Cours ***Géomécanique et Géotechnique Avancée***
Ecole des Ponts Paris Tech –2020

Thermo-Poro-Elasticité

Amade Pouya
ENPC – Novembre 2020

Déformations thermiques des matériaux

Dilatation thermique libre : $\varepsilon = \alpha_T \; \Delta T \; \delta$

α_L : coefficient de dilatation linéaire

Ordre de grandeur :

Matériau	Acier	Béton	Granite
α_L $(1/°C)$	$11.\ 10^{-6}$	$10.\ 10^{-6}$	5 à 9. 10^{-6}

Matériau anisotrope : $\varepsilon = \Delta T \; \alpha_T$

Déformation thermique: $\varepsilon^T = \Delta T \; \alpha_T$

Matériau Thermo-Elastique

Déformation: somme des déformations d'origines mécanique et thermique

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon^M + \varepsilon^T}$$

Déformation thermique : $\varepsilon^T = \Delta T\, \alpha_T$

Déformation mécanique résulte de l'application d'une contrainte.
Elasticité linéaire :

$$\sigma = \mathbb{C} : \varepsilon^M \Longleftrightarrow \varepsilon^M = \mathbb{S} : \sigma$$

<u>Matériau thermoélastique linéaire</u>

$$\boxed{\varepsilon = \mathbb{S} : \sigma + \Delta T\, \alpha_T}$$

$$\boxed{\sigma = \mathbb{C} : (\varepsilon - \varepsilon^T)}$$

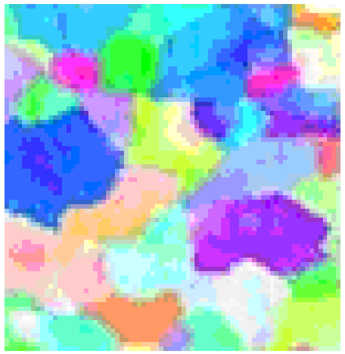
Thermoélasticité linéaire et isotrope :

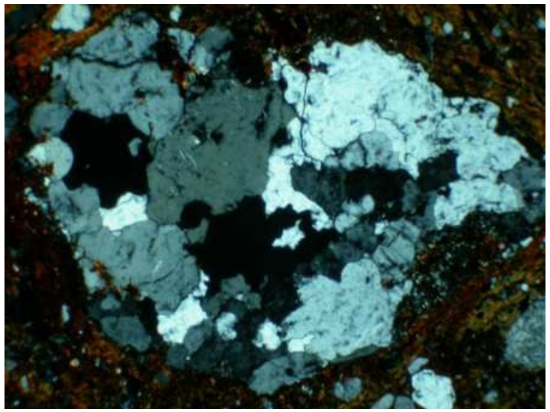
$$\begin{cases} \varepsilon = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma - \dfrac{3\nu}{E}\sigma_m\, \delta + \alpha_T \Delta T\, \delta \\ \sigma = \lambda\, \varepsilon_{\mathrm{vol}}\, \delta + 2\mu\, \varepsilon - 3K\alpha_{\mathrm{T}}\, \Delta T\, \delta \end{cases}$$

Contraintes thermiques

Quand la déformation thermique n'est pas libre, elle génère des contraintes dite *thermiques.*

Dans un matériau hétérogène, comme une roche cristalline composée de minéraux différents avec des coefficients de dilatations différents, un échauffement (ou refroidissement) crée des contraintes thermiques qui peuvent causer une fissuration.

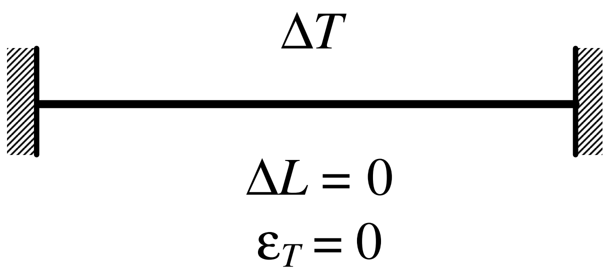




Contraintes thermiques

Quand la déformation thermique n'est pas libre, elle génère des contraintes dite *thermiques*.

