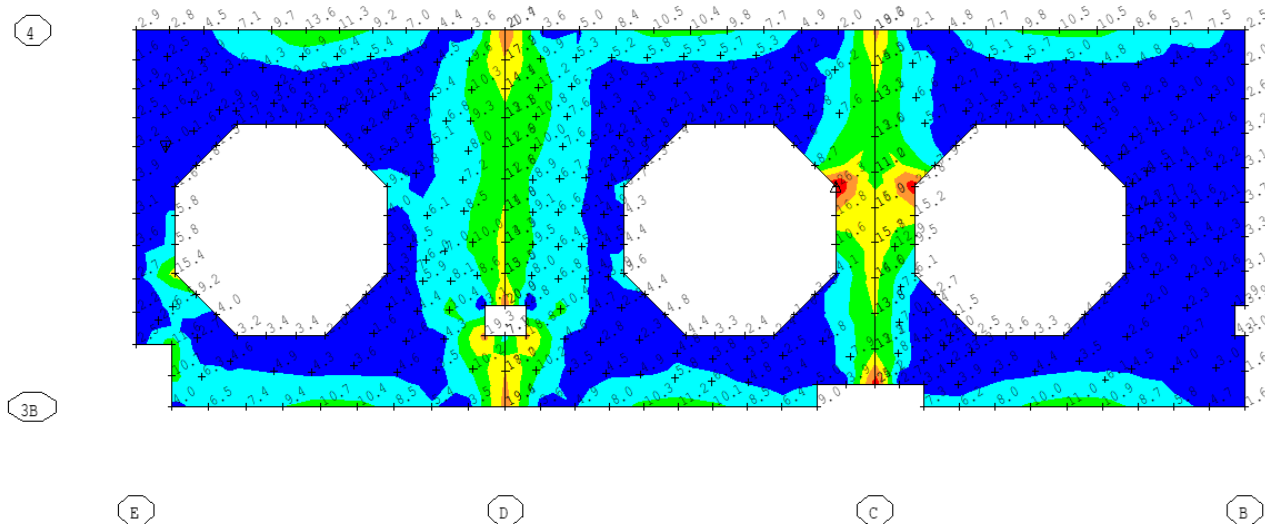
- On retient ensuite le point  $(A_x, A_y)$  permettant de minimiser la distance « d » en projection sur la droite  $\Delta_{45}$  (minimisation de  $A_x + A_y$ )



## 4. EXEMPLES DE CALCUL

### > LOGICIELS DEVELOPPES PAR LES BUREAUX D'ETUDE

- Différents bureaux d'études ont développé leur propre logiciel permettant d'effectuer la détermination des armatures à l'ELU en utilisant la méthode de Capra-Maury (car pendant longtemps les logiciels du commerce géraient mal ce type de calcul. On utilisait autrefois plutôt des modélisation de type barre, et non de type plaques et coques...)
- Par exemple à setec tpi : logiciel ARMATEC, permettant de sortir des cartographies d'armatures en couleur



## 4. EXEMPLES DE CALCUL

---

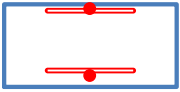
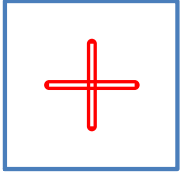
### > FEUILLES EXCEL

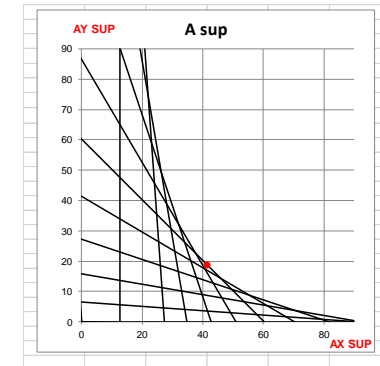
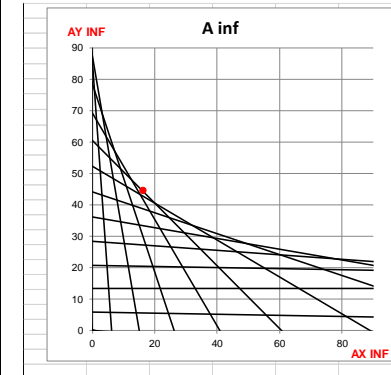
- On peut également développer des feuilles excel permettant la détermination automatique d'armatures selon méthode de Capra-Maury
- Dans l'exemple ci-après, il est possible de faire le calcul pour des armatures non orthogonales

(car la méthode reste la même : après avoir calculé les armatures  $A(\theta)$  nécessaires dans toutes les directions  $\theta$ , on choisit les sections d'armatures nécessaires dans 2 directions imposées...)

