

Mécanique Physique des Matériaux

Méthode générale de modélisation en mécanique



École des Ponts

Daniel Weisz-Patrault

Séance 1 Classification et choix des matériaux

Séance 2 Méthode générale de modélisation en mécanique

Séance 3 Exemple : mécanique de milieux continus classique

Séance 4 Écriture générale des relations constitutives

Séance 5 Comportement des polymères et des élastomères

Séance 6 Étude de cas

Séance 7 Origine physique de la plasticité

Séance 8 Élastoplasticité HPP

Séance 9 Élastoplasticité en grandes transformation

Séance 10 Étude de cas

Séance 11 Microstructures et transitions de phase

Séance 12 Contraintes résiduelles

Séance 13 Examen

Objectifs généraux

Culture fondamentale

- Concepts de mécanique en **grandes déformations**
- Ecriture des comportements
- Théorie qui sous-tend le calcul numérique

Objectifs de la séance

Faire un modèle c'est faire des choix.

- Différents niveaux de descriptions
- Principe des puissances virtuelles
- Thermodynamique
- Comportement

Quelles questions peut-on poser à un modèle?

Tous les modèles sont faux, certains sont utiles.

Plan de la séance

- 1| Modélisation en mécanique
- 2| Niveau 1 : Géométrie et cinématique
- 3| Niveau 2 : Définition des efforts
- 4| Niveau 3 : Thermodynamique et comportement

Plan de la séance

1| Modélisation en mécanique

2| Niveau 1 : Géométrie et cinématique

3| Niveau 2 : Définition des efforts

4| Niveau 3 : Thermodynamique et comportement

Modélisation en mécanique

- | Qu'est qu'un modèle de mécanique n'est pas ?
- | Qu'est-ce qu'un modèle mécanique macroscopique ?
- | A quoi sert un modèle de mécanique ?

Qu'est qu'un modèle de mécanique n'est pas ?

Empirisme

- Collection de **cas particuliers**
 - Matériaux
 - Type de chargement / conditions aux limites
- Loi phénoménologique / **fittée** sur des **données expérimentales**
- Regression statistique

Théorie physique / Interactions fondamentales

- Postulats** minimaux : non expérimentables / **infalsifiables**
 - Référentiels inertiels sont équivalents
- Conclusions** : expérimentables / **falsifiables**
 - Anomalie de l'orbite de mercure
 - Déviation de la lumière par les masses importantes
 - Ondes gravitationnelles

Modélisation en mécanique

- | Qu'est qu'un modèle de mécanique n'est pas ?
- | Qu'est-ce qu'un modèle mécanique macroscopique ?
- | A quoi sert un modèle de mécanique ?

Qu'est-ce qu'un modèle mécanique macroscopique ?

Un objet de prédiction de situations complexes

□ Cadre **physique**

- Principes de la thermodynamique
- Principe des puissances virtuelles
- Phénomènes physiques d'intérêt (changement de phase etc.)

Un modèle macroscopique ne décrit pas toute la physique aux fines échelles, mais est compatible avec le cadre énergétique global

□ Cadre **mathématique abstrait**

- Espace des vitesses généralisées
- Relation constitutives (comportement matériau)

Contient la physique du monde macroscopique.

Quelles questions peut-on poser à un modèle ?

□ **Pertinence** du modèle, identification **expérimentales**

Qu'est-ce qu'un modèle mécanique macroscopique ?

La physique **invente** des **objets mathématiques** et découvre les **relations** qui les relie.

Un modèle de mécanique **s'invente**, il ne se découvre pas
Par contre, on découvre la **physique** qu'on a mis dedans à **la fin**.

Modélisation en mécanique

- | Qu'est qu'un modèle de mécanique n'est pas ?
- | Qu'est-ce qu'un modèle mécanique macroscopique ?
- | **A quoi sert un modèle de mécanique ?**

A quoi sert un modèle de mécanique ?

Connaître la physique fondamentale ne permet pas d'appréhender la complexité des matériaux et structures réels.

Un modèle doit être

- Mathématisée
- Calculable
- Prédicatif sur les aspects d'intérêt
- Économique (rapport coût de calcul / information pertinente)

Vocation des modèles

- Concevoir des structures complexes
- Optimiser le design
- Preuve de sûreté
- Comprendre des erreurs de conception / sinistres

Plan de la séance

- 1| Modélisation en mécanique
- 2| Niveau 1 : Géométrie et cinématique
- 3| Niveau 2 : Définition des efforts
- 4| Niveau 3 : Thermodynamique et comportement

