Mécanique Physique des Matériaux

Comportement des polymères et des élastomères

Daniel Weisz-Patrault

Ecole des Ponts

Séance 1 Classification et choix des matériaux

Séance 2 Méthode générale de modélisation en mécanique

Séance 3 Exemple : mécanique de milieux continus classique

Séance 4 Écriture générale des relations constitutives

Séance 5 Comportement des polymères et des élastomères

Séance 6 Étude de cas

Séance 7 Origine physique de la plasticité

Séance 8 Élastoplasticité HPP

Séance 9 Élastoplasticité en grandes transformation

Séance 10 Étude de cas

Séance 11 Microstructures et transitions de phase

Séance 12 Contraintes résiduelles

Séance 13 Examen

Objectifs généraux

Culture fondamentale

- ☐ Concepts de mécanique en grandes déformations
- ☐ Ecriture des comportements
- ☐ Théorie qui sous-tend le calcul numérique

Objectifs de le séance

- ☐ Elasticité entropique
- ☐ Elasticité enthalpique
- ☐ Comportement hyperélastique
- ☐ Identification expérimentale

Plan de le séance

1| Rappels

2| Relations constitutives en thermoélasticité

3| Comportement thermoélastique linéaire HPP

4| Comportement hyperélastique (grandes transformations)

Plan de le séance

1| Rappels

2| Relations constitutives en thermoélasticité

3| Comportement thermoélastique linéaire HPP

4| Comportement hyperélastique (grandes transformations)

Comportement indépendant de l'observateur

- Choix fréquent

$$\mathcal{E}^0_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \cancel{\underline{\nabla} T_{\underline{X}}}\right] = e_0(\underline{X}, t)$$

$$\mathcal{S}^0_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \cancel{\underline{\nabla} T_{\underline{X}}}\right] = s_0(\underline{X}, t)$$

$$\mathcal{P}^0_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla} T_{\underline{X}}\right] = p_0(\underline{X}, t)$$

$$\mathcal{Q}^0_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla} T_{\underline{X}}\right] = \underline{q}_0(\underline{X}, t)$$

$$\Pi^0_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \cancel{\underline{\nabla} T_{\underline{X}}}\right] = \underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t)$$

- Comportement matériau : $\mathcal{E}^0_{\underline{X},t}, \mathcal{S}^0_{\underline{X},t}, \mathcal{P}^0_{\underline{X},t}, \mathcal{Q}^0_{\underline{X},t}, \Pi^0_{\underline{X},t}$

Comportement indépendant de l'observateur

- Densité massique d'énergie libre

$$\psi_0(\underline{X}, t) = e_0(\underline{X}, t) - T(\underline{X}, t) s(\underline{X}, t)$$

$$\mathcal{E}^0_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}\right] = e_0(\underline{X}, t)$$

$$\mathcal{S}^0_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}\right] = s_0(\underline{X}, t)$$

- D'où

$$\boxed{\Psi^0_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}\right] = \psi_0(\underline{X}, t)}$$

Comportement indépendant de l'observateur

- Grandeurs constitutives
- Observables

$$\boxed{\underbrace{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - \rho\left(\dot{\Psi} + \dot{T}s\right)}_{D_I} - \underbrace{\frac{\underline{q}.\underline{\nabla} T}{T}}_{D_T} = D \geq 0}$$

$$\boxed{\underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\dot{e}}} - \rho_0\left(\dot{\Psi}_0 + \dot{T}s_0\right) - \frac{\underline{q}_0.\underline{\nabla}_X T}{T} \geq 0}$$

- Comportement matériau : $\mathcal{E}^0_{\underline{X},t}, \mathcal{S}^0_{\underline{X},t}, \mathcal{P}^0_{\underline{X},t}, \mathcal{Q}^0_{\underline{X},t}, \Pi^0_{\underline{X},t}$
- Doit vérifier l'équation des bilans pour toute évolution possible

Plan de le séance

1| Rappels

2| Relations constitutives en thermoélasticité

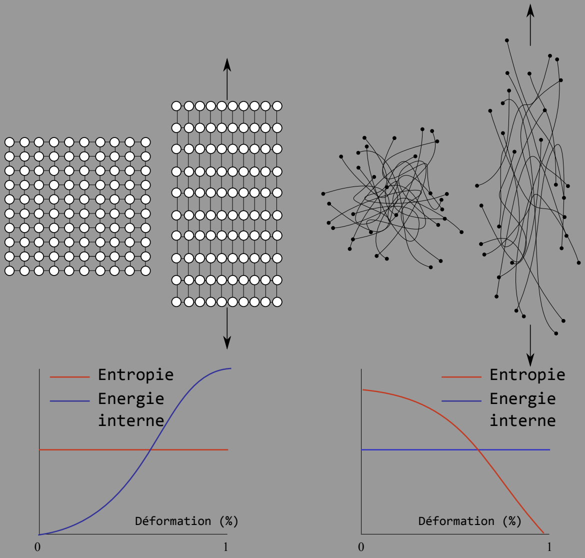
3| Comportement thermoélastique linéaire HPP

4| Comportement hyperélastique (grandes transformations)

Relations constitutives en thermoélasticité

- Deux origines physiques
- Hypothèses de la thermoélasicité
- Contraintes de l'équation des bilans

Deux origines physiques



Relations constitutives en thermoélasticité

- Deux origines physiques
- Hypothèses de la thermoélasicité
- Contraintes de l'équation des bilans

Hypothèses de la thermoélasicité

Hypothèse 1

- ☐ Le matériau est non vieillissant
- ☐ Comportement matériau

$$\mathcal{E}^0_{\underline{X},\cancel{t}}, \mathcal{S}^0_{\underline{X},\cancel{t}}, \mathcal{P}^0_{\underline{X},\cancel{t}}, \mathcal{Q}^0_{\underline{X},\cancel{t}}, \Pi^0_{\underline{X},\cancel{t}}$$

- ☐ Comportement : fonctions classique de l'état

Hypothèses de la thermoélasicité

Hypothèse 2

- Energie interne e_0 et entropie s_0 fonctions de la valeur actuelle de $\underline{\underline{e}}$ et T et non de toute l'histoire
- Le matériau ne dépend que de l'état actuel

$$\mathcal{E}^0_{\underline{X}}\left(\underline{\underline{e}}(\underline{X},t),\,T(\underline{X},t)\right) = e_0(\underline{X},t)$$

$$\mathcal{S}^0_{\underline{X}}\left(\underline{\underline{e}}(\underline{X},t),\,T(\underline{X},t)\right) = s_0(\underline{X},t)$$

- D'où

$$\Psi^0_{\underline{X}}\left(\underline{\underline{e}}(\underline{X},t),\,T(\underline{X},t)\right) = \psi_0(\underline{X},t)$$

- Comportement : fonctions classique de l'état (7 variables)

Relations constitutives en thermoélasticité

- Deux origines physiques
- Hypothèses de la thermoélasicité
- Contraintes de l'équation des bilans

Contraintes de l'équation des bilans

Inegalité de Clausius Duhem

$$\boxed{\underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\dot{e}}} - \rho_0 \left(\dot{\psi}_0 + \dot{T} s_0 \right) - \frac{\underline{q}_0 . \underline{\nabla}_X T}{T} \geq 0}$$

Vraie pour tout solide, tout état et toute évolution possible.
Choisissons de considérer des solides dans des états uiformes

- ☐ D'où : $\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{X}} T(\underline{X}, t) = 0$
- ☐ D'où :

$$D_I = \underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\dot{e}}} - \rho_0 \left(\dot{\psi}_0 + \dot{T} s_0 \right) \geq 0$$

Vraie pour toute évolution possible de la situation uniforme.

