Mécanique Physique des Matériaux

Mécanique des Milieux Continus de Cauchy

École des Ponts

Daniel Weisz-Patrault

Objectifs généraux

Culture fondamentale

- ☐ Concepts de mécanique en grandes déformations
- ☐ Ecriture des comportements
- ☐ Théorie qui sous-tend le calcul numérique

Objectifs de la séance

- ☐ Dérouler la méthode générale dans un cas simple
- ☐ Concept de déformation
- ☐ Concept de contrainte
- ☐ Grandes transformations
- ☐ Présentation du modèle le plus courant
- ☐ Domaine de validité

Plan de la séance

1| Géométrie et cinématique

2| Définition des efforts

Plan de la séance

Géométrie et cinématique

- Description de la famille d'objets
- Description du mouvement et cinématique

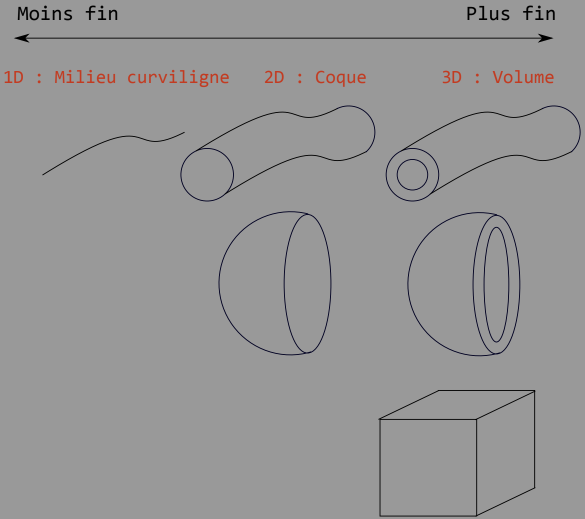
Description de la famille d’objets

Choix fondamentaux

1) Famille géométrique de l’objet
2) Nombre de particules de matériaux
3) Microstructure des particules
4) Liaisons internes

Description de la famille d'objets

Famille géométrique de l'objet



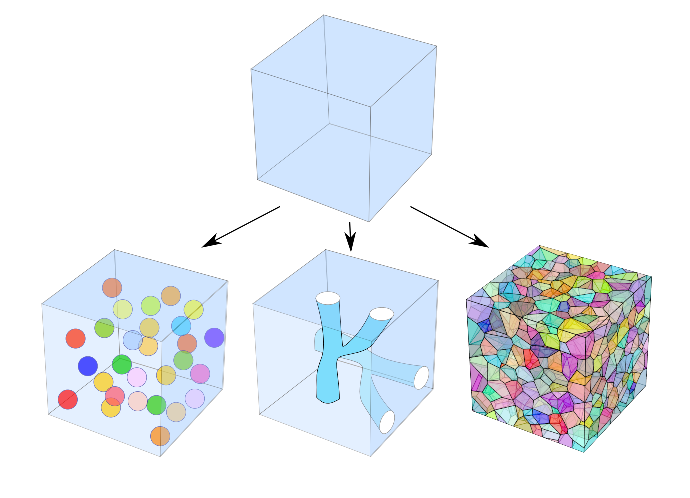
Description de la famille d'objets

Famille géométrique de l'objet

- ☐ Domaine mécanique ou objet : Ω_t
- ☐ Dimension
  - 3D : Volume
  - Modèle fin

Description de la famille d'objets

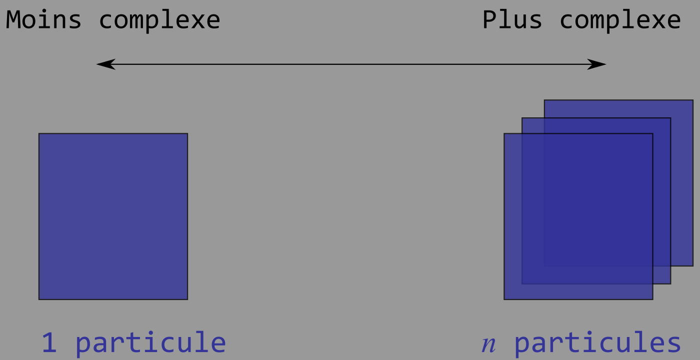
Que représente un point matériel ?



Description de la famille d'objets

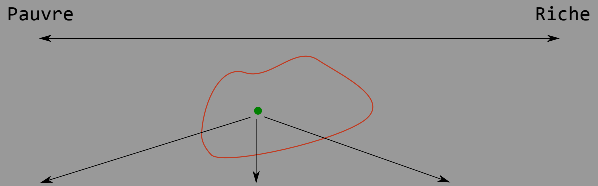
Nombre de particules de matériaux

- Nombre de particules : 1
- Modèle simple



Description de la famille d'objets

Microstructure des particules



Point

- Fil (1D, 1P)
- Membrane (2D, 1P)
- Milieu de Cauchy (3D, 1P)
- Milieu de Biot (sol) (3D, 2P)
- Béton (3D, 4P)

Objet rigide

- Poutre (1D, 1P orientée)
- Plaque (2D, 1P orientée)
- Composite (2D, nP orientées)
- Cosserat (3D, 1P orientée)

Objet déformable (plus rare)

- Poutre enrichie (1D, 1P orientée déformable)