Niveau 1 : Géométrie et cinématique

| Description de la famille d'objets

| Description du mouvement et cinématique

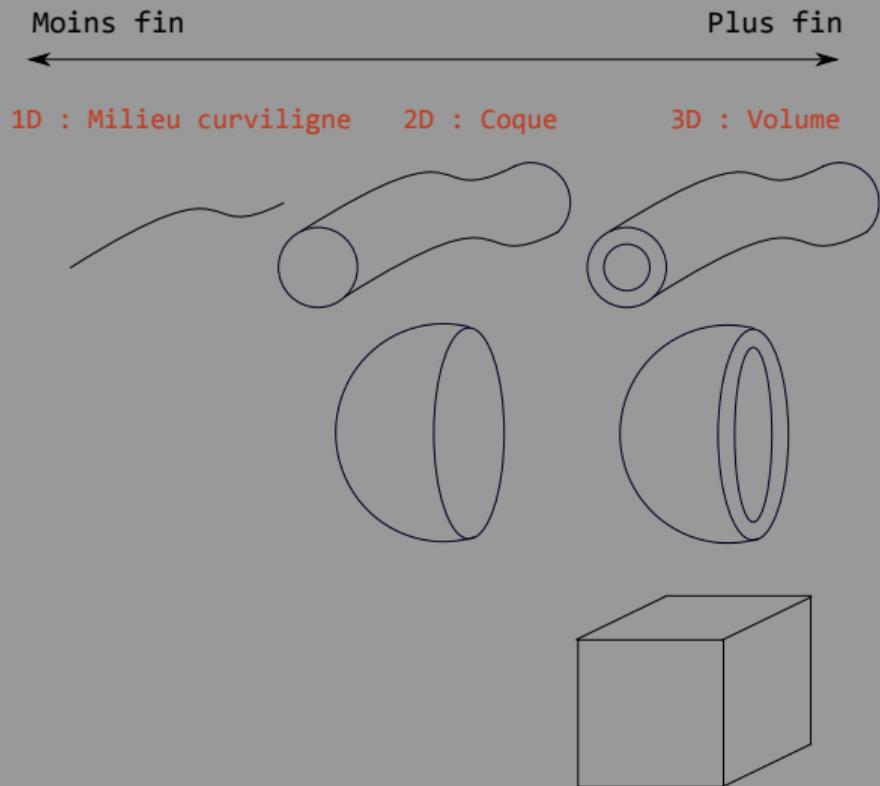
Description de la famille d'objets

Choix fondamentaux

- 1) Famille géométrique de l'objet
- 2) Nombre de particules de matériaux
- 3) Microstructure des particules
- 4) Liaisons internes

Description de la famille d'objets

Famille géométrique de l'objet



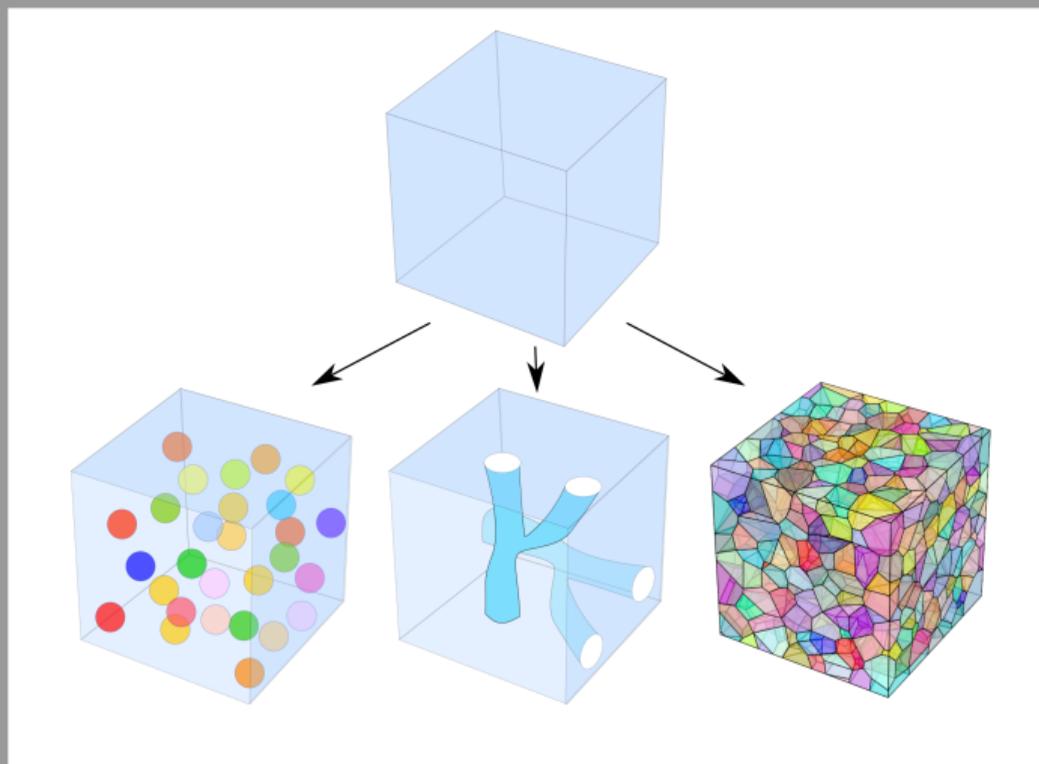
Description de la famille d'objets

Famille géométrique de l'objet

- **Domaine mécanique** ou objet : Ω_t
- **Dimension**
 - **3D** : Volume
 - **2D** : Coques, Plaques, ...
 - **1D** : Poutres, Milieux curvilignes, ...
- En dimension 3, usuellement Ω_t **ouvert de \mathbb{R}^3**
- **Plus généralement** : **variété différentielle** plongée dans \mathbb{R}^3
 - **Exemples** : sphère, tore, surfaces implicites $f(x, y, z) = 0$
- **Propriétés intuitives**
 - Transformations **différentiables**, $\underline{\phi} : \underline{x} \in \Omega_t \mapsto \underline{\phi}(\underline{x}) \in \Omega'_t$
 - Notion de **tangente**
 - Calcul **différentiel** sur Ω_t
- **Élément** de Ω_t : **point matériel**

Description de la famille d'objets

Que représente un point matériel?



Description de la famille d'objets

Nombre de particules de matériaux

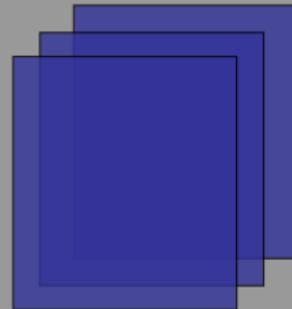
- Nombre de particules : n
- Chaque particule a son propre champ de vitesse