Contraintes de l'équation des bilans

Inegalité de Clausius Duhem

- ☐ Inégalité de Clausius Duhem

$$\underline{\underline{\pi}} : \dot{\underline{\underline{e}}}(\underline{X}, t) - \rho_0 \left(\dot{\psi}_0(\underline{X}, t) + \dot{T}(\underline{X}, t) s_0(\underline{X}, t) \right) \geq 0$$

- ☐ Relations constitutives

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}^0_{\underline{X}} \left(\underline{\underline{e}}(\underline{X}, t), T(\underline{X}, t) \right) = s_0(\underline{X}, t) \\
&\Psi^0_{\underline{X}} \left(\underline{\underline{e}}(\underline{X}, t), T(\underline{X}, t) \right) = \psi_0(\underline{X}, t) \\
&\Rightarrow \Pi^0_{\underline{X}, t} \left(\underline{\underline{e}}(\underline{X}, t), T(\underline{X}, t) \right) = \underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t) \text{ ?}
\end{aligned}$$

Contraintes de l'équation des bilans

Inegalité de Clausius Duhem

- Dérivée de l'énergie libre

$$\dot{\psi}_0(\underline{X}, t) = \frac{d\Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}(\underline{X}, t), T(\underline{X}, t))}{dt} = \frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial \underline{\underline{e}}} : \dot{\underline{\underline{e}}} + \frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial T} \dot{T}$$

- Inégalité de Clausius Duhem

$$\left(\underline{\underline{\pi}} - \rho_0 \frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial \underline{\underline{e}}}\right) : \dot{\underline{\underline{e}}} - \rho_0 \left(\frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial T} + \mathcal{S}^0_{\underline{X}}\left(\underline{\underline{e}}, T\right)\right) \dot{T} \geq 0$$

- Valable $\forall \dot{\underline{\underline{e}}}, \forall \dot{T}$ possibles

Contraintes de l'équation des bilans

Inegalité de Clausius Duhem

- Premier choix possible

$$\dot{\underline{\underline{e}}} = 0 \text{ et } \forall\, \dot{T} > 0$$

- Inégalité de Clausius Duhem

$$\cancel{\left(\underline{\underline{\pi}} - \rho_0 \frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}}{\partial \underline{\underline{e}}}\right)} : \dot{\underline{\underline{e}}} - \underbrace{\rho_0 \left(\frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}}{\partial T} + \mathcal{S}^0_{\underline{X}}\left(\underline{\underline{e}}, T\right)\right)}_{\text{ne dépend que de l'état}} \underbrace{\dot{T}}_{>0} \geq 0$$

Contraintes de l'équation des bilans

Inegalité de Clausius Duhem

- Deuxième choix possible

$$\dot{\underline{\underline{e}}} = 0 \text{ et } \forall\, \dot{T} < 0$$

- Inégalité de Clausius Duhem

$$\cancel{\left(\underline{\underline{\pi}} - \rho_0 \frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}}{\partial \underline{\underline{e}}}\right)} : \dot{\underline{\underline{e}}} - \underbrace{\rho_0 \left(\frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}}{\partial T} + \mathcal{S}^0_{\underline{X}}\left(\underline{\underline{e}}, T\right)\right)}_{\text{ne dépend que de l'état}} \underbrace{\dot{T}}_{<0} \geq 0$$

- Conclusion : pour chaque état $\underline{\underline{e}}, T$

$$\boxed{\mathcal{S}^0_{\underline{X}}\left(\underline{\underline{e}}, T\right) = -\frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial T}}$$

Contraintes de l'équation des bilans

Inegalité de Clausius Duhem

- **Troisième choix** évolutions compressibles et isothermes

$$\dot{T} = 0 \text{ et } \forall \dot{\underline{\underline{e}}} \text{ symétrique}$$

- Inégalité de Clausius Duhem ($\dot{\underline{\underline{e}}}$, $-\dot{\underline{\underline{e}}}$)

$$\underbrace{\left(\underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t) - \rho_0 \frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial \underline{\underline{e}}}\right)}_{\text{ne dépend que de l'état}} : \dot{\underline{\underline{e}}} - \cancel{\rho_0 \left(\frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial T} + \mathcal{S}^0_{\underline{X}}\left(\underline{\underline{e}}, T\right)\right) \dot{T}} \geq 0$$

- Conclusion : pour chaque état $\underline{\underline{e}}, T$

$$\underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t) - \rho_0 \frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial \underline{\underline{e}}} \text{ anti-symétrique}$$

Contraintes de l'équation des bilans

Inegalité de Clausius Duhem

- Conclusion : pour chaque état $\underline{\underline{e}}, T$

$$\underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t) - \rho_0 \frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial \underline{\underline{e}}} \text{ anti-symétrique}$$

- Par ailleurs $\underline{\underline{\pi}}(\underline{X}) = \Pi^0_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}\right]$
- D'où

$$\Pi^0_{\underline{X}}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}\right] = \text{sym}\left[\rho_0 \frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial \underline{\underline{e}}}\right]$$

- D'où $\Pi^0_{\underline{X}}$ ne dépend que de $\underline{\underline{e}}(\underline{X}, t)$ et $T(\underline{X}, t)$

$$\underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t) = \Pi^0_{\underline{X}}\left(\underline{\underline{e}}, T\right) = \text{sym}\left[\rho_0 \frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial \underline{\underline{e}}}\right]$$

Contraintes de l'équation des bilans

Inegalité de Clausius Duhem

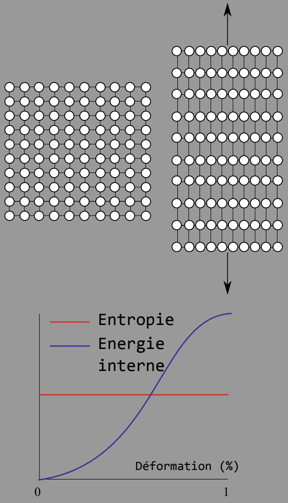
- On peut choisir $\Psi^0_{\underline{X}}$ tel que

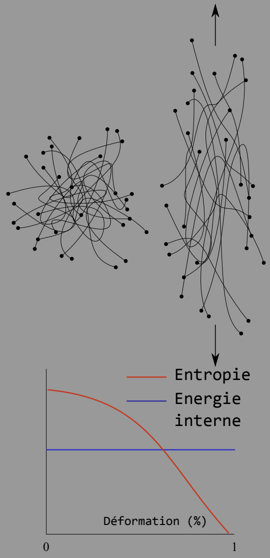
$$\frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial \underline{\underline{e}}} = \mathsf{sym}\left[\frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial \underline{\underline{e}}}\right]$$

- $\Psi^0_{\underline{X}}$ fonction des $e_{ij} = e_{ji}$
- Remplace e_{ij} par $(e_{ij} + e_{ji})/2$ sans changer $\Psi^0_{\underline{X}}$
- D'où

$$\underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t) = \Pi^0_{\underline{X}}\left(\underline{\underline{e}}, T\right) = \rho_0 \frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial \underline{\underline{e}}}$$

Contraintes de l’équation des bilans





Contraintes de l'équation des bilans

$$\underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t) = \rho_0 \frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial \underline{\underline{e}}}$$

$$\underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t) = \underbrace{\rho_0 \frac{\partial \mathcal{E}^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial \underline{\underline{e}}}}_{\text{elasticité enthalpique}} - \underbrace{\rho_0 \, T(\underline{X}, t) \frac{\partial \mathcal{S}^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial \underline{\underline{e}}}}_{\text{élasticité entropique}}$$