- Microstructure des particules = Points non orientés
- La vitesse généralisée est un vecteur
- Modèle pauvre

Description de la famille d'objets

Liaisons internes

- ☐ Aucune
- ☐ Modèle libre

Description de la famille d'objets

Vitesse généralisées

1) Famille géométrique de l'objet : 3D (Fin)
2) Nombre de particules de matériaux : 1 (Simple)
3) Microstructure des particules : Point (Pauvre)
4) Liaisons internes : Aucune (Libre)

$\Rightarrow$ Définition d'un espace vectoriel des vitesses généralisées

Dans Ω_t (1er choix) on a 1 champs de vitesses (2ieme choix) vectorielles (3ieme choix)

Géométrie et cinématique

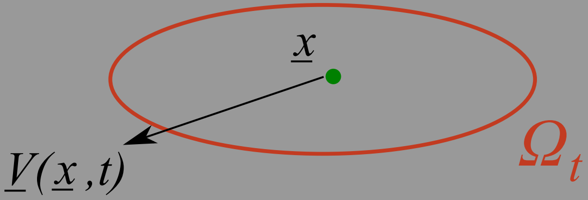
- Description de la famille d’objets
- Description du mouvement et cinématique

Description du mouvement et cinématique

Description Eulérienne

- A chaque instant t, on s'intéresse à

$$\underline{x} \in \Omega_t \mapsto \underline{V}(\underline{x}, t)$$



Description du mouvement et cinématique

Taux de variation de volume

- Volume

$$\Omega_t = \int_{\Omega_t} 1 \, d\Omega$$

$$\dot{\Omega}_t = \frac{d}{dt}\left[\int_{\Omega_t} 1 \, d\Omega\right] = \int_{\Omega_t} \underbrace{\frac{\partial 1}{\partial t}}_{0} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} \underline{V}(\underline{x}, t).\underline{n}(\underline{x}, t) \, dS$$

- Théorème de la divergence

$$\dot{\Omega}_t = \int_{\Omega_t} \mathtt{div}_{\underline{x}} \left[\underline{V}(\underline{x}, t)\right] d\Omega$$

- Valable $\forall \, \Omega_t \Rightarrow$

$$\boxed{\dot{\widehat{d\Omega_t}} = \mathtt{div}_{\underline{x}} \left[\underline{V}(\underline{x}, t)\right] d\Omega_t}$$

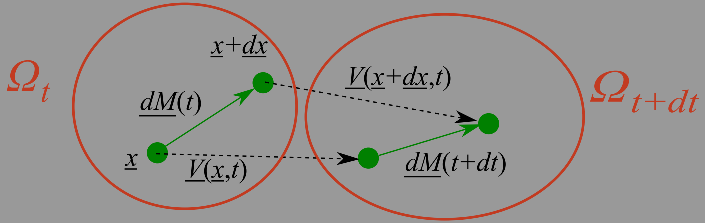
Description du mouvement et cinématique

Transport d'un vecteur matériel

Opérateur de taux du vecteur matériel

On considère 1 particule en $\underline{x}$ et n'importe quelle autre particule dans le voisinage en $\underline{x} + \underline{dx}$

$\underline{dM}$ représente l'ensemble des particules entre les 2 particules



Description du mouvement et cinématique

Transport d'un vecteur matériel

- A l'instant t elles sont aux positions

$$\underline{x} \quad \text{et} \quad \underline{x} + \underline{dx} \Rightarrow \underline{dM}(t) = \underline{dx}$$

- A l'instant $t + dt$ elles sont (au premier ordre) aux positions

$$\underline{x} + \underline{V}(\underline{x}, t)\,dt + o(\underline{dx}, dt)$$
$$\underline{x} + \underline{dx} + \underline{V}(\underline{x} + \underline{dx}, t)\,dt + o(\underline{dx}, dt)$$

$$\Rightarrow \underline{dM}(t + dt) = \underline{x} + \underline{dx} + \underline{V}(\underline{x} + \underline{dx}, t)\,dt - \underline{x} - \underline{V}(\underline{x}, t)\,dt$$

Description du mouvement et cinématique

Transport d'un vecteur matériel

- A l'instant t : $\underline{dM}(t) = \underline{dx}$
- A l'instant $t + dt$

$$\underline{dM}(t+dt) = \cancel{\underline{x}} + \underline{dx} + \underline{V}(\underline{x} + \underline{dx}, t)\, dt - \cancel{\underline{x}} - \underline{V}(\underline{x}, t)\, dt$$

- Variation

$$\begin{aligned} \underline{dM}(t+dt) - \underline{dM}(t) &= \left(\underline{V}(\underline{x} + \underline{dx}, t) - \underline{V}(\underline{x}, t)\right) dt \\ &= \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}} \left[\underline{V}(\underline{x}, t)\right] . \underline{dx}\, dt + o(\underline{dx}, dt) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\widehat{\underline{dM}}} &= \boxed{\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}} \left[\underline{V}(\underline{x}, t)\right] . \underline{dx}} \\ &= \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}} \left[\underline{V}(\underline{x}, t)\right]_{ij}\, dx_j = dx_j\, {}^{T}\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}} \left[\underline{V}(\underline{x}, t)\right]_{ji} \\ &= \boxed{\underline{dx} . {}^{T}\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}} \left[\underline{V}(\underline{x}, t)\right]} \end{aligned}}$$