Moins complexe

Plus complexe



1 particule



n particules

Description de la famille d'objets

Nombre de particules de matériaux

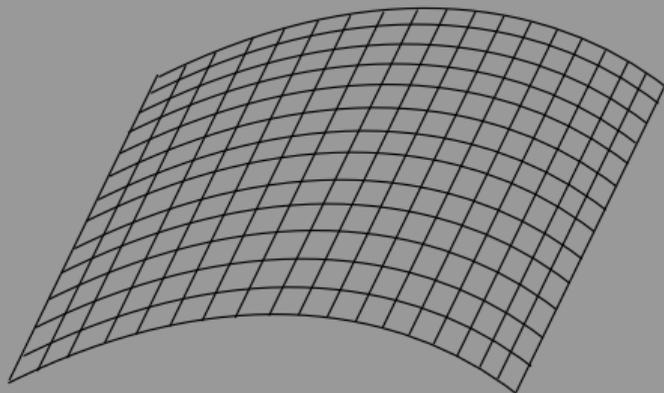
□ Exemples

- Mécanique des sols saturés
3D, 2 particules (squelette et fluide)
- Béton (durabilité)
3D, 4 particules (squelette, air, vapeur, eau liquide)
- Matériaux composites
2D, n particules (une par couche)

Description de la famille d'objets

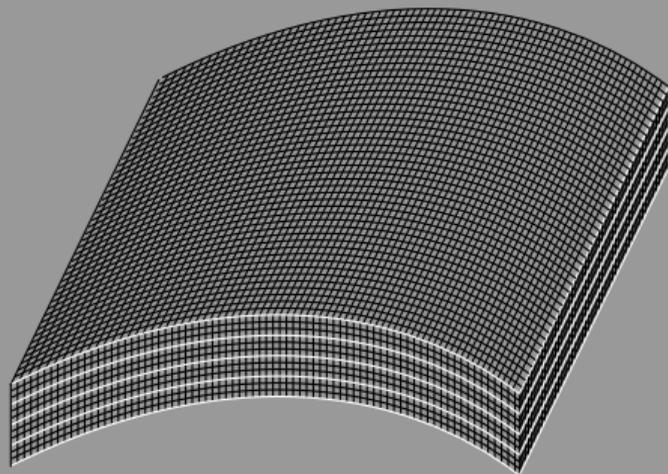
Nombre de particules de matériaux

- Exemple : délaminage des multicouches



Modélisation plaque 2D

On ne capture que la **déformée globale**
du multicouche



Modélisation Cauchy 3D

On capture les **efforts d'interface**

Incalculable

Description de la famille d'objets

Délamination des multicouches : 3D

- Surface $\simeq 1 \text{ m}^2$
- Epaisseur d'une couche $\simeq 100 \text{ }\mu\text{m}$
- Nombre de mailles dans l'épaisseur : 3
- Nombre de couches $\simeq 10$
- Nombre de degrés de liberté par noeuds : 3

⇒ Éléments : **cubes** d'environ $33 \text{ }\mu\text{m}$ de côté

- $\simeq 10 \times 3 \times 9 \times 10^8 = 2.7 \times 10^{10}$ noeuds dans le maillage

⇒ $\simeq 8.1 \times 10^{10}$ **degrés de liberté**

Description de la famille d'objets

Délamination des multicouches : 2D multiparticulaire

- Surface $\simeq 1 \text{ m}^2$
- Nombre de couches $\simeq 10$
- Nombre de degrés de liberté par noeuds $5n$: 50

⇒ Éléments : carrés d'environ 1 cm de côté

- $\simeq 100 \times 100 = 10^4$ noeuds dans le maillage

⇒ $\simeq 5 \times 10^5$ degrés de liberté

Description de la famille d'objets

Vitesses généralisées

- 1) Famille géométrique de l'objet
- 2) Nombre de particules de matériaux
- 3) Microstructure des particules

⇒ Définition d'un espace vectoriel des vitesses généralisées

Dans Ω_t (1er choix) on a n champs de vitesses (2ieme choix)
généralisées (3ieme choix)

Description de la famille d'objets

Liaisons internes

- Conditions additionnelles
- Relation **cinématique**
- Sous-espace vectoriel des vitesses généralisées
- Exemples

- Matériau incompressible

$$\operatorname{div} [\underline{V}(\underline{x}, t)] = 0$$

- Poutre d'Euler-Bernoulli

Rotation de la section = Rotation de la fibre neutre

- Poutre inextensible

Description de la famille d'objets

Théories 1D : Fil

- 1) Famille géométrique de l'objet : C_t (1D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 1 Particule (section)
- 3) Microstructure des particules : point
- 4) Liaisons internes : aucune

Champ de vitesse à 3 composantes en chaque point de C_t

$$\mathcal{V}_t = \{ \underline{V} : \underline{x} \in C_t \mapsto \underline{V}(\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \}$$

Description de la famille d'objets

Théories 1D : Poutre de Timoshenko

- 1) Famille géométrique de l'objet : C_t (1D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 1 Particule (section)
- 3) Microstructure des particules : rigide orientée
- 4) Liaisons internes : aucune

Champ de vitesse à 6 composantes en chaque point de C_t

$$\mathcal{V}_t = \{ (\underline{V}, \underline{\omega}) : \underline{x} \in C_t \mapsto (\underline{V}(\underline{x}, t), \underline{\omega}(\underline{x}, t)) \in \mathbb{R}^6, \underline{\omega} \text{ anti-sym} \}$$

Rotation : produit vectoriel ou tenseur anti-symétrique

$$\underline{V}_A = \underline{V}_B + \underline{\omega} \wedge \underline{BA} = \underline{V}_B + \underline{\omega} \cdot \underline{BA}$$

