Mécanique Physique des Matériaux

Procédure d'identification

Daniel Weisz-Patrault

Ecole des Ponts

Objectifs généraux

Culture fondamentale

- ☐ Concepts de mécanique en grandes déformations
- ☐ Ecriture des comportements
- ☐ Théorie qui sous-tend le calcul numérique

Objectifs de le séance

- ☐ Procédure d'identification expérimentale
- ☐ Principaux modèles de comportement

Plan de le séance

1| Rappels

2| Identification élastomères faiblement compressibles

3| Principaux modèles

4| Procédure d'identification

Plan de le séance

Rappels

Comportement hyperélastique incompressible

- Invariants du tenseur de Cauchy

$$I_1 = \mathrm{tr}\left[\underline{\underline{C}}\right] \qquad I_2 = \frac{1}{2}\left(I_1^2 - \mathrm{tr}\left[\underline{\underline{C}}.\underline{\underline{C}}\right]\right)$$

- Densité massique d’énergie libre

$$\Psi(\underline{\underline{e}}) = \Psi(I_1, I_2)$$

- Comportement (c quelconque)

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\rho\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2}\right)\underline{\underline{F}}.{}^t\underline{\underline{F}} - \frac{\partial \Psi}{\partial I_2}\underline{\underline{F}}.{}^t\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}}.{}^t\underline{\underline{F}}\right] + c\underline{\underline{1}}$$

Rappels

Comportement hyperélastique compressible

- Définitions

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{X}} \Phi \;\Big|\; \overline{\underline{\underline{F}}} = J^{-\frac{1}{3}} \underline{\underline{F}} \;\Big|\; \text{det}\left[\overline{\underline{\underline{F}}}\right] = 1 \;\Big|\; \overline{\underline{\underline{C}}} = {}^t\overline{\underline{\underline{F}}}.\overline{\underline{\underline{F}}}$$

- Invariants

$$J = \text{det}\left[\underline{\underline{F}}\right] \;\Big|\; \bar{I}_1 = \text{tr}\left[\overline{\underline{\underline{C}}}\right] \;\Big|\; \bar{I}_2 = \frac{1}{2}\left(\bar{I}_1^2 - \text{tr}\left[\overline{\underline{\underline{C}}}.\overline{\underline{\underline{C}}}\right]\right)$$

- Densité massique d'énergie libre

$$\Psi(\underline{e}) = \Psi(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J)$$

- Comportement ($\underline{\underline{\sigma}} = p\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{s}}$)

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial J} \;\Big|\; \underline{\underline{s}} = 2\rho_0 J^{-1} \text{dev}\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_1} + \bar{I}_1 \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_2}\right) \overline{\underline{\underline{F}}}.{}^t\overline{\underline{\underline{F}}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_2} \overline{\underline{\underline{F}}}.{}^t\overline{\underline{\underline{F}}}.\overline{\underline{\underline{F}}}.{}^t\overline{\underline{\underline{F}}}\right]$$

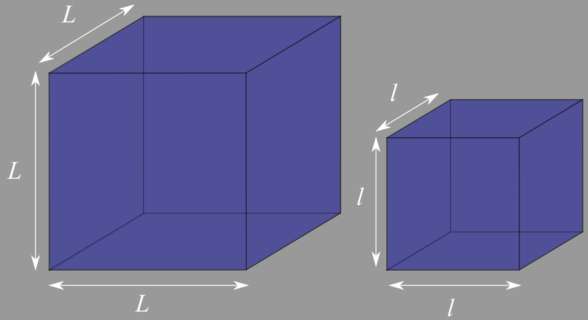
Plan de le séance

Identification élastomères faiblement compressibles

- Différents essais
- Balayage de l'espace $\bar{I}_1, \bar{I}_2, J$
- Intégration de Ψ