Description du mouvement et cinématique

Transport d'un vecteur matériel

- ☐ Eloignement des particules
- ☐ Apparition du gradient de la vitesse
- ☐ Rotation de la matière
- ☐ Concept à modifier

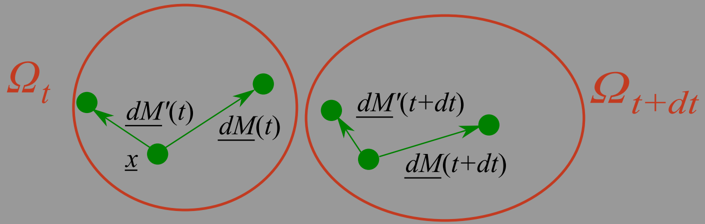
Description du mouvement et cinématique

Taux de déformation

Opérateur de variation du produit scalaire entre vecteurs matériels

On considère 1 particule en $\underline{x}$ et n'importe quelle couple de particules dans le voisinage

$$\underline{dM} \text{ et } \underline{dM'}$$



Description du mouvement et cinématique

Taux de déformation

- Variation de la métrique de la matière
- Produit scalaire des vecteurs matériels
- Dérivée est une forme bilinéaire des vecteurs matériels

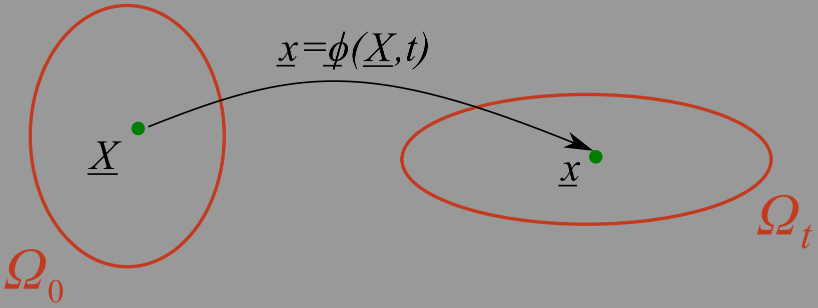
$$\begin{aligned}\dot{\overbrace{\underline{dM}.\underline{dM'}}} &= \underline{dM}.\dot{\overbrace{\underline{dM'}}} + \dot{\overbrace{\underline{dM}}}.\underline{dM'} \\ &= \underline{dM}.\left[\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}}\left[\underline{V}(\underline{x},t)\right] + {}^T\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}}\left[\underline{V}(\underline{x},t)\right]\right].\underline{dM'}\end{aligned}$$

- Définition du taux de déformation

$$\boxed{\underline{\underline{d}}(\underline{x},t) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}}\left[\underline{V}(\underline{x},t)\right] + {}^T\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}}\left[\underline{V}(\underline{x},t)\right]\right)}$$

Description du mouvement et cinématique

Description Lagrangienne



- ☐ $\underline{X}$ est la matricule de la particule
- ☐ $\underline{x}$ est la position de la particule à l'instant t
- ☐ $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$ est la transformation

Description du mouvement et cinématique

Variation de volume

- ☐ Volume

$$\Omega_t = \int_{\Omega_t} d\Omega$$

- ☐ Changement de variable $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$

$$d\Omega = \underbrace{\det\left[\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{X}}\left[\underline{\phi}(\underline{X}, t)\right]\right]}_{J(\underline{X},t)} d\Omega_0$$

- ☐ D’où

$$\Omega_t = \int_{\Omega_0} J(\underline{X}, t)\, d\Omega_0$$

- ☐ Variation de volume

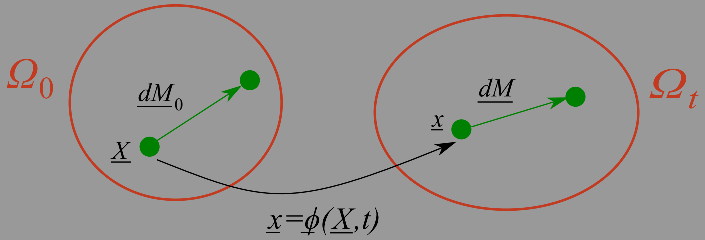
$$\boxed{d\Omega = J(\underline{X}, t)\, d\Omega_0}$$

Transport d'un vecteur matériel

Opérateur de transport du vecteur matériel

On considère 1 particule en $\underline{x}$ à l'instant t et n'importe quelle autre particule dans le voisinage en $\underline{x} + \underline{dx}$ à l'instant t

- $\underline{dM}$: ensemble des particules entre les 2 particules dans Ω_t
- $\underline{dM}_0$: ensemble des particules entre les 2 particules dans Ω_0



Description du mouvement et cinématique

Transport d'un vecteur matériel

- ☐ Transformation

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$$

- ☐ Définition du gradient

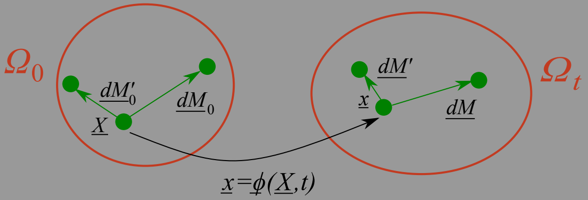
$$\underline{dM} = \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{X}} \left[\underline{\phi}(\underline{X}, t)\right] . \underline{dM_0}$$