Description de la famille d'objets

Théories 1D : Poutre d'Euler Bernoulli

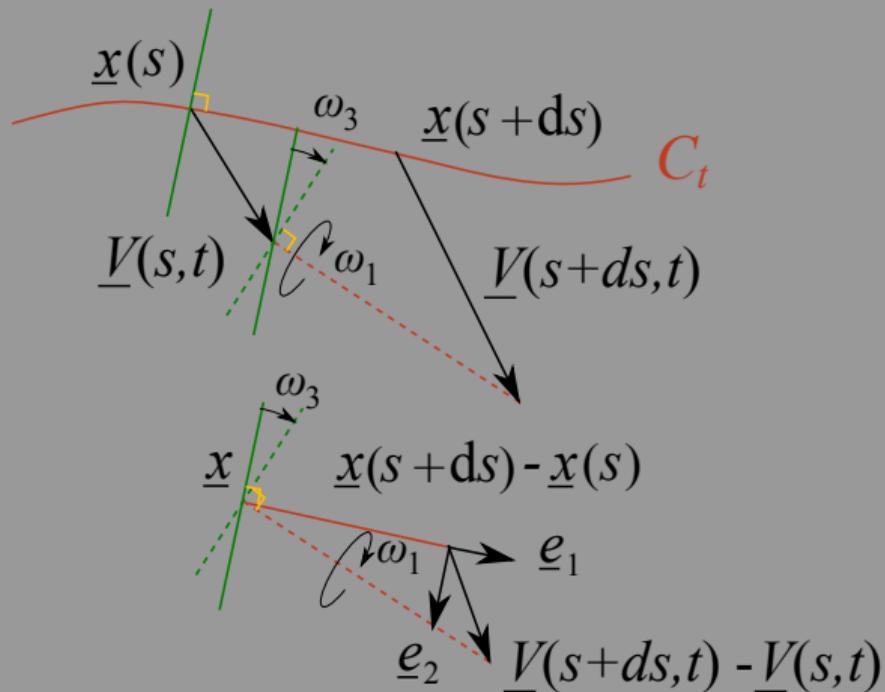
- 1) Famille géométrique de l'objet : C_t (1D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 1 Particule (section)
- 3) Microstructure des particules : rigide orientée
- 4) Liaisons internes : 2 (rotation fibre neutre)

Champ de vitesse à 4 composantes en chaque point de C_t

$$\mathcal{V}_t = \left\{ (\underline{V}, \omega_1) : \underline{x} \in C_t \mapsto (\underline{V}(\underline{x}, t), \omega_1(\underline{x}, t)) \in \mathbb{R}^4, \right. \\ \left. \underline{\omega} = \omega_1 \underline{e}_1 + \left(\frac{\partial \underline{V}}{\partial s} \cdot \underline{e}_2 \right) / \left\| \frac{\partial \underline{x}}{\partial s} \right\| \underline{e}_3 \right\}$$

Description de la famille d'objets

Théories 1D : Poutre d'Euler Bernoulli



Description de la famille d'objets

Théories 1D : Poutre d'Euler Bernoulli

$$\square \underline{x}(s + ds) - \underline{x}(s) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial s} ds$$

$$\square \underline{e}_1 = \frac{\partial \underline{x}}{\partial s} / \left\| \frac{\partial \underline{x}}{\partial s} \right\|$$

$$\square \underline{V}(s + ds, t) - \underline{V}(s, t) = \frac{\partial \underline{V}}{\partial s} ds$$

$$\square \tilde{\underline{e}}_2 = \frac{\partial \underline{V}}{\partial s} / \left\| \frac{\partial \underline{V}}{\partial s} \right\|$$

$$\square \underline{e}_3 = \underline{e}_1 \wedge \tilde{\underline{e}}_2$$

$$\square \underline{e}_2 = \underline{e}_3 \wedge \underline{e}_1$$

$$\square \text{Relation : } [(\underline{V}(s + ds, t) - \underline{V}(s, t)) \cdot \underline{e}_2] \underline{e}_2 = \underline{\omega} \wedge (\underline{x}(s + ds) - \underline{x}(s))$$

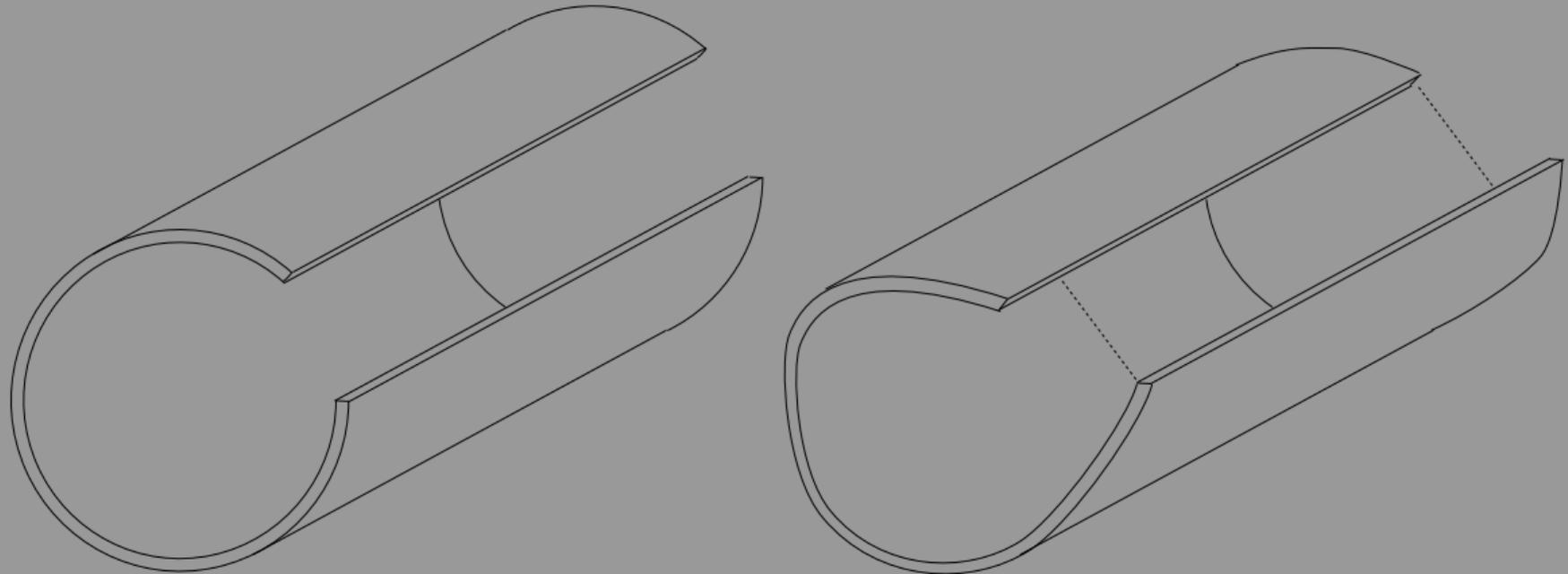
$$\left(\frac{\partial \underline{V}}{\partial s} \cdot \underline{e}_2 \right) \underline{e}_2 = \underline{\omega} \wedge \left\| \frac{\partial \underline{x}}{\partial s} \right\| \underline{e}_1 = \left\| \frac{\partial \underline{x}}{\partial s} \right\| (\omega_3 \underline{e}_2 - \omega_2 \underline{e}_3)$$

