

Devoir sur le comportement des élastomères :

Gonflement d'un ballon sphérique à paroi mince incompressible

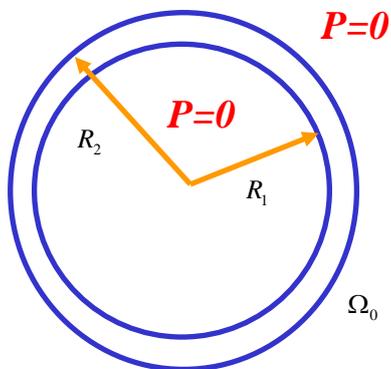
Dans ce devoir facultatif, nous allons étudier le gonflement d'un ballon sphérique dont le matériau est hyperélastique.

Dans la figure ci-dessous sont données les principales notations.
La pression extérieure reste égale à la pression atmosphérique.

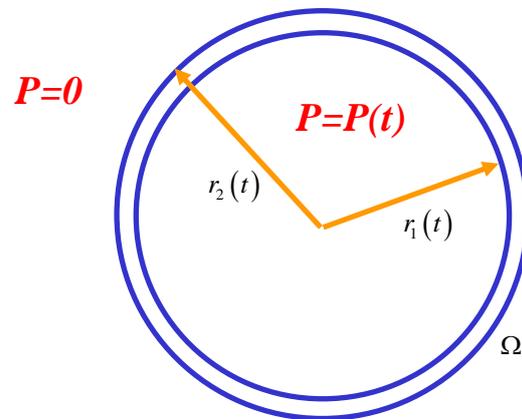
$P(t)$ est la différence de pression à l'intérieur du ballon, par rapport à la pression atmosphérique (dont la valeur n'intervient pas dans cet exercice).

A l'instant initial la pression intérieure est égale à la pression atmosphérique, ainsi $P(0) = 0$.

On prend cette configuration initiale comme configuration de référence.
Elle est dans un état naturel (sans contrainte).



Configuration de référence



Configuration actuelle

On note R_1 le rayon initial intérieur, R_2 le rayon initial extérieur, $r_1(t)$ le rayon intérieur dans la configuration actuelle à l'instant t , $r_2(t)$ le rayon extérieur dans la configuration actuelle à l'instant t .

$\lambda(t) = \frac{r_1(t)}{R_1}$ est appelé élongation principale de la matière. La suite dira pourquoi.

Le but du devoir est de proposer une modélisation qui permette de déterminer une relation entre $P(t)$ et $\lambda(t)$.

Nous verrons qu'il sera commode de l'exprimer sous la forme $P(\lambda)$ (plutôt que $\lambda(P)$)

Hypothèses de modélisation

Plusieurs choix de modélisation sont possibles avec des hypothèses simplificatrices plus ou moins fortes.

Le premier choix concerne la compressibilité de l'élastomère.

A titre d'exercice complémentaire facultatif à la maison, vous pouvez écrire les équations du problème dans le cas d'une prise en compte de la compressibilité du matériau. Cela donne des équations dont il est difficile de tirer une solution analytique. Comme nous sommes à peu près synchronisés avec le cours ABAQUS, vous pouvez chercher la solution sous la forme $P(\lambda)$ à l'aide d'une modélisation ABAQUS.

Dans ce bureau d'étude pour simplifier notre travail nous ferons l'hypothèse que le comportement du matériau peut être approché par un modèle de **matériau homogène hyperélastique incompressible isotrope**.

De plus nous ferons l'hypothèse que le processus de déformation peut être approché par un processus **isotherme**.

Nous savons qu'alors le comportement est déterminé (à la partie sphérique du tenseur de contrainte de Cauchy près) par la densité massique d'énergie libre du matériau $\Psi(I_1, I_2)$ où $I_1 = \text{tr}(\underline{\underline{C}})$ et $I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{tr}(\underline{\underline{C}}.\underline{\underline{C}}))$.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho_0 \left[\left(2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + 2 I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \right] + c \underline{\underline{I}} \text{ avec } c \text{ quelconque.}$$

La deuxième hypothèse simplificatrice est en relation avec l'épaisseur de la paroi du ballon

Si cette épaisseur est faible devant le rayon intérieure, c'est-à-dire si

$R_2 - R_1 = E \ll R_1$, $r_2(t) - r_1(t) = e(t) \ll r_1(t)$, les principales composantes (en coordonnées sphériques) du champ de contrainte de Cauchy vont pouvoir être approximées par des valeurs uniformes dans l'épaisseur. Nous appellerons cette hypothèse « Hypothèse de paroi mince ».