- ☐ D'où

$$\underline{dM} = \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t).\underline{dM_0} = \underline{dM_0}.\,{}^T\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$$

Description du mouvement et cinématique

Déformation



☐ Concept lié à l'évolution de la métrique de la matière

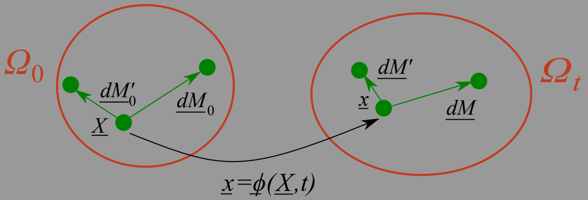
$$\underline{dM}.\underline{dM}' = \underline{dM}_0.\,{}^T\underline{\underline{F}}(\underline{X},t).\underline{\underline{F}}(\underline{X},t).\underline{dM}'_0$$

☐ Tenseur de dilatation de Cauchy

$$\boxed{\underline{\underline{C}}(\underline{X},t) = {}^T\underline{\underline{F}}(\underline{X},t).\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)}$$

Description du mouvement et cinématique

Déformation



- ☐ Tenseur de dilatation de Cauchy $\underline{\underline{C}}(\underline{X},t) = {}^T\underline{\underline{F}}(\underline{X},t).\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$
- ☐ Déformation de Green-Lagrange

$$\boxed{\underline{\underline{e}}(\underline{X},t) = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{C}}(\underline{X},t) - \underline{\underline{1}}\right]}$$

Description du mouvement et cinématique

Déplacement

- ☐ Déplacement $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) = \underline{X} + \underline{u}(\underline{X}, t) \Leftrightarrow \boxed{\underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{\phi}(\underline{X}, t) - \underline{X}}$
- ☐ Gradient de la transformation

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{X}} \left[\underline{u}(\underline{X}, t)\right] + \underline{\underline{1}}$$

- ☐ Déformation de Green-Lagrange

$$\underline{\underline{e}}(\underline{X}, t) = \frac{1}{2}\left[\,{}^{T}\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}\right] = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{X}}\underline{u} + {}^{T}\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{X}}\underline{u} + {}^{T}\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{X}}\underline{u}.\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{X}}\underline{u}\right]$$

- ☐ Déformation linéarisée

$$\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X}, t) = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{X}}\underline{u} + {}^{T}\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{X}}\underline{u}\right]}$$

Description du mouvement et cinématique

Lien Lagrangien / Eulérien

- ☐ Transformation et vitesse $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \Rightarrow \boxed{\underline{V}(\underline{x}, t) = \frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t}(\underline{X}, t)}$
- ☐ Variation de volume (Lagrangien)

$$d\Omega_t = J(\underline{X}, t)\, d\Omega_0 \Rightarrow \boxed{\dot{\widehat{d\Omega_t}} = \dot{J}(\underline{X}, t)\, d\Omega_0}$$

- ☐ Taux de variation de volume (Eulérien)

$$\dot{\widehat{d\Omega_t}} = \mathtt{div}_{\underline{x}} \left[\underline{V}(\underline{x}, t)\right] d\Omega_t = \boxed{\mathtt{div}_{\underline{x}} \left[\underline{V}(\underline{x}, t)\right] J d\Omega_0}$$

$$\boxed{\mathtt{div}_{\underline{x}} \left[\underline{V}(\underline{x}, t)\right] = \dot{J}(\underline{X}, t)\, J^{-1}(\underline{X}, t)}$$

Description du mouvement et cinématique

Lien Lagrangien / Eulérien

- Vecteur matériel (Lagrangien)

$$\underline{dM} = \underline{\underline{F}}.\underline{dM}_0 \Rightarrow \boxed{\dot{\widehat{\underline{dM}}} = \underline{\underline{\dot{F}}}.\underline{dM}_0}$$

- Taux de vecteur matériel (Eulérien)

$$\dot{\widehat{\underline{dM}}} = \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}}\left[\underline{V}\right].\underline{dM} = \boxed{\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}}\left[\underline{V}\right].\underline{\underline{F}}.\underline{dM}_0}$$

- D'où

$$\boxed{\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}}\left[\underline{V}\right] = \underline{\underline{\dot{F}}}.\underline{\underline{F}}^{-1}}$$

Description du mouvement et cinématique

Lien Lagrangien / Eulérien

- Métrique matérielle (Lagrangien)

$$\underline{dM}.\underline{dM'} = \underline{dM_0}.\underline{\underline{C}}.\underline{dM'_0} \Rightarrow \boxed{\dot{\overbrace{\underline{dM}.\underline{dM'}}} = \underline{dM_0}.\dot{\underline{\underline{C}}}.\underline{dM'_0}}$$

- Taux de métrique matérielle (Eulérien)