# 4. EXEMPLES DE CALCUL

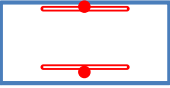
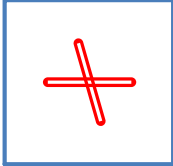
## > Exemple 1

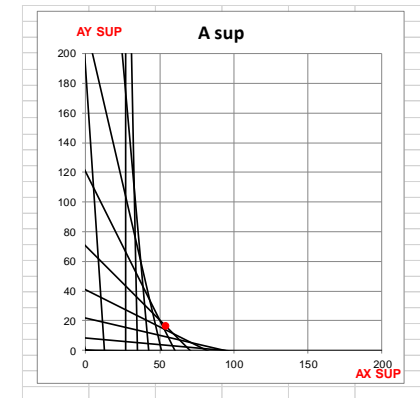
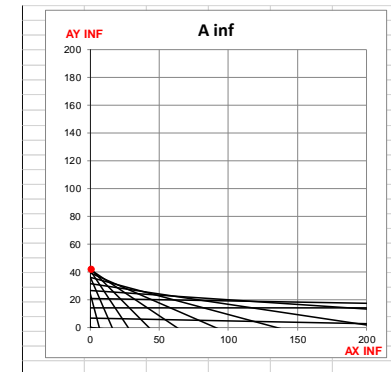
COQUES BA - DETERMINATION DES ARMATURES A L'ELU					
Selon la méthode de Capra-Maury					
Titre : <b>Exemple 2</b>					
<b>DONNEES</b>					
<b>&gt; Géométrie</b>					
Epais (m)	Direction	ci (m)	cs (m)	Angle (deg)	Angle par défaut
0.500	X	0.059	0.041		0
	Y	0.098	0.042		90
<b>&gt; Matériaux</b>					
fck (MPa)	γc	fcd (MPa)	fyk (MPa)	γs	fyd (MPa)
30	1.50	20.0	500	1.15	434.8
<b>&gt; Efforts appliqués</b>					
Convention de signes ELFI : F>0 en traction M>0 s'il tend la fibre sup					
Fxx (kN/ml)	Fyy (kN/ml)	Fxy (kN/ml)	Mxx (kN.m/ml)	Myy (kN.m/ml)	Mxy (kN.m/ml)
200	100	150	200	-200	500
Position des armatures		Orientation des armatures			
					
<b>RESULTATS</b>					
<b>&gt; Sections d'acier dans les directions θ</b>					
et paramètres u et v tels que : $u \cdot Ax + v \cdot Ay \geq A(\theta)$					
Angle θ (deg)	A inf (cm²/ml)	A sup (cm²/ml)	u	v	
0.00	0.00	12.68	1.000	0.000	
15.00	0.00	25.45	0.933	0.067	
30.00	0.00	32.02	0.750	0.250	
45.00	0.00	30.11	0.500	0.500	
60.00	0.00	20.41	0.250	0.750	
75.00	0.00	6.14	0.067	0.933	
90.00	13.19	0.00	0.000	1.000	
105.00	26.38	0.00	0.067	0.933	
120.00	33.04	0.00	0.250	0.750	
135.00	30.29	0.00	0.500	0.500	
150.00	19.63	0.00	0.750	0.250	
165.00	5.65	0.00	0.933	0.067	
180.00	0.00	12.68	1.000	0.000	
<b>&gt; Choix des armatures</b>					
Solution minisant la somme Ax + Ay					
AX INF (cm²/ml)	AY INF (cm²/ml)	AX SUP (cm²/ml)	AY SUP (cm²/ml)		
16.4	44.1	41.9	18.4		



# 4. EXEMPLES DE CALCUL

## > Exemple 2 – Avec armatures non orthogonales

COQUES BA - DETERMINATION DES ARMATURES A L'ELU					
Selon la méthode de Capra-Maury					
Titre : <b>Exemple 2</b>					
<b>DONNEES</b>					
<b>&gt; Géométrie</b>					
Epais (m)	Direction	ci (m)	cs (m)	Angle (deg)	Angle par défaut
0.500	X	0.059	0.041	0	0
	Y	0.098	0.042	105	90
<b>&gt; Matériaux</b>					
fck (MPa)	$\gamma_c$	fcd (MPa)	fyk (MPa)	$\gamma_s$	fyd (MPa)
30	1.50	20.0	500	1.15	434.8
<b>&gt; Efforts appliqués</b>					
Convention de signes ELFI : F>0 en traction M>0 s'il tend la fibre sup					
Fxx (kN/ml)	Fyy (kN/ml)	Fxy (kN/ml)	Mxx (kN.m/ml)	Myy (kN.m/ml)	Mxy (kN.m/ml)
200	100	150	200	-200	500
Position des armatures			Orientation des armatures		
					