Exemple:
barre encastrée aux extrémités et chauffée



Modèle unidimensionnel :

$$\varepsilon^M = \frac{\sigma}{E} \quad , \; \varepsilon^T = \alpha_T \; \Delta T \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T \; = \; 0 \Rightarrow \sigma = -E\alpha_T \Delta T$$

Contrainte thermique : $\sigma^T = -E\,\alpha_T\;\Delta T$

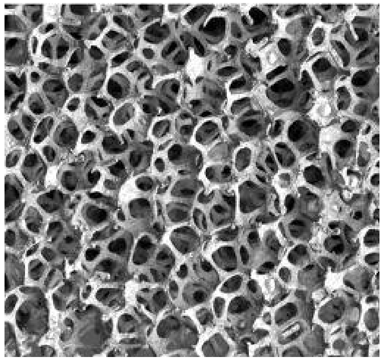
Cas 3D : $\sigma \;=\lambda\,\varepsilon_{\mathrm{vol}}\;\delta + 2\mu\,\varepsilon - 3K\alpha_{\mathrm{T}}\;\Delta T\;\delta$

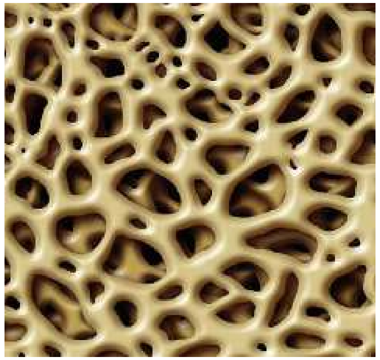
Si la déformation est complètement bloquée :
$\varepsilon=0 \;\rightarrow \sigma^T = -3K\,\alpha_T\;\Delta T\delta$

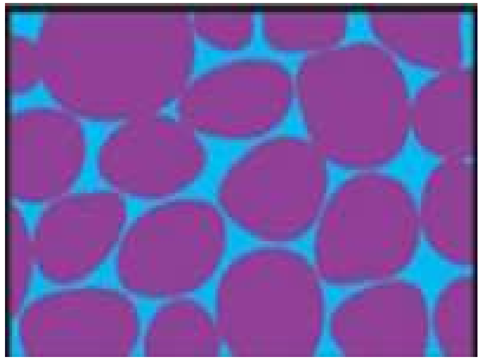
Matériaux poreux

Matériau formé des deux phases, une solide et une fluide. On peut considérer qu'il s'agit d'un solide comprenant des pores remplis par un fluide.

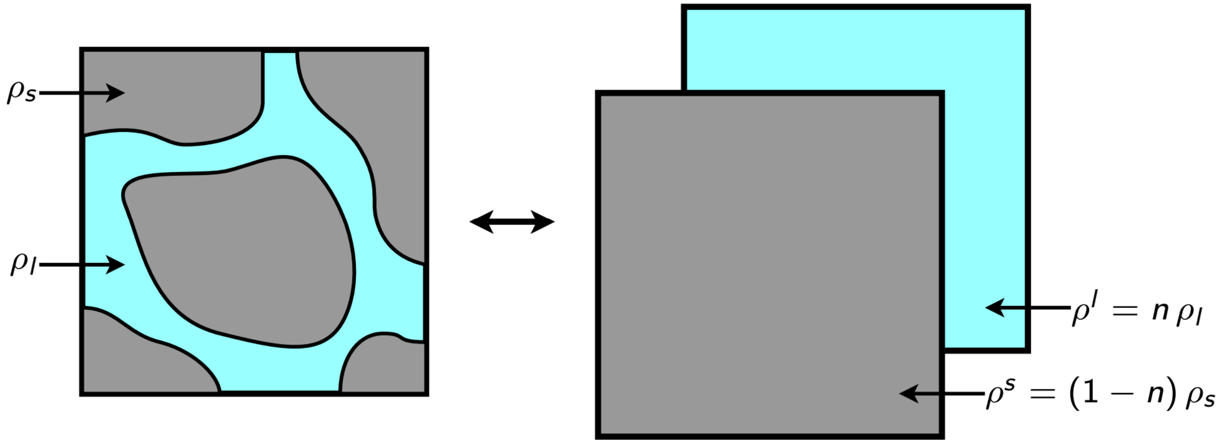
Exemples: sols, roches, béton…







Représentation mécanique: superposition de deux milieux différents et en interaction.

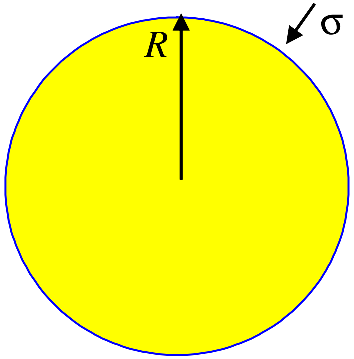


Milieu Poreux : représentation simplifiée

Solid (non poreux)

Changements de géométrie :

Déformation : $\varepsilon = \dfrac{\delta R}{R}$



$$\varepsilon \leftrightarrow \sigma$$

Matériau poreux:

A la déformation totale s'ajoute un degré de liberté de changement géométrique qui est la variation de l'espace poral.