$$\square \Rightarrow \omega_2 = 0, \omega_3 = \left(\frac{\partial \underline{V}}{\partial s} \cdot \underline{e}_2 \right) / \left\| \frac{\partial \underline{x}}{\partial s} \right\|, \omega_1 \text{ est indéterminé}$$

Description de la famille d'objets

Théories 1D : Poutre à paroi mince

JA. Calgaro



Description de la famille d'objets

Théories 1D : Poutre à paroi mince

JA. Calgaro

- 1) Famille géométrique de l'objet : C_t (1D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 1 Particule (section)
- 3) Microstructure des particules : déformable hors plan
- 4) Liaisons internes : aucune

Champ de vitesse à 7 composantes en chaque point de C_t

$$\mathcal{V}_t = \left\{ (\underline{V}, \underline{\underline{\omega}}, V_g) : \underline{x} \in C_t \mapsto (\underline{V}(\underline{x}, t), \underline{\underline{\omega}}(\underline{x}, t), V_g(\underline{x}, t)) \in \mathbb{R}^7, \right. \\ \left. \underline{\underline{\omega}} \text{ anti-sym}, \right\}$$

Description de la famille d'objets

Théories 1D : Tringle Michelin

Mahjoub GMM 2005

- 1) Famille géométrique de l'objet : C_t (1D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 1 Particule (section)
- 3) Microstructure des particules : déformable
- 4) Liaisons internes : aucune

Champ de vitesse à 9 composantes en chaque point de C_t

$$\mathcal{V}_t = \left\{ (\underline{V}, \underline{\underline{\omega}}, \underline{V}_S) : \underline{x} \in C_t \mapsto (\underline{V}(\underline{x}, t), \underline{\underline{\omega}}(\underline{x}, t), \underline{V}_S(\underline{x}, t)) \in \mathbb{R}^9, \right. \\ \left. \underline{\underline{\omega}} \text{ anti-sym}, \right\}$$

Description de la famille d'objets

Théories 1D : Multifil Arcelor

Cera GMM 2004

- 1) Famille géométrique de l'objet : C_t (1D plongé dans le plan)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 37 Particules (section de fil)
- 3) Microstructure des particules : aucune
- 4) Liaisons internes : aucune

Champ de vitesse à 74 composantes en chaque point de C_t

$$\mathcal{V}_t = \{(\underline{V}_1, \dots, \underline{V}_{37}) : \underline{x} \in C_t \mapsto (\underline{V}_1(\underline{x}, t), \dots, \underline{V}_{37}(\underline{x}, t)) \in \mathbb{R}^{74}\}$$

Description de la famille d'objets

Théories 2D : Membranes

- 1) Famille géométrique de l'objet : Ω_t (2D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 1 Particule (section)
- 3) Microstructure des particules : point
- 4) Liaisons internes : aucune

Champ de vitesse à 3 composantes en chaque point de Ω_t

$$\mathcal{V}_t = \{ \underline{V} : \underline{x} \in \Omega_t \mapsto \underline{V}(\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \}$$

Description de la famille d'objets

Théories 2D : Plaque de Reissner Mindlin

- 1) Famille géométrique de l'objet : Ω_t (2D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 1 Particule (section)
- 3) Microstructure des particules : orientées uni-axiales
- 4) Liaisons internes : aucune

Champ de vitesse à 5 composantes en chaque point de Ω_t

$$\mathcal{V}_t = \{(\underline{V}, \omega_2, \omega_3) : \underline{x} \in \Omega_t \mapsto (\underline{V}(\underline{x}, t), \omega_2(\underline{x}, t), \omega_3(\underline{x}, t)) \in \mathbb{R}^5, \underline{\underline{\omega}} \text{ anti-sym}\}$$

Description de la famille d'objets

Théories 2D : Plaque de Love Kirchhoff

- 1) Famille géométrique de l'objet : Ω_t (2D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 1 Particule (section)
- 3) Microstructure des particules : orientées uni-axiales
- 4) Liaisons internes : particule reste perpendiculaire à la surface moyenne

Champ de vitesse à 3 composantes en chaque point de Ω_t

$$\mathcal{V}_t = \{ \underline{V} : \underline{x} \in \Omega_t \mapsto \underline{V}(\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \}$$

Difficultés pour écrire les conditions aux limites.