<b>RESULTATS</b>					
<b>&gt; Sections d'acier dans les directions <math>\theta</math></b>					
et paramètres u et v tels que : $u \cdot Ax + v \cdot Ay \geq A(\theta)$					
Angle $\theta$ (deg)	A inf (cm <sup>2</sup> /ml)	A sup (cm <sup>2</sup> /ml)	u	v	
0.00	0.00	12.68	1.000	0.067	
15.00	0.00	25.45	0.933	0.000	
30.00	0.00	32.01	0.750	0.067	
45.00	0.00	30.09	0.500	0.250	
60.00	0.00	20.40	0.250	0.500	
75.00	0.00	6.14	0.067	0.750	
90.00	13.19	0.00	0.000	0.933	
105.00	26.45	0.00	0.067	1.000	
120.00	33.44	0.00	0.250	0.933	
135.00	31.17	0.00	0.500	0.750	
150.00	20.64	0.00	0.750	0.500	
165.00	6.05	0.00	0.933	0.250	
180.00	0.00	12.68	1.000	0.067	
<b>&gt; Choix des armatures</b>					
Solution minisant la somme Ax + Ay					
AX INF (cm <sup>2</sup> /ml)	AY INF (cm <sup>2</sup> /ml)	AX SUP (cm <sup>2</sup> /ml)	AY SUP (cm <sup>2</sup> /ml)		
1.3	41.1	54.6	15.8		
Rappel des sections obtenues avec armatures orthogonales :		16.4	44.1	41.9	18.4



L'angle éventuel des armatures peut avoir une très grosse influence sur les aciers nécessaires !!

## 5. EXERCICE D'APPLICATION

### > DONNEES DU CALCUL

- Epaisseur de la dalle :  $E_p = 0.60 \text{ m}$
- Position des aciers :  $c = 0.06 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad d = 0.54 \text{ m}$
- Béton :  $f_{ck} = 30 \text{ MPa} \quad \Rightarrow \quad f_{cd} = 20 \text{ MPa}$
- Armatures :  $f_{yk} = 500 \text{ MPa} \quad \Rightarrow \quad f_{yd} = 434.8 \text{ MPa}$
  
- Efforts appliqués – Convention « génie civil » (>0 en compression)
  - $F_{xx} = 0.50 \text{ MN/ml}$
  - $F_{yy} = -0.20 \text{ MN/ml}$
  - $F_{xy} = 0.15 \text{ MN/ml}$
  - $M_{xx} = 0.80 \text{ MN.m/ml}$  (>0 s'il tend la fibre inf)
  - $M_{yy} = 0.40 \text{ MN.m/ml}$
  - $M_{xy} = 0.20 \text{ MN.m/ml}$

Déterminer les armatures par la méthode de Capra-Maury

# 5. EXERCICE D'APPLICATION

> Procéder en construisant un tableau :

$\theta$ degrés	C	S	Efforts		Calculs en flexion composée				Pente -C <sup>2</sup> /S <sup>2</sup>
			F( $\theta$ ) (MN/ml)	M( $\theta$ ) (MN.m/ml)	M <sub>Ac_t</sub> (MN.m/ml)	$\mu$	$\beta = z/d$	A tendu (cm <sup>2</sup> )	
0	1.000	0.000	0.500	0.800	0.920	0.158	0.914	31.4	infini
15									
30									
45									
60									
75									
90									
105									
120									
135									
150									
165									
180									