Gonflement d'un ballon à paroi mince constituée d'un matériau hyperélastique incompressible isotrope

A/ Approximation du champ de contrainte de Cauchy par l'équilibre

Nous allons travailler en coordonnées sphériques (r, θ, φ) dans la configuration actuelle.

Localement la base sera $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi)_{(\theta, \varphi)}$

Un champ de contrainte de Cauchy très général s'écrit

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}(r, \theta, \varphi) = & \sigma_{rr}(r, \theta, \varphi) \underline{e}_r(\theta, \varphi) \otimes \underline{e}_r(\theta, \varphi) + \sigma_{\theta\theta}(r, \theta, \varphi) \underline{e}_\theta(\theta, \varphi) \otimes \underline{e}_\theta(\theta, \varphi) + \sigma_{\varphi\varphi}(r, \theta, \varphi) \underline{e}_\varphi(\theta, \varphi) \otimes \underline{e}_\varphi(\theta, \varphi) \\ & + \sigma_{r\theta}(r, \theta, \varphi) [\underline{e}_r(\theta, \varphi) \otimes \underline{e}_\theta(\theta, \varphi) + \underline{e}_\theta(\theta, \varphi) \otimes \underline{e}_r(\theta, \varphi)] \\ & + \sigma_{r\varphi}(r, \theta, \varphi) [\underline{e}_r(\theta, \varphi) \otimes \underline{e}_\varphi(\theta, \varphi) + \underline{e}_\varphi(\theta, \varphi) \otimes \underline{e}_r(\theta, \varphi)] \\ & + \sigma_{\theta\varphi}(r, \theta, \varphi) [\underline{e}_\theta(\theta, \varphi) \otimes \underline{e}_\varphi(\theta, \varphi) + \underline{e}_\varphi(\theta, \varphi) \otimes \underline{e}_\theta(\theta, \varphi)] \end{aligned}$$

Que nous écrivons aussi sous forme abrégée

$$\underline{\underline{\sigma}}(r, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{r\varphi} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta\varphi} \\ \sigma_{r\varphi} & \sigma_{\theta\varphi} & \sigma_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}_{(r, \theta, \varphi)}$$

Nous faisons l'hypothèse que, dans notre problème, ce champ est à symétrie sphérique.

Question 1 :

Donner les conséquences de cette hypothèse sur les composantes de $\underline{\underline{\sigma}}(r, \theta, \varphi)$.

(Il ne reste plus que 3 composantes non nulles dont deux indépendantes ne dépendant que d'une variable d'espace.

Question 2 :

Dans l'hypothèse de paroi mince, $\sigma_{\theta\theta}(r)$ peut être approximée par une constante que nous noterons $\sigma_{\theta\theta}$.

A l'aide de l'équilibre d'un demi ballon dans la configuration actuelle **donner** une expression approchée

simple de $\sigma_{\theta\theta}$ en fonction de P, r_1, e (négligez les termes en $\left(\frac{e}{r_1}\right)^2$ par rapport à ceux en $\left(\frac{e}{r_1}\right)$ dans vos

calculs).

Question 3 :

A l'aide des conditions aux limites sur la paroi, à l'intérieur et à l'extérieur du ballon, **donner** les valeurs de $\sigma_{rr}(r_1)$ et $\sigma_{rr}(r_2)$ en fonction de la pression atmosphérique notée P_{atm} et de P .

On suppose que P est de l'ordre de P_{atm} . En déduire que, $\forall r$, $\sigma_{rr}(r)$ est négligeable devant $\sigma_{\theta\theta}$.

En conclusion de cette analyse approchée, nous avons une approximation du champ de contrainte

de Cauchy sous la forme $\underline{\underline{\sigma}}(r, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix}$ **où $\sigma_{\theta\theta}$ est donné en fonction de P, r_1, e**

Remarque :

Une analyse dimensionnelle sommaire permet de dire que $\frac{\sigma_{\theta\theta}}{P} = f\left(\frac{r_1}{e}\right)$.

La question 2 donne la fonction $f\left(\frac{r_1}{e}\right)$. **Elle est très simple.**

B/ Approximation du gradient de la transformation

Rappelons que nous avons noté $\lambda = \frac{r_1}{R_1}$.

Dans l'hypothèse de paroi mince nous voyons bien que $\frac{r_2}{R_2} \approx \lambda$ et plus généralement que $\frac{r}{R} \approx \lambda$ où r est

la première coordonnée sphérique, dans la configuration actuelle, de la position des particules dont la première coordonnée sphérique, dans la configuration de référence, était R .

On résume cela en disant que les élongations sont quasiment homogènes dans la paroi mince.