Description de la famille d'objets

Théories 2D : Extension Reissner Mindlin

A. Lebée et K. Sab

Description de la famille d'objets

Théories 2D : Plaque Multicouches M4-5n

A. Ehrlacher, JF. Caron, A. Chabot et al.

- 1) Famille géométrique de l'objet : Ω_t (2D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : n Particules (couche)
- 3) Microstructure des particules : orientées uni-axiales
- 4) Liaisons internes : aucune

Champ de vitesse à $5n$ composantes en chaque point de Ω_t

$$\mathcal{V}_t = \left\{ \underline{x} \in \Omega_t \mapsto \left(\underline{V}_1(\underline{x}, t), \underline{\omega}_1(\underline{x}, t), \dots, \underline{V}_n(\underline{x}, t), \underline{\omega}_n(\underline{x}, t) \right) \in \mathbb{R}^{5n} \right\}$$

Description de la famille d'objets

Théories 3D : Milieu de Cauchy

Cauchy

- 1) Famille géométrique de l'objet : Ω_t (3D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 1 Particule (section)
- 3) Microstructure des particules : point
- 4) Liaisons internes : aucune

Champ de vitesse à 3 composantes en chaque point de Ω_t

$$\mathcal{V}_t = \{ \underline{V} : \underline{x} \in \Omega_t \mapsto \underline{V}(\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \}$$

Description de la famille d'objets

Théories 3D : Milieu de Cosserat Cosserat

- 1) Famille géométrique de l'objet : Ω_t (3D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 1 Particule (section)
- 3) Microstructure des particules : orientées
- 4) Liaisons internes : aucune

Champ de vitesse à 6 composantes en chaque point de Ω_t

$$\mathcal{V}_t = \left\{ (\underline{V}, \underline{\underline{\omega}}) : \underline{x} \in \Omega_t \mapsto (\underline{V}(\underline{x}, t), \underline{\underline{\omega}}_t(\underline{x}, t)) \in \mathbb{R}^6, \underline{\underline{\omega}} \text{ anti-sym} \right\}$$

Description de la famille d'objets

Théories 3D : Milieu poreux saturé

Biot

- 1) Famille géométrique de l'objet : Ω_t (3D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 2 Particules (1 squelette, 1 fluide)
- 3) Microstructure des particules : point
- 4) Liaisons internes : aucune

Champ de vitesse à 6 composantes en chaque point de Ω_t

$$\mathcal{V}_t = \{ (\underline{V}_{\text{sq}}, \underline{V}_{\text{fl}}) : \underline{x} \in \Omega_t \mapsto (\underline{V}_{\text{sq}}(\underline{x}, t), \underline{V}_{\text{fl}}(\underline{x}, t)) \in \mathbb{R}^6 \}$$

Description de la famille d'objets

Théories 3D : Milieu poreux non saturé (béton)

- 1) Famille géométrique de l'objet : Ω_t (3D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 4 Particules (1 squelette, 3 fluides)
- 3) Microstructure des particules : point
- 4) Liaisons internes : aucune

Champ de vitesse à 12 composantes en chaque point de Ω_t

$$\mathcal{V}_t = \{ \underline{x} \in \Omega_t \mapsto (\underline{V}_{\text{sq}}(\underline{x}, t), \underline{V}_e(\underline{x}, t), \underline{V}_v(\underline{x}, t), \underline{V}_a(\underline{x}, t)) \in \mathbb{R}^{12} \}$$

Description de la famille d'objets

Théories 6D : Milieu de Cosserat en espace profond

M. Brocato

- 1) Famille géométrique de l'objet : $\Omega_t \times SO_3$ (6D)
- 2) Nombre de particules de matériaux : 1 Particule
- 3) Microstructure des particules : orientées
- 4) Liaisons internes : aucune

Champ de vitesse à 6 composantes en chaque point de $\Omega_t \times SO_3$

Description de la famille d'objets

Et bien d'autres !

Niveau 1 : Géométrie et cinématique

| Description de la famille d'objets

| Description du mouvement et cinématique

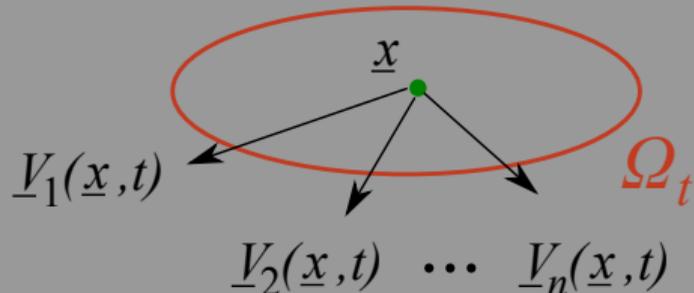
Description du mouvement et cinématique

Description Eulérienne

- **A chaque instant t** , pour tout point de matière \underline{x} , on connaît

$$(V_1(\underline{x}, t), \dots, V_n(\underline{x}, t))$$

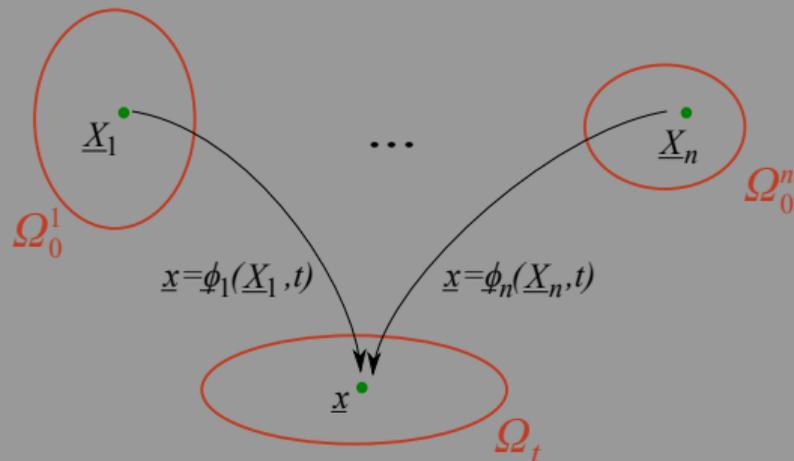
- $V_i(\underline{x}, t)$: **vitesse généralisée** de la i -ième particule en \underline{x} et t .
- Description qui **ne dit rien de l'histoire du matériau**
- **Problème** on ne connaît pas Ω_t