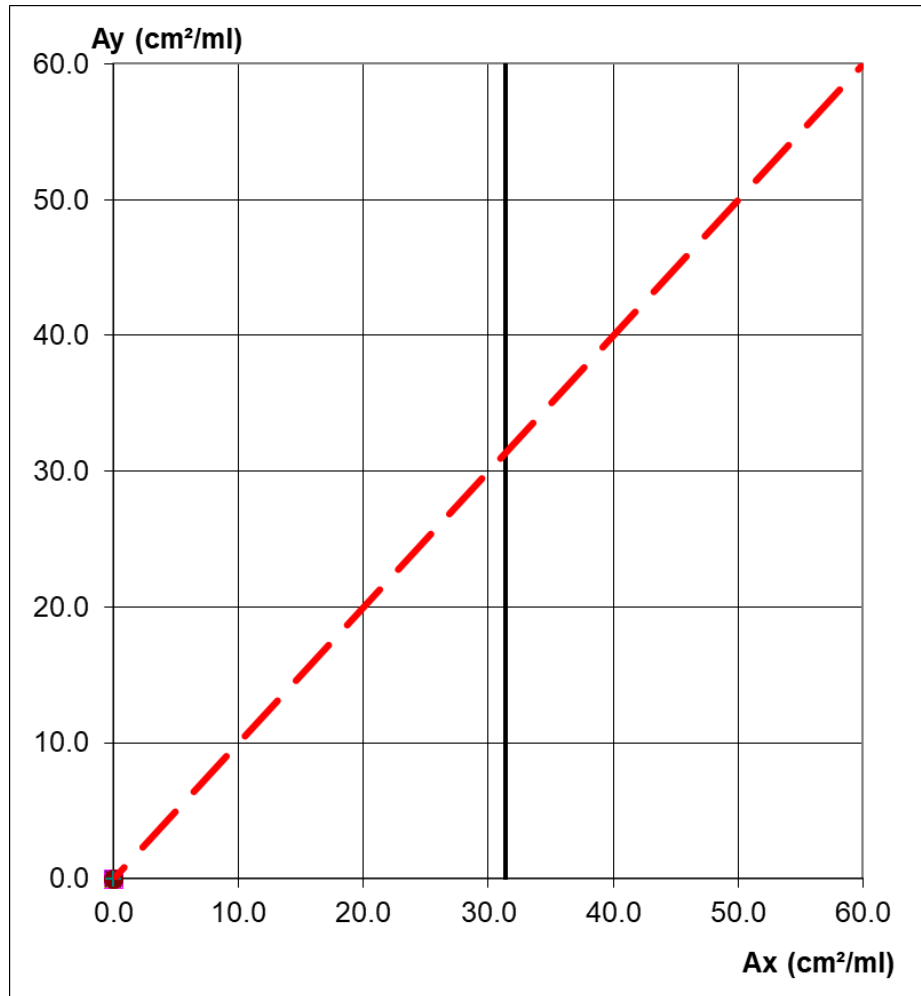
Formules employées

- $C = \cos\theta$      $S = \sin\theta$
- $F(\theta) = C^2 \cdot F_{xx} + S^2 \cdot F_{yy} + 2CS \cdot F_{xy}$
- $M(\theta) = C^2 \cdot M_{xx} + S^2 \cdot M_{yy} + 2CS \cdot M_{xy}$
- $M_{Ac_t} = M(\theta) + F(\theta) \times 0.24m$
- $\mu = \frac{M_{Ac_t}}{1m \times 0.54^2 \times 20 \text{ MPa}}$
- $\beta = 0.5 \cdot (1 + \sqrt{1 - 2\mu})$
- $A_{tendu} = \frac{1}{f_{yd}} \cdot \left( \frac{M_{Ac_t}}{\beta \cdot d} - F(\theta) \right)$

- Les droites passent par le point  $A_x = A_y = A(\theta)$

# 5. EXERCICE D'APPLICATION

> Représentation de la 1<sup>ère</sup> droite  $\theta=0$  : droite verticale (pente infinie)