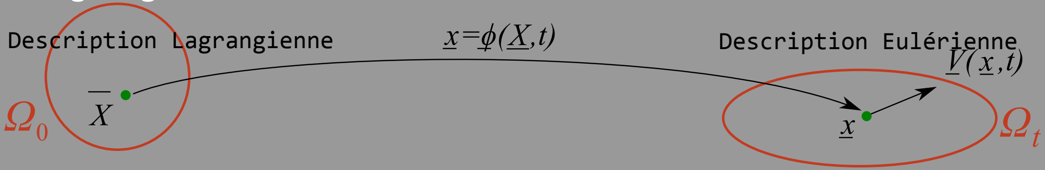
$$\dot{\overbrace{\underline{dM}.\underline{dM'}}} = 2\,\underline{dM}\,.\,\underline{\underline{d}}\,.\,\underline{dM'} = \boxed{2\,\underline{dM_0}\,.\,{}^T\underline{\underline{F}}\,.\,\underline{\underline{d}}\,.\,\underline{\underline{F}}\,.\,\underline{dM'_0}}$$

- Or $\dot{\underline{\underline{C}}} = 2\dot{\underline{\underline{e}}}$ d'où :

$$\boxed{\underline{\underline{d}} = {}^T\underline{\underline{F}}^{-1}\,.\,\dot{\underline{\underline{e}}}\,.\,\underline{\underline{F}}^{-1}}$$

Description du mouvement et cinématique

Lien Lagrangien / Eulérien



- ☐ $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{X}} \underline{\phi}$
- ☐ $\underline{dM} = \underline{\underline{F}}.\underline{dM}_0$
- ☐ $J = \text{det}\left[\underline{\underline{F}}\right]$
- ☐ $d\Omega_t = J d\Omega_0$
- ☐ $\underline{\underline{C}} = {}^T\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}}$

$$\boxed{\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{1}}\right]}$$

- ☐ $\underline{V} = \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t}$
- ☐ $\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}} \underline{V} = \dot{\underline{\underline{F}}}.\underline{\underline{F}}^{-1}$
- ☐ $\text{div}_{\underline{x}} \underline{V} = \dot{J} J^{-1}$

$$\boxed{\underline{\underline{d}} = {}^T\underline{\underline{F}}^{-1}.\dot{\underline{\underline{e}}}.\underline{\underline{F}}^{-1}}$$

- ☐ $\underline{V}$
- ☐ $\dot{\widehat{\underline{dM}}} = \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}} \underline{V}.\underline{dM}$
- ☐ $\dot{\widehat{d\Omega_t}} = \text{div}_{\underline{x}} \underline{V}\, d\Omega_t$

$$\boxed{\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}} \underline{V} + {}^T\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}} \underline{V}\right]}$$

Plan de la séance

1| Géométrie et cinématique

2| Définition des efforts

Définition des efforts

- Choix de l’espace vectoriel des mouvements virtuels
- Choix des formes linéaires définissant les efforts
- Principe des puissances virtuelles

Choix de l'espace vectoriel des mouvements virtuels

Choix fondamentaux (suite)

5) Espace vectoriel des mouvements virtuels

$$\mathcal{V}^* = \left\{ \underline{V}^* : \underline{x} \in \Omega_t \mapsto \underline{V}^*(\underline{x}), \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux} \right\}$$

6) Espace vectoriel des mouvements rigidifiants

$$\mathcal{V}_R^* = \left\{ \underline{x} \in \Omega_t \mapsto \underline{V}_T^* + \underline{\underline{\omega}}.\underline{x}, \, \forall \underline{V}_T \in \mathbb{R}^3 \, / \, \forall \underline{\underline{\omega}} \in \mathcal{M}_3^{as} \right\}$$

Définition des efforts

- Choix de l’espace vectoriel des mouvements virtuels
- Choix des formes linéaires définissant les efforts
- Principe des puissances virtuelles

Choix des formes linéaires définissant les efforts

Choix fondamentaux (suite)

7) Puissance virtuelle des efforts extérieurs, PVE
8) Puissance virtuelle des efforts d'accélération, PVA
9) Puissance virtuelle des efforts intérieurs, PVI

Puissances : formes linéaires de la vitesse virtuelle

Choix des formes linéaires définissant les efforts

Puissance virtuelle des efforts extérieurs, PVE

$$\boxed{PVE(\underline{V}^*) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t)\underline{f}_m(\underline{x}, t).\underline{V}^*(\underline{x})\, d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} \underline{T}(\underline{x}, t).\underline{V}^*(\underline{x})\, dS}$$

- $\underline{f}_m$: forces massique
- $\underline{f} = \rho\, \underline{f}_m$: forces de volume
- $\underline{T}$: forces de surface

Choix des formes linéaires définissant les efforts

Puissance virtuelle des efforts d'accélération, PVA

$$\boxed{PVA(\underline{V}^*) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t)\underline{\gamma}(\underline{x}, t).\underline{V}^*(\underline{x})\, d\Omega}$$

- $\underline{\gamma}$: accélération réelle de la particule qui se trouve en $\underline{x}$ à l'instant t

$$\underline{\gamma}(\underline{x}, t) = \frac{d\underline{V}}{dt}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}} \left[\underline{V}(\underline{x}, t)\right] .\underline{V}(\underline{x}, t) + \frac{\partial \underline{V}(\underline{x}, t)}{\partial t}$$