Description du mouvement et cinématique

Description Lagrangienne

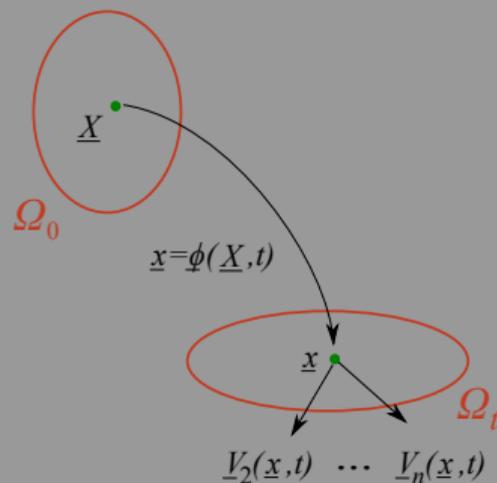
- **Nécessaire** pour définir le concept de déformation
- On définit n configurations de référence $\Omega_0^1, \dots, \Omega_0^n$
- \underline{X}_i la i -ième particule dans la configuration de référence Ω_0^i qui est en \underline{x} à l'instant t
- On a n trajectoires : $\underline{x} = \underline{\phi}_i(\underline{X}_i, t)$



Description du mouvement et cinématique

Description mixte

- Description Lagrangienne pour le **squelette**
- Description Eulérienne pour les **fluides**
- Exemples : sols, bétons, ...
- On définit **une configuration de référence** Ω_0
- \underline{X} la particule **squelette** dans Ω_0
qui est en \underline{x} à l'instant t
- $V_2(\underline{x}, t), \dots, V_n(\underline{x}, t)$: vitesses des particules
dans la configuration **actuelle** Ω_t
- On a **une seule** trajectoire $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$



Plan de la séance

- 1| Modélisation en mécanique
- 2| Niveau 1 : Géométrie et cinématique
- 3| **Niveau 2 : Définition des efforts**
- 4| Niveau 3 : Thermodynamique et comportement

Niveau 2 : Définition des efforts

- | Choix de l'espace vectoriel des mouvements virtuels
- | Choix des formes linéaires définissant les efforts
- | Principe des puissances virtuelles

Choix de l'espace vectoriel des mouvements virtuels

Choix fondamentaux (suite)

5) Espace vectoriel des **mouvements virtuels**

- Contient les vitesses généralisées **réelles**
- Peut être plus grand (e.g., sans liaisons internes)
- Trousse à outils de **fonctions tests**
- A chaque instant une **nouvelle** trousse à outils

$$\text{Exemple : } \mathcal{V}^* = \{ \underline{V}^* : \underline{x} \in \Omega_t \mapsto \underline{V}^*(\underline{x}) \}$$

6) Espace vectoriel des **mouvements rigidifiants**

- Exemple : **translation** et **rotation** d'ensemble

$$\mathcal{V}_R^* = \{ \underline{x} \in \Omega_t \mapsto \underline{V}_T^* + \underline{\underline{\omega}} \cdot \underline{x}, \forall \underline{V}_T \in \mathbb{R}^3 / \forall \underline{\underline{\omega}} \in \mathcal{M}_3^{as} \}$$

Niveau 2 : Définition des efforts

- | Choix de l'espace vectoriel des mouvements virtuels
- | Choix des formes linéaires définissant les efforts
- | Principe des puissances virtuelles

Choix des formes linéaires définissant les efforts

Choix fondamentaux (suite)

- 7) Puissance virtuelle des efforts **extérieurs**, PVE
- 8) Puissance virtuelle des efforts **d'accélération**, PVA
- 9) Puissance virtuelle des efforts **intérieurs**, PVI

Puissances : formes linéaires de la vitesse virtuelle

- Scalaire**, $PV: \mathcal{C}^* \rightarrow \mathbb{R}$
- Linéaire**

$$PV(0) = 0$$

$$PV(\underline{V}_1^* + \underline{V}_2^*) = PV(\underline{V}_1^*) + PV(\underline{V}_2^*)$$

$$PV(\lambda \underline{V}^*) = \lambda PV(\underline{V}^*)$$

Choix des formes linéaires définissant les efforts

Puissance virtuelle des efforts extérieurs, PVE

En général : forme linéaire des **vitesse généralisées** définie à l'aide

- d'une **densité** dans Ω_t
 - Forces de volume généralisées
- d'une **densité** dans $\partial\Omega_t$
 - Forces de surface généralisées

En général en mécanique, les efforts de volume sont des données

Choix des formes linéaires définissant les efforts

Puissance virtuelle des efforts d'accélération, *PVA*

En général : forme linéaire des **vitesse généralisées** définie à l'aide

□ d'une **densité** dans Ω_t

- Accélération
- Distribution des inerties d'accélération
(e.g., masses volumiques, inerties de rotation)

PVA est fonction des quantités d'accélération

Choix des formes linéaires définissant les efforts

Puissance virtuelle des efforts intérieurs, PVI

Beaucoup de liberté

- Condition de **cohérence** : les mouvements rigidifiants ne créent pas de puissance des efforts **intérieurs**

$$\forall \underline{V}_R^* \in \mathcal{C}_R^*, PVI(\underline{V}_R^*) = 0$$

$$\ker(PVI) \subset \mathcal{C}^* = \mathcal{C}_R^*$$

En général : forme linéaire des **vitesse généralisées** et de leurs gradients (liés à la déformation)

- Exemple : théorie au premier gradient
- **PVI fait apparaître des champs duaux** : les efforts intérieurs

Niveau 2 : Définition des efforts

- | Choix de l'espace vectoriel des mouvements virtuels
- | Choix des formes linéaires définissant les efforts
- | **Principe des puissances virtuelles**

Principe des puissances virtuelles

$$\forall \Omega_t, \forall \underline{V}^* \in \mathcal{C}^* \quad PVI(\underline{V}^*) + PVE(\underline{V}^*) = PVA(\underline{V}^*)$$

⇒ **Équations d'équilibre** du modèle

- Équations aux dérivées partielles sur les **efforts**
- **Conditions limites en efforts**