- ☐ Baisse de l'entropie = apport d'entropie négatif
- ☐ Echange de chaleur avec l'extérieur

Contraintes de l'équation des bilans

Relations constitutives

- Le choix de $\Psi^0_{\underline{X}}$ donne (pour $\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{e}}(\underline{X}, T)$ et $T = T(\underline{X}, t)$)

$$\mathcal{E}^0_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}\right] = e_0(\underline{X}, t) \quad \boxed{\mathcal{E}^0_{\underline{X}}\left(\underline{\underline{e}}, T\right) = \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T) + T\mathcal{S}^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}$$

$$\mathcal{S}^0_{\underline{X}}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}\right] = s_0(\underline{X}, t) \quad \boxed{\mathcal{S}^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T) = -\frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}}{\partial T}(\underline{\underline{e}}, T)}$$

$$\mathcal{P}^0_{\underline{X}}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla} T_{\underline{X}}\right] = p_0(\underline{X}, t)$$

Contraintes de l'équation des bilans

Relations constitutives

$$\mathcal{Q}^0_{\underline{X}}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla} T_{\underline{X}}\right] = \underline{q}_0(\underline{X}, t)$$

$$\underline{\underline{\Pi}}^0_{\underline{X}}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}\right] = \underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t) \quad \boxed{\underline{\underline{\Pi}}^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T) = \mathsf{sym}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}}{\partial \underline{\underline{e}}}(\underline{\underline{e}}, T)\right)}$$

- ☐ Comportement matériau : $\mathcal{E}^0_{\underline{X},t}, \mathcal{S}^0_{\underline{X},t}, \mathcal{P}^0_{\underline{X},t}, \mathcal{Q}^0_{\underline{X},t}, \Pi^0_{\underline{X},t}$

Contraintes de l'équation des bilans

- Liaisons interne : matériaux incompressibles
- $J = 1 \Rightarrow \dot{J} = 0 \Rightarrow \text{div}_{\underline{x}} \underline{V} = \dot{J} J^{-1} = 0$
- $\text{tr}\left(\underline{\underline{d}}\right) = \text{tr}\left(\text{sym}\left(\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}} \underline{V}\right)\right) = \text{div}_{\underline{x}} \underline{V} = 0$
- $\underline{\underline{d}} = {}^t\underline{\underline{F}}^{-1} . \underline{\underline{\dot{e}}} . \underline{\underline{F}}^{-1} \Rightarrow \text{tr}\left(\underline{\underline{d}}\right) = \text{tr}\left({}^t\underline{\underline{F}}^{-1} . \underline{\underline{\dot{e}}} . \underline{\underline{F}}^{-1}\right) = \text{tr}\left(\underline{\underline{F}}^{-1} . {}^t\underline{\underline{F}}^{-1} . \underline{\underline{\dot{e}}}\right)$
- $\boxed{\text{tr}\left(\underline{\underline{d}}\right) = \underline{\underline{C}}^{-1} : \underline{\underline{\dot{e}}} = 0}$
- Forme linéaire $f : \underline{\underline{z}}$ symétrique $\mapsto \underline{\underline{C}}^{-1} : \underline{\underline{z}}$

$$\dot{T} = 0 \text{ et } \forall \underline{\underline{\dot{e}}} \in \text{ker}\,[f]$$

- Inégalité de Clausius Duhem

$$\underbrace{\left(\underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t) - \rho_0 \frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial \underline{\underline{e}}}\right)}_{\text{ne dépend que de l'état}} : \underline{\underline{\dot{e}}} = 0$$

Contraintes de l'équation des bilans

- Liaisons interne : matériaux incompressibles
- $\forall \, \dot{\underline{\underline{e}}} \in \ker [f]$
- Inégalité de Clausius Duhem

$$\mathrm{sym}\left(\underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t) - \rho_0 \frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial \underline{\underline{e}}}\right) : \dot{\underline{\underline{e}}} = 0$$

- Forme linéaire $g : \underline{\underline{z}}$ symétrique $\mapsto \mathrm{sym}\left(\underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t) - \rho_0 \frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial \underline{\underline{e}}}\right) : \underline{\underline{z}}$
- $\dot{\underline{\underline{e}}} \in \ker [g] \Rightarrow \ker [f] \subset \ker [g]$
- $\dim [\ker [f]] = \dim [\ker [g]] \Rightarrow \boxed{\ker [f] = \ker [g]}$

$$\exists c \in \mathbb{R}, \; g - c f = 0 \Rightarrow \left(\mathrm{sym}\left(\underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t) - \rho_0 \frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial \underline{\underline{e}}}\right) - c \underline{\underline{C}}^{-1}\right) : \underline{\underline{z}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Pi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T) = \mathrm{sym}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial \underline{\underline{e}}}\right) + c \, \underline{\underline{C}}^{-1}} \quad c \text{ indéterminé}$$

Contraintes de l'équation des bilans

Relations constitutives matériaux incompressibles

- Le choix de $\Psi^0_{\underline{X}}$ donne (pour $\underline{e} = \underline{e}(\underline{X}, T)$ et $T = T(\underline{X}, t)$)

$$\mathcal{E}^0_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}\right] = e_0(\underline{X}, t) \qquad \boxed{\mathcal{E}^0_{\underline{X}}\left(\underline{e}, T\right) = \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{e}, T) + T\mathcal{S}^0_{\underline{X}}(\underline{e}, T)}$$

$$\mathcal{S}^0_{\underline{X}}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}\right] = s_0(\underline{X}, t) \qquad \boxed{\mathcal{S}^0_{\underline{X}}(\underline{e}, T) = -\frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}}{\partial T}(\underline{e}, T)}$$

$$\mathcal{P}^0_{\underline{X}}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla T}_{\underline{X}}\right] = p_0(\underline{X}, t)$$

Contraintes de l'équation des bilans

Relations constitutives matériaux incompressibles

$$\mathcal{Q}^0_{\underline{X}}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla} T_{\underline{X}}\right] = \underline{q}_0(\underline{X}, t)$$

$$\Pi^0_{\underline{X}}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}\right] = \underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t) \quad \boxed{\Pi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T) = \mathrm{sym}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}}{\partial \underline{\underline{e}}}(\underline{\underline{e}}, T)\right) + c\underline{\underline{C}}^{-1}}$$

- ☐ Comportement matériau : $\mathcal{E}^0_{\underline{X},t}, \mathcal{S}^0_{\underline{X},t}, \mathcal{P}^0_{\underline{X},t}, \mathcal{Q}^0_{\underline{X},t}, \Pi^0_{\underline{X},t}$

Contraintes de l'équation des bilans

☐ Matériaux compressibles

$$\Pi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T) = \mathtt{sym}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial \underline{\underline{e}}}\right)$$

☐ Contrainte de Piola Kirchoff

$$\Pi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T) = J\,\underline{\underline{F}}^{-1}.\underline{\underline{\sigma}}.\,{}^t\underline{\underline{F}}^{-1}$$

☐ Contrainte de Cauchy matériaux compressibles

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \underline{\underline{F}}.\mathtt{sym}\left(\frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial \underline{\underline{e}}}\right).{}^t\underline{\underline{F}}$$