Choix des formes linéaires définissant les efforts

Puissance virtuelle des efforts intérieurs, PVI

$$\boxed{PVI(\underline{V}^*) = \int_{\Omega_t} \left(\underline{A}(\underline{x}, t).\underline{V}^*(\underline{x}) - \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}} \left[\underline{V}^*(\underline{x}) \right] \right) d\Omega}$$

- ☐ $\underline{\underline{\sigma}}$: tenseur de contrainte de Cauchy
- ☐ Théorie au premier gradient

Choix des formes linéaires définissant les efforts

- Condition de cohérence

$$\boxed{\text{La puissance intérieure d'un mouvement rigide est nulle}}$$

$$\forall \underline{V}_T \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \underline{\underline{\omega}} \in \mathcal{M}_3^{as} \quad / \quad PVI(\underline{V}_T + \underline{\underline{\omega}}.\underline{x}) = 0$$

- D'où

$$\forall \underline{V}_T \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \underline{\underline{\omega}} \in \mathcal{M}_3^{as}$$

$$\int_{\Omega_t} \left(\underline{A}. \left(\underline{V}_T + \underline{\underline{\omega}}.\underline{x} \right) - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\omega}} \right) d\Omega = 0$$

- D'où

$$\underline{A} = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\omega}} = 0$$

- Tenseur anti-symmétrique/symétrique

$$\boxed{\underline{A} = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{M}_3^{s}}$$

Choix des formes linéaires définissant les efforts

Puissance virtuelle des efforts intérieurs, PVI

$$\boxed{PVI(\underline{V}^*) = -\int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) : \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}} \left[\underline{V}^*(\underline{x})\right] d\Omega}$$

$$\begin{aligned}
\mathtt{div}_{\underline{x}}\left[\underline{\underline{\sigma}}.\underline{V}^*\right] &= \frac{\partial\left(\sigma_{ij} V_j^*\right)}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} V_j^* + \sigma_{ij} \frac{\partial V_j^*}{\partial x_i} \\
&= \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_i} V_j^* + \sigma_{ij} \frac{\partial V_j^*}{\partial x_i} \\
&= \mathtt{div}_{\underline{x}}\left[\underline{\underline{\sigma}}\right].\underline{V}^* + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}} \underline{V}^*
\end{aligned}$$

$$PVI(\underline{V}^*) = \int_{\Omega_t} \left(\mathtt{div}_{\underline{x}}\left[\underline{\underline{\sigma}}\right].\underline{V}^* - \mathtt{div}_{\underline{x}}\left[\underline{\underline{\sigma}}.\underline{V}^*\right]\right) d\Omega$$

- Théorème de la divergence

$$\boxed{PVI(\underline{V}^*) = \int_{\Omega_t} \mathtt{div}_{\underline{x}}\left[\underline{\underline{\sigma}}\right].\underline{V}^*(\underline{x})\, d\Omega - \int_{\partial\Omega_t} \left(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t).\underline{n}(\underline{x},t)\right).\underline{V}^*(\underline{x})\, dS}$$

Définition des efforts

- Choix de l’espace vectoriel des mouvements virtuels
- Choix des formes linéaires définissant les efforts
- Principe des puissances virtuelles

Principe des puissances virtuelles

$$\boxed{\forall \Omega_t, \forall \underline{V}^* \in \mathcal{V}^* \quad PVI(\underline{V}^*) + PVE(\underline{V}^*) = PVA(\underline{V}^*)}$$

$\Rightarrow$ Equations d'équilibre du modèle

- ☐ Equations aux dérivées partielles sur les efforts
- ☐ Conditions limites en efforts

$$\forall \underline{V}^* \in \mathcal{V}^*$$

$$\boxed{\int_{\Omega_t} \left(\mathtt{div}_{\underline{x}} \left[\underline{\underline{\sigma}} \right] + \rho \underline{f}_m - \rho \underline{\gamma} \right) . \underline{V}^* \, d\Omega + \int_{\partial \Omega_t} \left(\underline{T} - \underline{\underline{\sigma}} . \underline{n} \right) . \underline{V}^* \, dS = 0}$$

- ☐ Equations fortes du problème

$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall \, \underline{x} \in \Omega_t & \mathtt{div}_{\underline{x}} \left[\underline{\underline{\sigma}} \right] + \rho \underline{f}_m = \rho \underline{\gamma} \\ \forall \, \underline{x} \in \partial \Omega_t & \underline{\underline{\sigma}} . \underline{n} = \underline{T} \end{array}}$$

Principe des puissances virtuelles

Transport de la contrainte dans la configuration de référence

- ☐ $\underline{V}$: champ de vitesse réel
- ☐ Puissance de déformation : $P_{DEF} = -P_{INT} = -PVI(\underline{V})$

$$\boxed{P_{DEF} = \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}} \left[\underline{V}(\underline{x}, t) \right] d\Omega = \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) \, d\Omega}$$

- ☐ Rappel $\underline{\underline{d}} = {}^T\underline{\underline{F}}^{-1} . \underline{\underline{\dot{e}}} . \underline{\underline{F}}^{-1}$
- ☐ Changement de variable $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$

$$\boxed{P_{DEF} = \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \left({}^T\underline{\underline{F}}^{-1} . \underline{\underline{\dot{e}}} . \underline{\underline{F}}^{-1} \right) J d\Omega_0}$$