Plan de la séance

- 1| Modélisation en mécanique
- 2| Niveau 1 : Géométrie et cinématique
- 3| Niveau 2 : Définition des efforts
- 4| Niveau 3 : Thermodynamique et comportement

Niveau 3 : Thermodynamique et comportement

- | Premier principe de la thermodynamique
- | Second principe de la thermodynamique
- | Relations constitutives

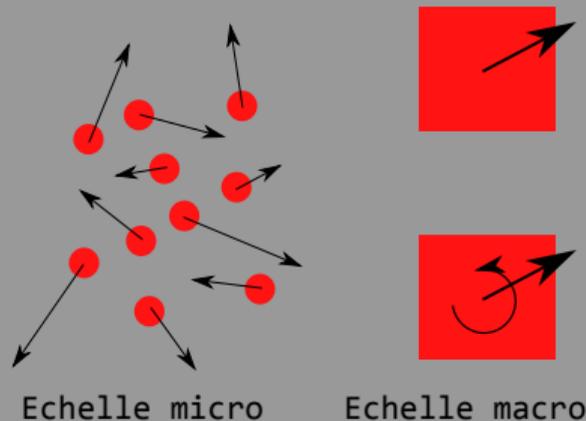
Premier principe de la thermodynamique

Thermodynamique : notions de puissance et d'énergie réelles

- Vitesse **généralisée** réelle $\underline{V} \in \mathcal{V}^*$
- Puissance réelle des **efforts extérieurs** : $P_{EXT} = PVE(\underline{V})$
- Puissance réelle des **efforts d'accélération** : $P_{ACC} = PVA(\underline{V})$
- Puissance réelle des **efforts intérieurs** : $P_{INT} = PVI(\underline{V})$

Premier principe de la thermodynamique

Qu'est-ce que l'énergie cinétique macroscopique



- Échelle **microscopique** : $\sum_{i=1}^N m_i \underline{V}_i^2$
- Échelle **macroscopique** : $m \underline{V}^2$ or $m \underline{V}^2 + I \dot{\theta}^2$
- Énergie cinétique **dépend de l'échelle**
- Échelle macroscopique : énergie **complémentaire** énergie interne

Premier principe de la thermodynamique

Choix fondamentaux (suite)

10) Densité massique d'énergie **cinétique**

- Expression **quadratique** des vitesses
- Expression **linéaire** des inerties cinétiques
- Matériaux à **microstructure** ou **multiparticulaires**
plusieurs choix sont possibles

- Inerties cinétiques intervient dans l'énergie cinétique
- Inerties d'accélération** intervient dans **PVA**

Si Inerties cinétiques = **Inerties d'accélération**

$$\dot{E}_C = PVA(\underline{V}) = P_{ACC}$$

Parfois Inerties cinétiques \neq **Inerties d'accélération**
(e.g., tortuosité des milieux poreux saturés)

Premier principe de la thermodynamique

□ **Postulat**

Il existe une énergie totale E_T attachée à la quantité de matière.

□ L'énergie **totale** comprend l'énergie **cinétique** E_C

□ On appelle énergie **interne** E_I la différence entre E_T et E_C :

$$E_T = E_C + E_I$$

□ **Postulat** : Premier principe de la thermodynamique

L'énergie totale se “*conserve*”.
La **production** d'énergie totale par les particules est **nulle**.

$$P_{E_T} = 0$$

Premier principe de la thermodynamique

- **Dérivée matérielle globale**

$$\dot{E}_T = A_{E_T} + \underbrace{P_{E_T}}_0$$

- L'apport extérieur A_{E_T} comprend la **puissance des efforts extérieurs dans le champ de vitesses réel**

$$P_{EXT} = PVE(\underline{V})$$

- La différence entre A_{E_T} et P_{EXT} est appelée **apport de chaleur Q**

$$A_{E_T} = P_{EXT} + Q$$

Niveau 3 : Thermodynamique et comportement

- | Premier principe de la thermodynamique
- | **Second principe de la thermodynamique**
- | Relations constitutives

Second principe de la thermodynamique

□ Postulat

Il existe une grandeur scalaire appelée **entropie** S .

Elle mesure le “*désordre*” du système de particules.

Nombre d'arrangements **microscopiques** possibles
correspondant à l'état **macroscopique**.

□ Bilan d'entropie

$$\dot{S} = A_S + P_S$$

□ A_S apport d'entropie

□ P_S production d'entropie

□ **Postulat** : Second principe de la thermodynamique

La production d'entropie est positive.

$$P_S \geq 0$$

Second principe de la thermodynamique

- Apport d'**entropie** A_S
- Apport de **chaleur** Q
- Agitation moléculaire** au niveau **microscopique**
- Pour le **même** apport de chaleur, l'augmentation du désordre sera **moins** si le matériau est déjà **chaud** et ses molécules très agitées.
- Postulat**

Il existe une température absolue $T(\underline{x}, t)$

telle que l'apport extérieur d'**entropie** est égal à l'apport de **chaleur** divisé par la **température absolue**.

Niveau 3 : Thermodynamique et comportement

- | Premier principe de la thermodynamique
- | Second principe de la thermodynamique
- | **Relations constitutives**

Relations constitutives

Trois type de champs

1) **Les observables** : les inconnues principales

- Température
- Déplacements
- Déformations

2) **Les données**

- Forces de volume
- ...

3) **Les grandeurs constitutives** : inconnues auxiliaires

- Densité massique d'énergie interne et d'entropie
- Efforts intérieurs
- Flux de chaleur
- Production d'entropie
- ...

Relations constitutives

On **postule** que les grandeurs constitutives sont fonctions des **histoires des observables**.

- **Relations constitutives**
- Observables utilisées pour décrire l'état : **variables d'état**

Les **relations constitutives** sont **sévèrement contraintes** par le principe d'**indifférence matérielle** et le **second principe** de la thermodynamique.