# 5. EXERCICE D'APPLICATION

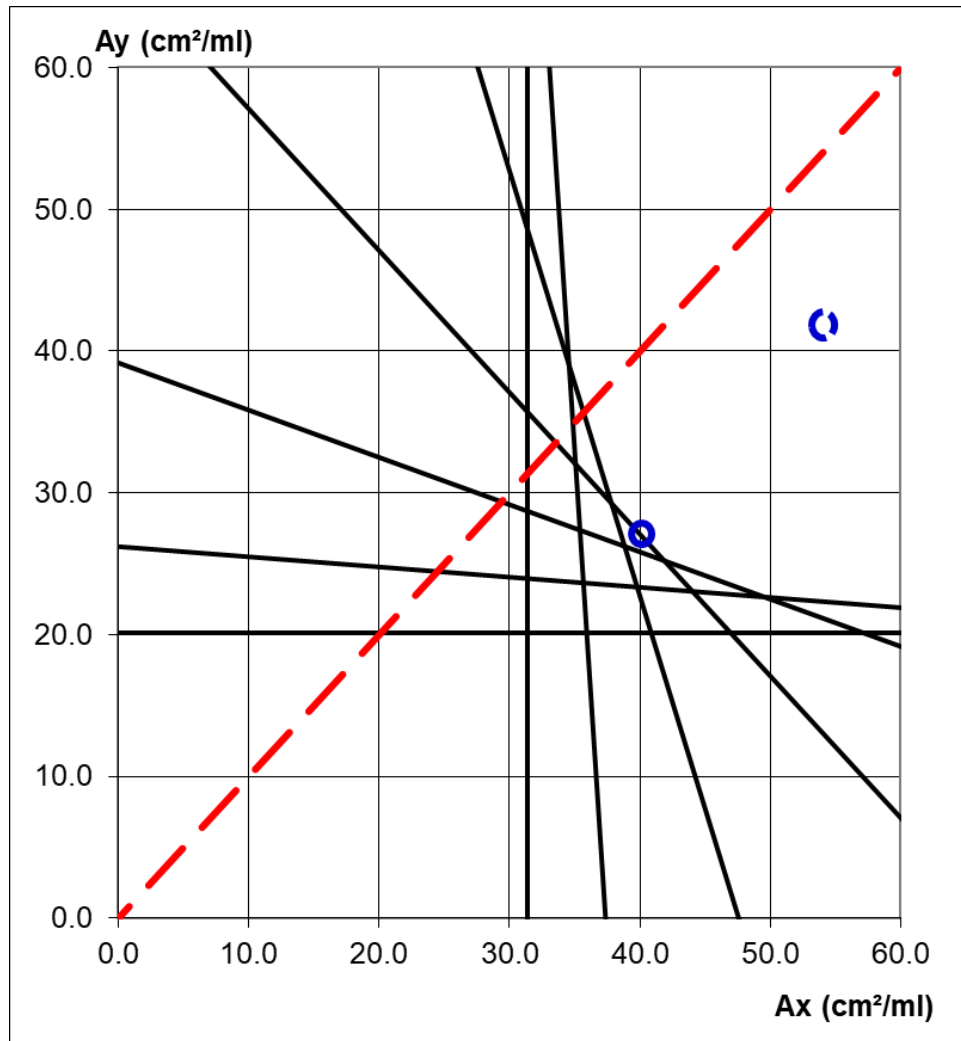
## > Tableau final

$\theta$ degrés	C	S	Efforts		Calculs en flexion composée				
			F( $\theta$ ) (MN/ml)	M( $\theta$ ) (MN.m/ml)	M_Ac_t (MN.m/ml)	$\mu$	$\beta=z/d$	A tendu (cm <sup>2</sup> )	Pente -C <sup>2</sup> /S <sup>2</sup>
<b>0</b>	<b>1.000</b>	<b>0.000</b>	<b>0.500</b>	<b>0.800</b>	<b>0.920</b>	<b>0.158</b>	<b>0.914</b>	<b>31.4</b>	<b>infini</b>
15	0.966	0.259	0.528	0.873	1.000	0.171	0.905	34.9	-13.93
30	0.866	0.500	0.455	0.873	0.982	0.168	0.907	35.7	-3.00
45	0.707	0.707	0.300	0.800	0.872	0.150	0.919	33.5	-1.00
60	0.500	0.866	0.105	0.673	0.698	0.120	0.936	29.4	-0.33
75	0.259	0.966	-0.078	0.527	0.508	0.087	0.954	24.5	-0.07
<b>90</b>	<b>0.000</b>	<b>1.000</b>	<b>-0.200</b>	<b>0.400</b>	<b>0.352</b>	<b>0.060</b>	<b>0.969</b>	<b>20.1</b>	<b>0.00</b>
105	-0.259	0.966	-0.228	0.327	0.272	0.047	0.976	17.1	-0.07
120	-0.500	0.866	-0.155	0.327	0.290	0.050	0.975	16.2	-0.33
135	-0.707	0.707	0.000	0.400	0.400	0.069	0.964	17.7	-1.00
150	-0.866	0.500	0.195	0.527	0.574	0.098	0.948	21.3	-3.00
165	-0.966	0.259	0.378	0.673	0.764	0.131	0.930	26.3	-13.93
180	-1.000	0.000	0.500	0.800	0.920	0.158	0.914	31.4	infini



# 5. EXERCICE D'APPLICATION

## > Graphique final



On peut choisir :

$$A_x = 40 \text{ cm}^2/\text{ml}$$

$$A_y = 27 \text{ cm}^2/\text{ml}$$

En effet pour la droite à  $45^\circ$  :

$$C^2.A_x + S^2.A_y \geq A(\theta)$$

$$0.5.(A_x + A_y) \geq 33.5$$

$$A_y \geq 67 - A_x = 27 \text{ cm}^2/\text{ml}$$