Principe des puissances virtuelles

Transport de la contrainte dans la configuration de référence

- Puissance de déformation

$$P_{DEF} = \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \left({}^T\underline{\underline{F}}^{-1} . \dot{\underline{\underline{e}}} . \underline{\underline{F}}^{-1} \right) J d\Omega_0$$

- Calculs tr $\left[\underline{\underline{A}}.\underline{\underline{B}}\right] =$ tr $\left[\underline{\underline{B}}.\underline{\underline{A}}\right]$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \left({}^T\underline{\underline{F}}^{-1} . \dot{\underline{\underline{e}}} . \underline{\underline{F}}^{-1} \right) &= \mathrm{tr} \left[\underline{\underline{\sigma}} . {}^T\underline{\underline{F}}^{-1} . \dot{\underline{\underline{e}}} . \underline{\underline{F}}^{-1} \right] \\ &= \mathrm{tr} \left[\underline{\underline{F}}^{-1} . \underline{\underline{\sigma}} . {}^T\underline{\underline{F}}^{-1} . \dot{\underline{\underline{e}}} \right] \\ &= \boxed{ \left(\underline{\underline{F}}^{-1} . \underline{\underline{\sigma}} . {}^T\underline{\underline{F}}^{-1} \right) : \dot{\underline{\underline{e}}} } \end{aligned}$$

Principe des puissances virtuelles

Transport de la contrainte dans la configuration de référence

- Puissance de déformation

$$P_{DEF} = \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \left({}^T\underline{\underline{F}}^{-1} . \underline{\underline{\dot{e}}} . \underline{\underline{F}}^{-1} \right) J d\Omega_0$$

- On pose

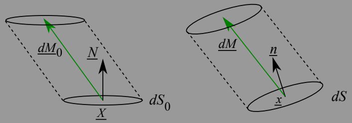
$$P_{DEF} = \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\Pi}} : \underline{\underline{\dot{e}}} d\Omega_0$$

- Contrainte de Piola-Kirchoff

$$\boxed{\underline{\underline{\Pi}} = J \left(\underline{\underline{F}}^{-1} . \underline{\underline{\sigma}} . {}^T\underline{\underline{F}}^{-1} \right)}$$

Principe des puissances virtuelles

Transport des forces



- ☐ $\underline{n}dS$: Element de surface dans la configuration actuelle
- ☐ $\underline{N}dS_0$: Element de surface dans la configuration de référence
- ☐ $\underline{df}$: Force élémentaire dans la configuration actuelle

$$\underline{df} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t).\underline{n}(\underline{x}, t)\, dS = \underline{\underline{B}}(\underline{X}, t).\underline{N}(\underline{X}, t)\, dS_0$$

- ☐ $\underline{\underline{B}}$: Tenseur de contrainte de Boussinesq (à déterminer)
- ☐ Volume élémentaire dans la configuration de référence

$$\boxed{\underline{dM}_0.\underline{N}dS_0}$$

Principe des puissances virtuelles

Transport des forces

- Après transformation

$$\boxed{\underline{N}dS_0 \rightarrow \underline{n}dS} \quad \boxed{\underline{dM}_0 \rightarrow \underline{dM} = \underline{dM}_0.\,{}^T\underline{\underline{F}}}$$

- Variation de volume

$$\boxed{\underline{dM}.\underline{n}dS = J\underline{dM}_0.\underline{N}dS_0}$$

- D'où :

$$\forall \underline{dM}, \quad \underline{dM}.\underline{n}dS = J\underline{dM}.\ {}^T\underline{\underline{F}}^{-1}.\underline{N}dS_0$$

- D'où :

$$\boxed{\underline{n}dS = J\ {}^T\underline{\underline{F}}^{-1}.\underline{N}dS_0}$$

Principe des puissances virtuelles

Transport des forces

- Force élémentaire dans la configuration actuelle

$$\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}dS = \underline{\underline{B}}.\underline{N}dS_0$$

- On a montré que $\underline{n}dS = J\ {}^T\underline{\underline{F}}^{-1}.\underline{N}dS_0$
- D'où : $J\underline{\underline{\sigma}}.\ {}^T\underline{\underline{F}}^{-1}.\underline{N}dS_0 = \underline{\underline{B}}.\underline{N}dS_0$
- Tenseur de contraintes de Boussinesq

$$\boxed{\underline{\underline{B}} = J\underline{\underline{\sigma}}.\ {}^T\underline{\underline{F}}^{-1}}\ \text{(non symétrique)}$$

- Relation avec le tenseur de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{\Pi}} = J\left(\underline{\underline{F}}^{-1}.\underline{\underline{\sigma}}.\ {}^T\underline{\underline{F}}^{-1}\right)$

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}}.\underline{\underline{\Pi}}$$

Principe des puissances virtuelles

Transport des forces

- Force élémentaire dans la configuration actuelle

$$\underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}dS = \underline{\underline{B}}.\underline{N}dS_0$$

- Equations d'équilibre et conditions aux limites

$$\begin{array}{ll} \forall \underline{x} \in \Omega_t & \mathtt{div}_{\underline{x}}\left[\underline{\underline{\sigma}}\right] + \rho \underline{f}_m = \rho \underline{\gamma} \\ \forall \underline{x} \in \partial\Omega_t & \underline{\underline{\sigma}}.\underline{n} = \underline{T} \end{array}$$