Contraintes de l'équation des bilans

- Matériaux incompressibles

$$\underline{\underline{\Pi}}^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T) = \mathrm{sym}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial \underline{\underline{e}}}\right) + c \underbrace{\underline{\underline{C}}^{-1}}_{\underline{\underline{F}}^{-1}.\,^t\underline{\underline{F}}^{-1}}$$

- Contrainte de Piola Kirchoff

$$\underline{\underline{\Pi}}^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T) = J\,\underline{\underline{F}}^{-1}.\underline{\underline{\sigma}}.\,^t\underline{\underline{F}}^{-1}$$

- Contrainte de Cauchy matériaux incompressibles

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \underline{\underline{F}}.\mathrm{sym}\left(\frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial \underline{\underline{e}}}\right).\,^t\underline{\underline{F}} + c\underline{\underline{I}} \quad c \text{ indéterminé}$$

Contraintes de l’équation des bilans

Equation des bilans

- Dissipation intrinsèque

$$\cancel{\underline{\underline{\pi}} : \dot{\underline{\underline{e}}} - \rho_0\left(\dot{\psi}_0 + \dot{T}s_0\right)} - \frac{\underline{q}_0 . \underline{\nabla}_{\underline{X}} T}{T} = T p_0(\underline{X}, t)$$

- Dissipation

$$\boxed{T(\underline{X}, t)\, p_0(\underline{X}, t) = \frac{\underline{\nabla}_{\underline{X}} T . \underline{\underline{k}}_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T) . \underline{\nabla}_{\underline{X}} T}{T} \geq 0}$$

- Loi de Fourier

$$\underline{q}_0 = -\underline{\underline{k}}_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T) . \underline{\nabla}_{\underline{X}} T$$

Contraintes de l'équation des bilans

Conduction

- ☐ Loi de Fourier

$$\boxed{\mathcal{Q}^0_{\underline{X}}\left[\underline{\underline{e}}, T, \underline{\nabla}_{\underline{X}} T\right] = \underline{q}_0 = -\underline{\underline{k}}_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T).\underline{\nabla}_{\underline{X}} T}$$

- ☐ Tenseur de conductivité $\underline{\underline{k}}_{\underline{X}}$ de la particule $\underline{X}$
- ☐ Comportement thermique isotrope homogène

$$\forall \underline{X}, \quad \underline{\underline{k}}_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T) = k(\underline{\underline{e}}, T)\underline{\underline{I}}$$

Contraintes de l'équation des bilans

Relations constitutives

Le choix de $\Psi^0_{\underline{X}}$ et $\underline{\underline{k}}_{\underline{X}}$ donne

$$\mathcal{E}^0_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}\right] = e_0(\underline{X}, t) \quad \boxed{\mathcal{E}^0_{\underline{X}}\left(\underline{\underline{e}}, T\right) = \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T) - T\frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}}{\partial T}(\underline{\underline{e}}, T)}$$

$$\mathcal{S}^0_{\underline{X}}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}\right] = s_0(\underline{X}, t) \quad \boxed{\mathcal{S}^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T) = -\frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}}{\partial T}(\underline{\underline{e}}, T)}$$

$$\mathcal{P}^0_{\underline{X}}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla} T_{\underline{X}}\right] = p_0(\underline{X}, t) \quad \boxed{\mathcal{P}^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T, \underline{\nabla}_{\underline{X}} T) = \frac{\underline{\nabla}_{\underline{X}} T.\underline{\underline{k}}_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T).\underline{\nabla}_{\underline{X}} T}{T^2}}$$

Contraintes de l'équation des bilans

Relations constitutives

Le choix de $\underline{\Psi}^0_X$ et $\underline{\underline{k}}_X$ donne

$$\underline{\mathcal{Q}}^0_X\left[\underline{\underline{C}}_X, \underline{T}_X, \underline{\nabla T}_X\right] = \underline{q}_0(\underline{X}, t) \quad \boxed{\underline{\mathcal{Q}}^0_X\left(\underline{\underline{e}}, T, \underline{\nabla}_X T\right) = -\underline{\underline{k}}_X(\underline{\underline{e}}, T).\underline{\nabla}_X T}$$

$$\underline{\Pi}^0_X\left[\underline{\underline{C}}_X, \underline{T}_X\right] = \underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t) \quad \boxed{\underline{\Pi}^0_X(\underline{\underline{e}}, T) = \mathrm{sym}\left(\rho_0 \frac{\partial \underline{\Psi}^0_X}{\partial \underline{\underline{e}}}(\underline{\underline{e}}, T)\right)}$$

Contraintes de l'équation des bilans

Relations constitutives des matériaux incompressibles

Le choix de $\Psi^0_{\underline{X}}$ et $\underline{\underline{k}}_{\underline{X}}$ donne

$$\boxed{\mathcal{E}^0_{\underline{X}}\left(\underline{\underline{e}}, T\right) = \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T) - T\frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}}{\partial T}(\underline{\underline{e}}, T)}$$

$$\boxed{\mathcal{S}^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T) = -\frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}}{\partial T}(\underline{\underline{e}}, T)}$$

$$\boxed{\mathcal{P}^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T, \underline{\nabla}_{\underline{X}} T) = \frac{\underline{\nabla}_{\underline{X}} T . \underline{\underline{k}}_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T) . \underline{\nabla}_{\underline{X}} T}{T^2}}$$

Contraintes de l'équation des bilans

Relations constitutives des matériaux incompressibles

Le choix de $\Psi^0_{\underline{X}}$ et $\underline{\underline{k}}_{\underline{X}}$ donne

$$\boxed{\mathcal{Q}^0_{\underline{X}}\left(\underline{\underline{e}}, T, \underline{\nabla}_{\underline{X}} T\right) = -\underline{\underline{k}}_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T).\underline{\nabla}_{\underline{X}} T}$$

$$\boxed{\Pi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T) = \mathsf{sym}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}}{\partial \underline{\underline{e}}}(\underline{\underline{e}}, T)\right) + c\left(\underline{\underline{I}} + 2\underline{\underline{e}}\right)^{-1}}$$

Plan de le séance

1 | Rappels

2 | Relations constitutives en thermoélasticité

3 | Comportement thermoélastique linéaire HPP

4 | Comportement hyperélastique (grandes transformations)

Comportement thermoélastique linéaire HPP

- Hypothèses
- Matériaux isotropes

Hypothèses

- HPP
- Faibles variation de température au voisinage de T_0

$$T = T_0 + \Delta T$$

- Energie libre développée au deuxième ordre

$$\rho\Psi(\underline{\varepsilon}, \Delta T) = \rho\Psi_0 + \underline{\underline{\sigma}}_0 : \underline{\underline{\varepsilon}} - \rho s_0 \Delta T + \frac{1}{2}\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{R}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \Delta T \underline{\underline{\beta}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{1}{2}\rho\gamma\Delta T^2$$

- Relation constitutive

$$\mathcal{S}^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T) = -\frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}}{\partial T}(\underline{\underline{e}}, T)$$

- Entropie

$$\rho s(\underline{\underline{\varepsilon}}, \Delta T) = \rho s_0 + \underline{\underline{\beta}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \rho\gamma\Delta T$$

- s_0 est l'entropie initiale

Hypothèses

- Entropie

$$\rho s(\underline{\varepsilon}, \Delta T) = \rho s_0 + \underline{\underline{\beta}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \rho\gamma\Delta T$$

- Chaleur massique

$$T\dot{s}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \Delta T) = \frac{T}{\rho}\underline{\underline{\beta}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} + T\gamma\dot{T}$$