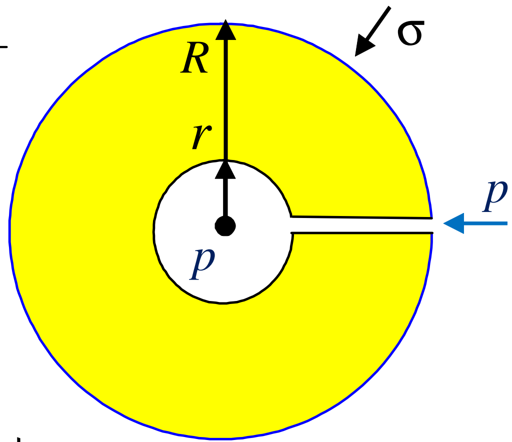
A la contrainte totale s'ajoute un degré de liberté de chargement qui est la pression de pore.

Porosité : $\phi = \dfrac{V_v}{V} = \dfrac{r^3}{R^3}$

Changements de géométrie :

Déformation : $\varepsilon = \dfrac{\delta R}{R}$

Variation de la porosité : $\delta\phi$



$$\boxed{\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \delta\phi \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma \\ p \end{pmatrix}}$$

Milieu Poroélastique Linéaire Isotrope

Equations constitutives:

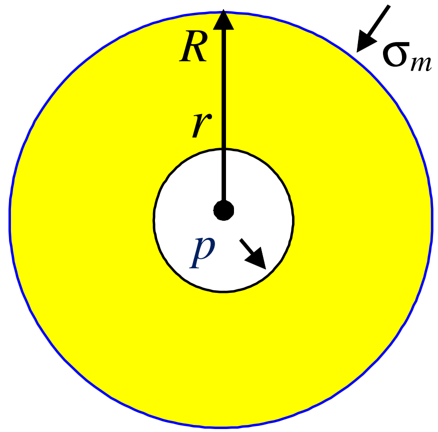
$$\begin{cases} \sigma = \lambda \varepsilon_{vol} \delta + 2\mu\varepsilon - bp\delta \\ \delta\phi = b\varepsilon_{vol} + \dfrac{p}{N} \end{cases}$$

b : coefficient de Biot, $0 \leq b \leq 1$. Ce coefficient exprime l'interaction entre la phase fluide et le solide.
N: Module de Coussy

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{3\nu}{E}\sigma_m \,\delta + \frac{b}{3K}\,p\delta$$

$$\varepsilon_{vol} = \frac{\sigma_m}{K} + b\frac{p}{K}$$

$$\varepsilon_{vol} = 3\frac{\delta R}{R}$$



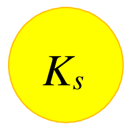
K : module de compressibilité : $K = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}$

λ, μ, E, ν, K : *paramètres d'élasticité drainés*
Ils décrivent les relations entre σ et ε pour une (variation de) pression nulle.

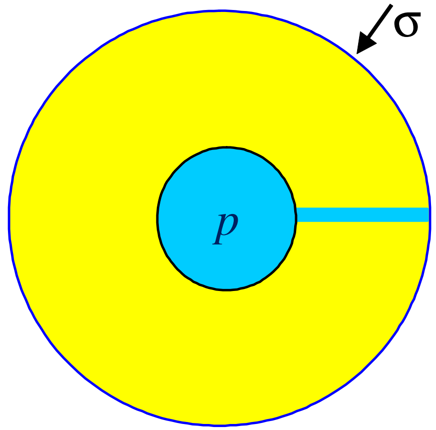
On peut établir pour b et N les relations suivantes:

$$\boxed{b = 1 - \frac{K}{K_s}, \qquad \frac{1}{N} = \frac{b-\phi_0}{K_s}}$$

ϕ_0 : *porosité Lagrangienne (initiale)*
K_s : *Module de compressibilité des grains solides*



Comportement non drainé



L'espace poral est rempli d'un fluide de compressibilité K_f

La masse de fluide ne peut échapper l'espace poral soit du fait des conditions limites étanches soit du fait d'un chargement instantané.

Masse de fluide : $M_f = \rho_f V_f = \rho_f\, \phi\, V_0$

Masse de fluide par unité de volume du squelette : $m_f = \phi\, \rho_f$

On en déduit : $\delta m_f / m_f = \delta \phi / \phi + \delta\rho_f / \rho_f$

Equation d'état du fluide compressible : M_f=cste $\rightarrow \delta V_f / V_f = -p/K_f \rightarrow$ $\boxed{\delta\rho_f / \rho_f = p/K_f}$

Soit donc: $\delta m_f / m_f = \delta \phi / \phi + \delta\rho_f / \rho_f = \delta \phi / \phi + p/K_f$