- D'où $\int_{\Omega_t} \left(\mathtt{div}_{\underline{x}}\left[\underline{\underline{\sigma}}\right] + \rho(\underline{f}_m - \underline{\gamma})\right) d\Omega = 0$
- Théorème de la divergence

$$\int_{\partial\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}dS + \int_{\Omega_t} \rho(\underline{f}_m - \underline{\gamma}) d\Omega = 0$$

Principe des puissances virtuelles

Transport des forces

- Force élémentaire dans la configuration actuelle

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t).\underline{n}(\underline{x},t)\,dS = \underline{\underline{B}}(\underline{X},t).\underline{N}(\underline{X},t)\,dS_0$$

- On a : $\int_{\partial\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}}.\underline{n}dS + \int_{\Omega_t} \rho(\underline{f}_m - \underline{\gamma})\,d\Omega = 0$
- Changement de variable $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X},t)$

$$\int_{\partial\Omega_0} \underline{\underline{B}}.\underline{N}dS_0 + \int_{\Omega_0} J\rho(\underline{f}_m - \underline{\gamma})\,d\Omega_0 = 0$$

- Masse volumique dans la configuration de référence $\rho_0 = J\rho$

$$\int_{\partial\Omega_0} \underline{\underline{B}}.\underline{N}dS_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{f}_m - \underline{\gamma})\,d\Omega_0 = 0$$

Principe des puissances virtuelles

Transport des forces

- On a montré

$$\int_{\partial\Omega_0} \underline{\underline{B}}.\underline{N} dS_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 (\underline{f}_m - \underline{\gamma})\, d\Omega_0 = 0$$

- Théorème de la divergence

$$\forall\, \Omega_0,\ \int_{\Omega_0} \left(\mathtt{div}_{\underline{X}} \left[\underline{\underline{B}}\right] + \rho_0 (\underline{f}_m - \underline{\gamma})\right) d\Omega_0 = 0$$

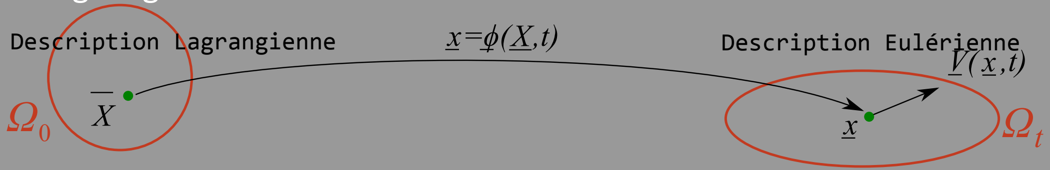
- Equation d'équilibre locale

$$\forall\, \underline{X} \in \Omega_0,$$

$$\boxed{\mathtt{div}_{\underline{X}} \left[\underline{\underline{B}}(\underline{X}, t)\right] + \rho_0(\underline{X}) \left[\underline{f}_m(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t) - \underline{\gamma}(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t)\right] = 0}$$

Principe des puissances virtuelles

Lien Lagrangien / Eulérien



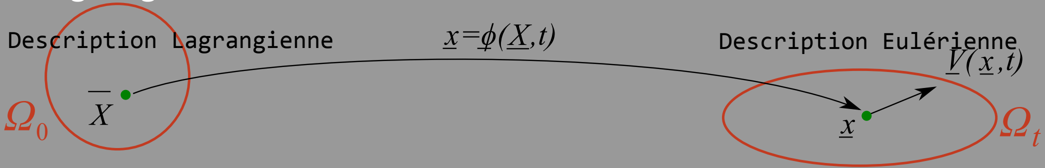
$$\boxed{\underline{\underline{\Pi}} = J\left(\underline{\underline{F}}^{-1}.\underline{\underline{\sigma}}.\,{}^T\underline{\underline{F}}^{-1}\right)}$$

$$\boxed{\underline{\underline{B}} = J\underline{\underline{\sigma}}.\,{}^T\underline{\underline{F}}^{-1}}$$

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}}}$$

Principe des puissances virtuelles

Lien Lagrangien / Eulérien



- $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{X}}\underline{\phi}$
- $\underline{dM} = \underline{\underline{F}}.\underline{dM_0}$
- $J = \det\left[\underline{\underline{F}}\right]$
- $d\Omega_t = J d\Omega_0$
- $\underline{\underline{C}} = {}^T\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}}$

$$\boxed{\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{1}}\right]}$$

- $\underline{V} = \dfrac{\partial \underline{\phi}}{\partial t}$
- $\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}}\underline{V} = \dot{\underline{\underline{F}}}.\underline{\underline{F}}^{-1}$
- $\text{div}_{\underline{x}}\underline{V} = \dot{J}J^{-1}$

$$\boxed{\underline{\underline{d}} = {}^T\underline{\underline{F}}^{-1}.\dot{\underline{\underline{e}}}.\underline{\underline{F}}^{-1}}$$

- $\underline{V}$
- $\dot{\widehat{\underline{dM}}} = \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}}\underline{V}.\underline{dM}$
- $\dot{\widehat{d\Omega_t}} = \text{div}_{\underline{x}}\underline{V}\, d\Omega_t$

$$\boxed{\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}}\underline{V} + {}^T\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}}\underline{V}\right]}$$