- $T\gamma$: chaleur massique du matériau
- $\frac{T}{\rho}\underline{\underline{\beta}}$: tenseur des chaleurs latentes massique de déformation

Hypothèses

- Energie libre développée au deuxième ordre

$$\rho\Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \Delta T) = \rho\Psi_0 + \underline{\underline{\sigma}}_0 : \underline{\underline{\varepsilon}} - \rho s_0 \Delta T + \frac{1}{2}\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{R}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \Delta T \underline{\underline{\beta}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{1}{2}\gamma\Delta T^2$$

- Relation constitutive

$$\Pi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T) = \mathtt{sym}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}}{\partial \underline{\underline{e}}}(\underline{\underline{e}}, T)\right) \Rightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}$$

- Contrainte de Cauchy

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 + \underline{\underline{\underline{\underline{R}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \Delta T \underline{\underline{\beta}}$$

- On pose le tenseur de dilatation thermique

$$\underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{\underline{\underline{R}}}}^{-1} : \underline{\underline{\beta}} \Rightarrow \underline{\underline{\beta}} = \underline{\underline{\underline{\underline{R}}}} : \underline{\underline{\alpha}}$$

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 + \underline{\underline{\underline{\underline{R}}}} : \underbrace{\left(\underline{\underline{\varepsilon}} - \Delta T \underline{\underline{\alpha}}\right)}_{\underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{elas}}}}$$

Hypothèses

- Contrainte résiduelles $\underline{\underline{\sigma}}_0$ abstrait

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 + \underline{\underline{\underline{\underline{R}}}} : \underbrace{\left(\underline{\underline{\varepsilon}} - \Delta T \underline{\underline{\alpha}}\right)}_{\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{elas}}}$$

- Déformations résiduelles $\underline{\underline{\varepsilon}}_0^*$ non compatibles associées à des phénomènes physiques.
- Il existe une déformation élastique $\underline{\underline{\varepsilon}}_0^{\text{elas}}$ non compatibles telle que

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_0 = \frac{1}{2}\left(\underline{\nabla} u_0 + {}^t\underline{\nabla} u_0\right) = \underline{\underline{\varepsilon}}_0^{\text{elas}} + \underline{\underline{\varepsilon}}_0^*$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_0 = \underline{\underline{\underline{\underline{R}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_0^{\text{elas}}$$

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{R}}}} : \left(\underline{\underline{\varepsilon}}_0 - \underline{\underline{\varepsilon}}_0^*\right) + \underline{\underline{\underline{\underline{R}}}} : \left(\underline{\underline{\varepsilon}} - \Delta T \underline{\underline{\alpha}}\right)}$$

Hypothèses

- On a

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 + \underline{\underline{\underline{\underline{R}}}} : \left(\underline{\underline{\varepsilon}} - \Delta T \underline{\underline{\alpha}}\right)}$$

- $\underline{\underline{\sigma}}_0$: contrainte initiale
- $\underline{\underline{\underline{\underline{R}}}}$: tenseur de raideurs (21 coefficients)
- $\underline{\underline{\alpha}}$: tenseur de dilatation thermique

Comportement thermoélastique linéaire HPP

- Hypothèses
- Matériaux isotropes

- $\underline{\underline{\underline{\underline{R}}}}$: tenseur d'ordre 4 symétrique isotrope
- Espace vectoriel de dimension 2
- Base commune

$$\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}} \qquad \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}$$

- Relations fondamentales

$$\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right) \underline{\underline{I}}$$

$$\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}$$

- Coefficient de Lamé λ, μ

$$\underline{\underline{\underline{\underline{R}}}} = \lambda \underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}$$

- D'où

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{R}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{elas}} = \lambda \mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{elas}}\right) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{elas}}}$$

- Meilleure base

$$\frac{1}{3}\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}} \qquad \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} - \frac{1}{3}\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}}$$

- Relations fondamentales

$$\frac{1}{3}\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \underbrace{\frac{\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)}{3}\underline{\underline{I}}}_{\text{isotrope}}$$

$$\left(\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} - \frac{1}{3}\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}}\right) : \underline{\underline{\varepsilon}} = \underbrace{\underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)}{3}\underline{\underline{I}}}_{\text{déviateur}} = \mathrm{dev}\left[\underline{\underline{\varepsilon}}\right]$$

☐ Meilleure base : $\boxed{\text{projecteur et orthogonale}}$

☐ Relations fondamentales

$$\underbrace{\frac{1}{3}\underline{\underline{I}}\otimes\underline{\underline{I}}}_{\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}}:\underline{\underline{\varepsilon}}=\frac{\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)}{3}\underline{\underline{I}}\Rightarrow\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}:\underline{\underline{\varepsilon}}=\frac{\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)}{3}\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}:\underline{\underline{I}}=\frac{\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)}{3}\underline{\underline{I}}=\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}:\underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$\boxed{\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}=\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}}$$

$$\underbrace{\left(\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}-\frac{1}{3}\underline{\underline{I}}\otimes\underline{\underline{I}}\right)}_{\underline{\underline{\underline{\underline{B}}}}}:\underline{\underline{\varepsilon}}=\mathrm{dev}\left[\underline{\underline{\varepsilon}}\right]\Rightarrow\underline{\underline{\underline{\underline{B}}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{B}}}}:\underline{\underline{\varepsilon}}=\underline{\underline{\underline{\underline{B}}}}:\mathrm{dev}\left[\underline{\underline{\varepsilon}}\right]=\mathrm{dev}\left[\underline{\underline{\varepsilon}}\right]=\underline{\underline{\underline{\underline{B}}}}:\underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$\boxed{\underline{\underline{\underline{\underline{B}}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{B}}}}=\underline{\underline{\underline{\underline{B}}}}}$$

- Meilleure base : $\boxed{\text{projecteur et orthogonale}}$
- Relations fondamentales

$$\underbrace{\frac{1}{3}\underline{\underline{I}}\otimes\underline{\underline{I}}}_{\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}}:\underline{\underline{\varepsilon}}=\frac{\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)}{3}\underline{\underline{I}}\Rightarrow\underline{\underline{\underline{\underline{B}}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}:\underline{\underline{\varepsilon}}=\frac{\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)}{3}\underline{\underline{\underline{\underline{B}}}}:\underline{\underline{I}}=\frac{\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)}{3}\mathrm{dev}\left[\underline{\underline{I}}\right]=0$$

$$\boxed{\underline{\underline{\underline{\underline{B}}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}=0}$$

$$\underbrace{\left(\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}-\frac{1}{3}\underline{\underline{I}}\otimes\underline{\underline{I}}\right)}_{\underline{\underline{\underline{\underline{B}}}}}:\underline{\underline{\varepsilon}}=\mathrm{dev}\left[\underline{\underline{\varepsilon}}\right]\Rightarrow\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{B}}}}:\underline{\underline{\varepsilon}}=\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}:\mathrm{dev}\left[\underline{\underline{\varepsilon}}\right]=\frac{\mathrm{tr}\left[\mathrm{dev}\left[\underline{\underline{\varepsilon}}\right]\right]}{3}\underline{\underline{I}}=0$$

$$\boxed{\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{B}}}}=0}$$

- Meilleure base : $\boxed{\text{projecteur et orthogonale}}$
- Relations fondamentales

$$\frac{1}{3}\underline{\underline{I}}\otimes\underline{\underline{I}}:\underline{\underline{\varepsilon}}=\frac{\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)}{3}\underline{\underline{I}}\Rightarrow\boxed{\left(\frac{1}{3}\underline{\underline{I}}\otimes\underline{\underline{I}}\right):\left(\frac{1}{3}\underline{\underline{I}}\otimes\underline{\underline{I}}\right)=\left(\frac{1}{3}\underline{\underline{I}}\otimes\underline{\underline{I}}\right)}$$