Ou encore : $\delta m_f / \rho_f = \delta \phi + \phi\, p/K_f$

$$\delta\phi = b\varepsilon_{vol} + \frac{p}{N}$$

$$\boxed{\frac{\delta m_f}{\rho_f} = b\,\varepsilon_{vol} + \frac{p}{M}} \qquad \boxed{\frac{1}{M} = \frac{1}{N} + \frac{\phi}{K_f}}$$

Trajet non drainé : $\delta m_f = 0 \rightarrow \; p = -Mb\, \varepsilon_{vol}$

$$\sigma = \lambda\varepsilon_{vol}\delta + 2\mu\varepsilon - bp\delta$$

$\rightarrow$ Relations ($\sigma \leftrightarrow \varepsilon$) non drainées

Paramètres non drainés

Relations d'élasticité non drainée

$$\boxed{\sigma = \lambda^u \, \varepsilon_{vol} \, \delta \; + 2\mu^u \; \varepsilon}$$

$$\boxed{\lambda^u = \lambda + Mb^2 \,, \qquad \mu^u = \mu}$$

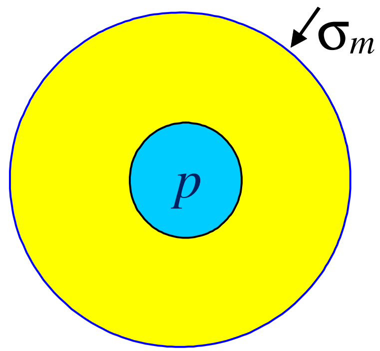
$$\boxed{\varepsilon = \frac{1+\nu^u}{E^u}\sigma - \frac{3\nu^u}{E^u}\sigma_m \, \delta}$$

$$\boxed{\begin{cases} \nu^u = \dfrac{\nu E + (1+\nu)(1-2\nu)Mb^2}{E + 2(1+\nu)(1-2\nu)Mb^2} \\[2ex] E^u = \dfrac{1+\nu^u}{1+\nu} E \end{cases}}$$

$$\boxed{\sigma_m = (3\lambda^u \; + 2\mu^u\,) = K^u \, \varepsilon_{vol}} \qquad \boxed{K^u = K + Mb^2}$$

Coefficient de Skempton:
pression développé sous chargement non drainé par une contrainte isotrope unitaire

$$B_s = -p/\,\sigma_m$$



$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_m &= K^u \, \varepsilon_{vol} \\ p &= -Mb \, \varepsilon_{vol} \end{aligned} \right. \quad \Longrightarrow \quad \boxed{B_s = Mb/K^u}$$

Contrainte effective

$$\sigma = \lambda \varepsilon_{vol}\delta + 2\mu\varepsilon - bp\delta \qquad \rightarrow \qquad \sigma + bp\delta = \lambda\varepsilon_{vol}\delta + 2\mu\varepsilon$$

$$\sigma' = \sigma + bp\delta \qquad ; \qquad \sigma' = \lambda\varepsilon_{vol}\delta + 2\mu\varepsilon$$

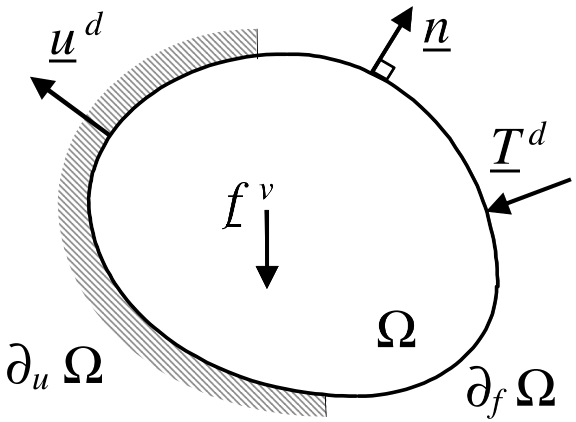
Contrainte effective : $\boxed{\sigma' = \sigma + bp\,\delta}$

Loi de comportement : $\sigma' \leftrightarrow \varepsilon$

Elasticité liéaire $\sigma' = \mathbb{C} : \varepsilon$

Critère de résistance : $f(\sigma') \leq 0$

Mais l'équilibre est vérifiée par la contrainte totale:



$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall \ \underline{x} \in \Omega; & div\, \sigma(\underline{x}) + \underline{f}^v(\underline{x}) = 0 \\ \forall \ \underline{x} \in \partial_f\Omega\,; & \sigma.\underline{n} = \underline{T}^d \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall \ \underline{x} \in \Omega; & div\, \sigma'(\underline{x}) + \underline{f}^v(\underline{x}) - b\nabla p = 0 \\ \forall \ \underline{x} \in \partial_f\Omega\,; & \sigma'.\underline{n} = \underline{T}^d + bp\underline{n} \end{array}}$$