Question 4 :

On note $\underline{\underline{F}}$ le gradient de la transformation qui permet de transformer la configuration initiale du ballon en la configuration actuelle.

Donner la matrice des composantes approchées de $\underline{\underline{F}}$ dans la base $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi)_{(\theta, \varphi)}$ sous les hypothèses du

B. Toutes ces composantes s'expriment bien sûr à l'aide de λ .

(N'oubliez pas l'hypothèse de symétrie sphérique et que votre matériau est incompressible).

C/ Retour sur l'approximation du champ de contrainte de Cauchy par l'équilibre

Dans la question 3 nous avons écrit une approximation uniforme des composantes du tenseur de contrainte de Cauchy dans le repère local $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi)_{(\theta, \varphi)}$ en fonction de P et des valeurs caractérisant la géométrie

actuelle $r_1(t), e(t)$

Question 5 :

Utiliser les résultats de la question 4 pour **récrire** les composantes du tenseur de contrainte de Cauchy dans le repère local $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi)_{(\theta, \varphi)}$ en fonction de P , des valeurs caractérisant la géométrie initiale $R_1,$

E et de la valeur de l'élongation principale de la paroi $\lambda(t)$.

D/ Approximation du champ de contrainte de Cauchy par le comportement

Rappelons que nous savons qu'alors le comportement est déterminé (à la partie sphérique du tenseur de contrainte de Cauchy près) par la densité massique d'énergie libre du matériau $\Psi(I_1, I_2)$ où $I_1 = tr(\underline{\underline{C}})$ et

$$I_2 = \frac{1}{2} \left(I_1^2 - tr(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{C}}) \right).$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho_0 \left[\left(2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + 2I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \right] + c \underline{\underline{I}} \text{ avec } c \text{ quelconque.}$$

Question 6 :

Utilisez l'approximation de $\underline{\underline{F}}$ trouvée à la question 4 en fonction de λ pour **écrire** la matrice des composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction de λ .

E/ Détermination de $P(\lambda)$

Question 7 :

En comparant l'approximation de $\underline{\underline{\sigma}}$ par l'équilibre (question 5) et l'approximation de $\underline{\underline{\sigma}}$ par le comportement (question 6), **déterminer** c puis **déterminer** $P(\lambda)$

(C'est l'objectif assigné à ce devoir).

F/ Illustration dans le cas d'un matériau néo-hookéen

Considérons un matériau néo-hookéen, donné par sa densité volumique d'énergie libre

$$\rho_0 \Psi(I_1, I_2) = C_{10} (I_1 - 3)$$

$$\text{(Dans ce cas } \underline{\underline{\sigma}} = \rho_0 \left[\left(2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + 2I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \right] + c \underline{\underline{I}} = \rho_0 \left[\left(2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \right) \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \right] + c \underline{\underline{I}},$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2C_{10} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} + c \underline{\underline{I}}$$

Question 8 :

Déterminer l'expression de $P(\lambda)$ dans ce cas et tracez la courbe correspondante.

Commenter

Question 9 :

On imagine que l'on met en contact un ballon faiblement gonflé avec un ballon très gonflé. Les deux ballons n'étant pas à la même pression l'un d'eux se vide dans l'autre.

Imaginer une situation qui peut donner un résultat surprenant.

Question 10 :

Vous avez tous constaté en gonflant des ballons en baudruche que le début du gonflage nécessite de « pousser » plus fort qu'ensuite. On peut dire que la courbe $P(\lambda)$ dessinée ci dessus dans le cas néo-hookéen explique cette sensation. Par contre vous avez tous ressenti qu'au-delà d'une certaine taille de ballon il faut recommencer à « pousser » plus fort. Ceci n'est pas expliqué par la courbe ci-dessus car $P(\lambda)$ est décroissante. Peut être s'agit il d'un phénomène lié au fait que le matériau n'est pas néo-hookéen.

Reprenez l'expression générale de $P(\lambda)$ (question 7) dans laquelle le matériau n'est pas nécessairement néo-hookéen.

Essayer d'identifier le terme qui entraîne une rigidification de la paroi pour les grandes élongations. (Ce terme n'est pas présent pour les matériaux néo-hookéen)..

Question 11 :

Commencer par **exprimer** le volume de gaz dans le ballon en fonction de λ puis **déterminer** le nombre de mole de gaz dans le ballon en fonction de λ . (On fera l'hypothèse que le gaz est parfait).

Commenter en expliquant pourquoi il faut continuer à souffler après le pic de pression pour continuer à gonfler le ballon. (on se placera dans le cas du matériau néo-hookéen pour simplifier)