$$\left(\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}-\frac{1}{3}\underline{\underline{I}}\otimes\underline{\underline{I}}\right):\underline{\underline{\varepsilon}}=\mathrm{dev}\left[\underline{\underline{\varepsilon}}\right]$$

$$\boxed{\Rightarrow\left(\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}-\frac{1}{3}\underline{\underline{I}}\otimes\underline{\underline{I}}\right):\left(\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}-\frac{1}{3}\underline{\underline{I}}\otimes\underline{\underline{I}}\right)=\left(\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}-\frac{1}{3}\underline{\underline{I}}\otimes\underline{\underline{I}}\right)}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\left(\frac{1}{3}\underline{\underline{I}}\otimes\underline{\underline{I}}\right):\left(\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}-\frac{1}{3}\underline{\underline{I}}\otimes\underline{\underline{I}}\right)=0\\ \left(\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}-\frac{1}{3}\underline{\underline{I}}\otimes\underline{\underline{I}}\right):\left(\frac{1}{3}\underline{\underline{I}}\otimes\underline{\underline{I}}\right)=0\end{array}}$$

- Meilleure base : projecteur et orthogonale
- Tenseur d'ordre 4 isotrope quelconque

$$\underline{\underline{\underline{\underline{T}}}} = a\left(\frac{1}{3}\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}}\right) + b\left(\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} - \frac{1}{3}\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}}\right)$$

- Inverse

$$\boxed{\underline{\underline{\underline{\underline{T}}}}^{-1} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{3}\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}}\right) + \frac{1}{b}\left(\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} - \frac{1}{3}\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}}\right)}$$

- Meilleure base : $\boxed{\text{projecteur et orthogonale}}$
- Tenseur de raideur d'ordre 4 isotrope

$$\underline{\underline{\underline{\underline{R}}}} = \lambda \underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}$$

- Expression dans la bonne base

$$\underline{\underline{\underline{\underline{R}}}} = \underbrace{(3\lambda + 2\mu)}_{k_0} \left(\frac{1}{3} \underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}} \right) + 2\mu \left(\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}} \right)$$

- Tenseur de souplesse

$$\underline{\underline{\underline{\underline{S}}}} = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \left(\frac{1}{3} \underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}} \right) + \frac{1}{2\mu} \left(\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}} \right)$$

Identification expérimentale

- Traction uniaxiale : $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$
- Mesure du module d'Young E et coefficient de Poisson ν

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{elas}} = \frac{\sigma}{E}\left(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \nu \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y - \nu \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\right)$$

- D'où

$$\underline{\underline{\underline{\underline{S}}}} = -\frac{\nu}{E}\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}} + \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}$$

- Tenseur de souplesse

$$\underline{\underline{\underline{\underline{S}}}} = \frac{1}{3\lambda + 2\mu}\left(\frac{1}{3}\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}}\right) + \frac{1}{2\mu}\left(\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} - \frac{1}{3}\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}}\right)$$

- Identification

$$E = \mu\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \quad 2\mu = \frac{E}{1+\nu} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad 3\lambda + 2\mu = \frac{E}{1-2\nu}$$

Plan de le séance

1| Rappels

2| Relations constitutives en thermoélasticité

3| Comportement thermoélastique linéaire HPP

4| Comportement hyperélastique (grandes transformations)

Comportement hyperélastique (grandes transformations)

- Comportement hyperélastique incompressible
- Comportement hyperélastique compressible

Comportement hyperélastique incompressible

- Contrainte de Cauchy matériaux incompressibles

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \underline{\underline{F}}.\text{sym}\left(\frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial \underline{\underline{e}}}\right).{}^t\underline{\underline{F}} + c\underline{\underline{I}} \quad c \text{ indéterminé}$$

- Déterminer

$$\boxed{\frac{\partial \Psi^0_{\underline{X}}(\underline{\underline{e}}, T)}{\partial \underline{\underline{e}}}}$$

- Notation simplifiée

$$\Psi^{\cancel{0}}_{\cancel{\underline{X}}}(\underline{\underline{e}}, \cancel{T}) = \Psi(\underline{\underline{e}})$$

Comportement hyperélastique incompressible

- Matériau isotrope sans variation de volume
- Donc Ψ fonction des invariants de $\underline{\underline{e}}$ ou $\underline{\underline{C}}$

$$I_1 = \mathtt{tr}\left(\underline{\underline{C}}\right)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(I_1^2 - \mathtt{tr}\left(\underline{\underline{C}}.\underline{\underline{C}}\right)\right)$$

- D'où

$$\boxed{\Psi(I_1, I_2)}$$

Comportement hyperélastique incompressible

- Contrainte de Cauchy matériaux incompressibles

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \underline{\underline{F}}.\text{sym}\left(\frac{\partial \Psi(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}\right).{}^t\underline{\underline{F}} + c\underline{\underline{I}} \quad c \text{ indéterminé}$$

- Dérivation

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{e}}} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{e}}} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{e}}}$$

- Scalaires
- Tenseurs d'ordre 2

Comportement hyperélastique incompressible

☐ Calcul de $\frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{e}}}$

$$I_1 = \mathtt{tr}\left(\underline{\underline{C}}\right) = \underline{\underline{1}} : (2\underline{\underline{e}} + \underline{\underline{1}}) = 2\underline{\underline{1}} : \underline{\underline{e}} + 3$$

$$I_1 = 2\delta_{ij}e_{ji} + 3 \Rightarrow \frac{\partial I_1}{\partial e_{kl}} = 2\delta_{ij}\frac{\partial e_{ji}}{\partial e_{kl}} = 2\delta_{kl}$$

$$\boxed{\frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{e}}} = 2\underline{\underline{1}}}$$

Comportement hyperélastique incompressible

- Calcul de $\frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{e}}}$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(I_1^2 - \mathrm{tr}\left(\underline{\underline{C}}.\underline{\underline{C}}\right)\right)$$

$$\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{C}}.\underline{\underline{C}}\right) = 4\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{e}}.\underline{\underline{e}}\right) + 4\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{e}}.\underline{\underline{1}}\right) + \mathrm{tr}\left(\underline{\underline{1}}\right)$$

$$\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{C}}.\underline{\underline{C}}\right) = 4\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{e}} + 4\underline{\underline{1}} : \underline{\underline{e}} + 3 = 4e_{ij}^2 + 4\delta_{ij}e_{ji} + 3$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\underline{e}}}\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{C}}.\underline{\underline{C}}\right) = 4\frac{\partial e_{ij}^2}{\partial e_{kl}} + 4\delta_{ij}\frac{\partial e_{ji}}{\partial e_{kl}} = 8e_{ij}\frac{\partial e_{ij}}{\partial e_{kl}} + 4\delta_{ij}\frac{\partial e_{ji}}{\partial e_{kl}}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \underline{\underline{e}}}\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{C}}.\underline{\underline{C}}\right) = 8\underline{\underline{e}} + 4\underline{\underline{1}} = 4\underline{\underline{C}}}$$

Comportement hyperélastique incompressible

- Calcul de $\frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{e}}}$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(I_1^2 - \mathtt{tr}\left(\underline{\underline{C}}.\underline{\underline{C}}\right)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\underline{e}}}\mathtt{tr}\left(\underline{\underline{C}}.\underline{\underline{C}}\right) = 4\underline{\underline{C}}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{e}}} = 2\underline{\underline{1}}$$

$$\boxed{\frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{e}}} = 2I_1\underline{\underline{1}} - 2\underline{\underline{C}}}$$

Comportement hyperélastique incompressible

- Contrainte de Cauchy matériaux incompressibles

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \underline{\underline{F}}.\mathrm{sym}\left(\frac{\partial \Psi(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}\right).{}^t\underline{\underline{F}} + c\underline{\underline{I}} \quad c \text{ indéterminé}$$

- Dérivation

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{e}}} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{e}}} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{e}}}$$

- Calcul

$$\frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{e}}} = 2\underline{\underline{1}}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{e}}} = 2I_1\underline{\underline{1}} - 2\underline{\underline{C}}$$

- D'où

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\rho\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial \Psi}{\partial I_2}\right)\underline{\underline{F}}.{}^t\underline{\underline{F}} - \frac{\partial \Psi}{\partial I_2}\underline{\underline{F}}.{}^t\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}}.{}^t\underline{\underline{F}}\right] + c\underline{\underline{I}}$$

Comportement hyperélastique incompressible

- Tenseur de dilatation de Cauchy gauche

$$\underline{\underline{C}}_g = \underline{\underline{F}}.{}^t\underline{\underline{F}}$$

- D'où

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = 2\rho\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial\Psi}{\partial I_2}\right)\underline{\underline{C}}_g - \frac{\partial\Psi}{\partial I_2}\underline{\underline{C}}_g.\underline{\underline{C}}_g\right] + c\underline{\underline{I}}}$$

- Avec c indéterminée
- Comportement = définir

$$\boxed{\Psi(I_1, I_2)}$$

Comportement hyperélastique (grandes transformations)

| Comportement hyperélastique incompressible

| Comportement hyperélastique compressible

Comportement hyperélastique compressible

- Matériau isotrope avec variation de volume
- Donc Ψ fonction de J

$$\boxed{J = \det\left(\underline{\underline{F}}\right)}$$

- Se ramener au cas précédent avec des invariants à volume constant

$$\overline{\underline{\underline{F}}} = J^{-\frac{1}{3}}\underline{\underline{F}}$$

$$\det\left(\overline{\underline{\underline{F}}}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \overline{\underline{\underline{C}}} = {}^t\,\overline{\underline{\underline{F}}}.\overline{\underline{\underline{F}}}$$

$$\boxed{\overline{I_1} = \mathrm{tr}\left(\overline{\underline{\underline{C}}}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\overline{I_2} = \frac{1}{2}\left(\overline{I_1}^2 - \mathrm{tr}\left(\overline{\underline{\underline{C}}}.\overline{\underline{\underline{C}}}\right)\right)}$$

$$\boxed{\Psi(\overline{I_1}, \overline{I_2}, J)}$$

Comportement hyperélastique compressible

- Contrainte de Cauchy compressibles

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \underline{\underline{F}}.\mathtt{sym}\left(\frac{\partial \Psi(\underline{\underline{e}})}{\partial \underline{\underline{e}}}\right).{}^t\underline{\underline{F}}$$

- Dérivation

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{e}}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \overline{I_1}}\frac{\partial \overline{I_1}}{\partial \underline{\underline{e}}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \overline{I_2}}\frac{\partial \overline{I_2}}{\partial \underline{\underline{e}}} + \frac{\partial \Psi}{\partial J}\frac{\partial J}{\partial \underline{\underline{e}}}$$

- Scalaires
- Tenseurs d'ordre 2 : difficile à calculer

Comportement hyperélastique compressible

- On a $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} = \rho \dot{\Psi}$

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \overline{I_1}} \frac{\mathrm{d}\overline{I_1}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \Psi}{\partial \overline{I_2}} \frac{\mathrm{d}\overline{I_2}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \Psi}{\partial J} \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} = \rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \overline{I_1}} \frac{\mathrm{d}\overline{I_1}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \Psi}{\partial \overline{I_2}} \frac{\mathrm{d}\overline{I_2}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \Psi}{\partial J} \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} \right)$$

- On exprime les dérivées temporelles en fonction de $\underline{\underline{d}}$
- On identifie $\underline{\underline{\sigma}}$
- Notations

$$p = -\frac{\mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}})}{3} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{s}}$$

- p : partie isotrope $\Rightarrow$ associée à J
- $\underline{\underline{s}}$: partie déviatorique $\Rightarrow$ associée à $\overline{I_1}, \overline{I_2}$

Comportement hyperélastique compressible

- Calcul de $\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}$

$$\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{d}}\right) = J^{-1}\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}$$

- D'où

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = J\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{d}}\right)}$$

Comportement hyperélastique compressible

- Calcul de $\frac{\mathrm{d}\overline{I_1}}{\mathrm{d}t}$

$$\underline{\underline{\overline{F}}} = J^{-\frac{1}{3}} \underline{\underline{F}} \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}\left(\underline{\underline{d}}\right) = J^{-1} \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\underline{\overline{F}}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{3} \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} J^{-\frac{4}{3}} \underline{\underline{F}} + J^{-\frac{1}{3}} \frac{\mathrm{d}\underline{\underline{F}}}{\mathrm{d}t}$$

- D'où

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\underline{\overline{F}}}}{\mathrm{d}t} = J^{-\frac{1}{3}} \left(-\frac{1}{3} \mathrm{tr}\left(\underline{\underline{d}}\right) \underline{\underline{F}} + \frac{\mathrm{d}\underline{\underline{F}}}{\mathrm{d}t} \right)$$

- Gradient de vitesse partie symétrique $\underline{\underline{d}}$ et anti-symétrique $\underline{\underline{\Omega}}$

$$\underline{\underline{d}} + \underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{\nabla}}\,\underline{V} = \frac{\mathrm{d}\underline{\underline{F}}}{\mathrm{d}t} . \underline{\underline{F}}^{-1}$$

- D'où

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\underline{F}}}{\mathrm{d}t} = \left(\underline{\underline{d}} + \underline{\underline{\Omega}}\right) . \underline{\underline{F}}$$

Comportement hyperélastique compressible

- On a vu

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\underline{\underline{F}}}}{\mathrm{d}t} = J^{-\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{3}\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{d}}\right)\underline{\underline{F}} + \frac{\mathrm{d}\underline{\underline{F}}}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\underline{F}}}{\mathrm{d}t} = \left(\underline{\underline{d}} + \underline{\underline{\Omega}}\right).\underline{\underline{F}}$$

- D'où

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\underline{\underline{F}}}}{\mathrm{d}t} = J^{-\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{3}\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{d}}\right)\underline{\underline{F}} + \left(\underline{\underline{d}} + \underline{\underline{\Omega}}\right).\underline{\underline{F}}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\underline{\underline{F}}}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\left(-\frac{1}{3}\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{d}}\right) + \underline{\underline{d}}\right)}_{\mathrm{dev}\left(\underline{\underline{d}}\right)} . \underbrace{\left(J^{-\frac{1}{3}}\underline{\underline{F}}\right)}_{\overline{\underline{\underline{F}}}} + \underline{\underline{\Omega}}.\underbrace{\left(J^{-\frac{1}{3}}\underline{\underline{F}}\right)}_{\overline{\underline{\underline{F}}}}$$

Comportement hyperélastique compressible

- Calcul de $\frac{\mathrm{d}\overline{I_1}}{\mathrm{d}t}$

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\underline{\overline{F}}}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{dev}\left(\underline{\underline{d}}\right).\underline{\underline{\overline{F}}} + \underline{\underline{\Omega}}.\underline{\underline{\overline{F}}} \quad \text{et} \quad {}^t\frac{\mathrm{d}\underline{\underline{\overline{F}}}}{\mathrm{d}t} = {}^t\underline{\underline{\overline{F}}}.\mathrm{dev}\left(\underline{\underline{d}}\right) - {}^t\underline{\underline{\overline{F}}}.\underline{\underline{\Omega}}$$

- On a $\underline{\underline{\overline{C}}} = {}^t\underline{\underline{\overline{F}}}.\underline{\underline{\overline{F}}}$

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\underline{\overline{C}}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,{}^t\underline{\underline{\overline{F}}}}{\mathrm{d}t}.\underline{\underline{\overline{F}}} + {}^t\underline{\underline{\overline{F}}}.\frac{\mathrm{d}\underline{\underline{\overline{F}}}}{\mathrm{d}t} = 2\,{}^t\underline{\underline{\overline{F}}}.\mathrm{dev}\left(\underline{\underline{d}}\right).\underline{\underline{\overline{F}}}$$

- Invariant $\overline{I_1} = \mathrm{tr}\left(\underline{\underline{\overline{C}}}\right)$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{I_1}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{d}\underline{\underline{\overline{C}}}}{\mathrm{d}t}\right) = \mathrm{tr}\left(2\,{}^t\underline{\underline{\overline{F}}}.\mathrm{dev}\left(\underline{\underline{d}}\right).\underline{\underline{\overline{F}}}\right)$$

- D'où

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overline{I_1}}{\mathrm{d}t} = 2\left(\underline{\underline{\overline{F}}}.\,{}^t\underline{\underline{\overline{F}}}\right) : \mathrm{dev}\left(\underline{\underline{d}}\right)}$$

Comportement hyperélastique compressible

- Calcul de $\frac{\mathrm{d}\overline{I_2}}{\mathrm{d}t}$

$$\overline{I_2} = \frac{1}{2}\left(\overline{I_1}^2 - \mathrm{tr}\left(\overline{\underline{\underline{C}}}.\overline{\underline{\underline{C}}}\right)\right)$$

- D'où

$$\frac{\mathrm{d}\overline{I_2}}{\mathrm{d}t} = \overline{I_1}\frac{\mathrm{d}\overline{I_1}}{\mathrm{d}t} - \mathrm{tr}\left(\overline{\underline{\underline{C}}}.\frac{\mathrm{d}\overline{\underline{\underline{C}}}}{\mathrm{d}t}\right)$$

- Or

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\underline{\underline{C}}}}{\mathrm{d}t} = 2\,{}^t\overline{\underline{\underline{F}}}.\mathrm{dev}\left(\underline{\underline{d}}\right).\overline{\underline{\underline{F}}}$$

- D'où

$$\mathrm{tr}\left(\overline{\underline{\underline{C}}}.\frac{\mathrm{d}\overline{\underline{\underline{C}}}}{\mathrm{d}t}\right) = 2\mathrm{tr}\left({}^t\overline{\underline{\underline{F}}}.\overline{\underline{\underline{F}}}.{}^t\overline{\underline{\underline{F}}}.\mathrm{dev}\left(\underline{\underline{d}}\right).\overline{\underline{\underline{F}}}\right) = 2\left(\overline{\underline{\underline{F}}}.{}^t\overline{\underline{\underline{F}}}.\overline{\underline{\underline{F}}}.{}^t\overline{\underline{\underline{F}}}\right) : \mathrm{dev}\left(\underline{\underline{d}}\right)$$

Comportement hyperélastique compressible

- Calcul de $\frac{\mathrm{d}\overline{I_2}}{\mathrm{d}t}$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{I_2}}{\mathrm{d}t} = \overline{I_1}\frac{\mathrm{d}\overline{I_1}}{\mathrm{d}t} - 2\left(\overline{\underline{\underline{F}}}.\,{}^t\overline{\underline{\underline{F}}}.\overline{\underline{\underline{F}}}.\,{}^t\overline{\underline{\underline{F}}}\right) : \mathsf{dev}\left(\underline{\underline{d}}\right)$$

- On a

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overline{I_1}}{\mathrm{d}t} = 2\left(\overline{\underline{\underline{F}}}.\,{}^t\overline{\underline{\underline{F}}}\right) : \mathsf{dev}\left(\underline{\underline{d}}\right)}$$

- D'où

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overline{I_2}}{\mathrm{d}t} = 2\left(\overline{I_1}\overline{\underline{\underline{F}}}.\,{}^t\overline{\underline{\underline{F}}} - \overline{\underline{\underline{F}}}.\,{}^t\overline{\underline{\underline{F}}}.\overline{\underline{\underline{F}}}.\,{}^t\overline{\underline{\underline{F}}}\right) : \mathsf{dev}\left(\underline{\underline{d}}\right)}$$

Comportement hyperélastique compressible

- On a

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} = \rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \overline{I_1}} \frac{\mathrm{d}\overline{I_1}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \Psi}{\partial \overline{I_2}} \frac{\mathrm{d}\overline{I_2}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \Psi}{\partial J} \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} \right)$$

- On a montré

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = J \mathrm{tr}\left(\underline{\underline{d}}\right)} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}\overline{I_1}}{\mathrm{d}t} = 2\left(\overline{\underline{\underline{F}}}.{}^t\overline{\underline{\underline{F}}}\right) : \mathrm{dev}\left(\underline{\underline{d}}\right)} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}\overline{I_2}}{\mathrm{d}t} = 2\left(\overline{I_1}\,\overline{\underline{\underline{F}}}.{}^t\overline{\underline{\underline{F}}} - \overline{\underline{\underline{F}}}.{}^t\overline{\underline{\underline{F}}}.\overline{\underline{\underline{F}}}.{}^t\overline{\underline{\underline{F}}}\right) : \mathrm{dev}\left(\underline{\underline{d}}\right)}$$

- On a $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{s}}$

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} = -p\,\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{d}}\right) + \underline{\underline{s}} : \mathrm{dev}\left(\underline{\underline{d}}\right)$$

- Identification

$$\boxed{p = -\underbrace{\rho\,J}_{\rho_0} \frac{\partial \Psi}{\partial J}} \quad \boxed{\underline{\underline{s}} = 2 \underbrace{\rho}_{\rho_0 J^{-1}} \mathrm{dev}\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \overline{I_1}} + \overline{I_1}\frac{\partial \Psi}{\partial \overline{I_2}}\right) \underbrace{\overline{\underline{\underline{F}}}.{}^t\overline{\underline{\underline{F}}}}_{\overline{\underline{\underline{C}}}_g} - \frac{\partial \Psi}{\partial \overline{I_2}} \overline{\underline{\underline{F}}}.{}^t\overline{\underline{\underline{F}}}.\overline{\underline{\underline{F}}}.{}^t\overline{\underline{\underline{F}}}\right]}$$

Comportement hyperélastique compressible

- On a $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{s}}$

$$\boxed{p = -\rho_0 \, \frac{\partial \Psi}{\partial J}} \quad \boxed{\underline{\underline{s}} = 2\rho_0 \, J^{-1} \, \mathsf{dev} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \overline{I_1}} + \overline{I_1} \frac{\partial \Psi}{\partial \overline{I_2}} \right) \underline{\underline{\overline{C}}}_g - \frac{\partial \Psi}{\partial \overline{I_2}} \underline{\underline{\overline{C}}}_g . \underline{\underline{\overline{C}}}_g \right]}$$

- Comportement = définir

$$\boxed{\Psi(\overline{I_1}, \overline{I_2}, J)}$$