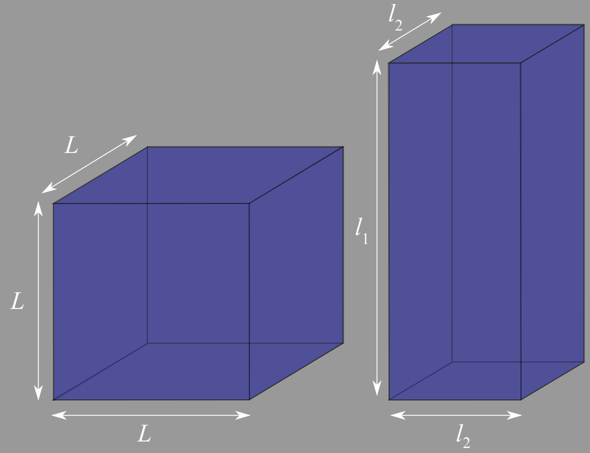
Différents essais

Compression isotrope



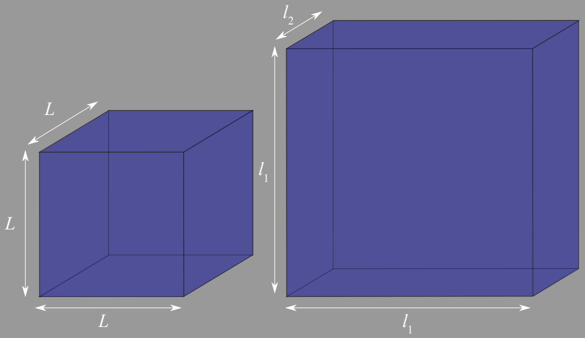
Différents essais

Traction simple



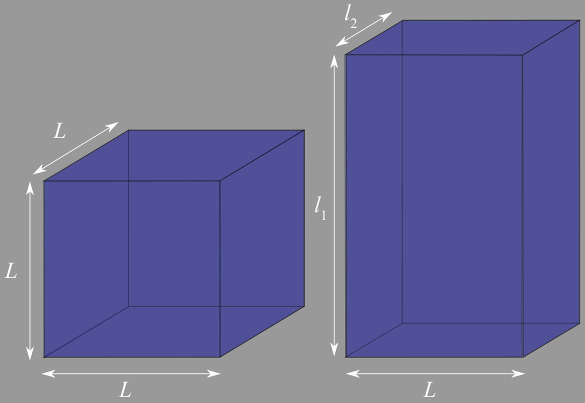
Différents essais

Traction équibiaxiale



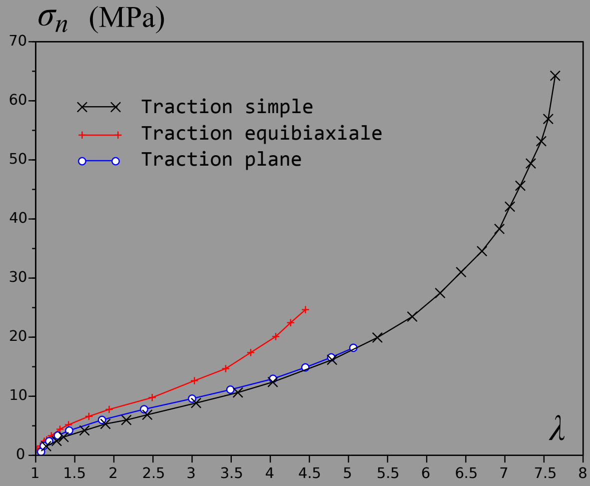
Différents essais

Traction plane



Différents essais

Essais de Treloar (1944)



Identification élastomères faiblement compressibles

- Différents essais
- Balayage de l'espace $\bar{I}_1, \bar{I}_2, J$
- Intégration de Ψ

Balayage de l'espace $\bar{I}_1, \bar{I}_2, J$

Variations de volume faibles

- Transformation

$$\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X}, t) = \lambda \underline{X}$$

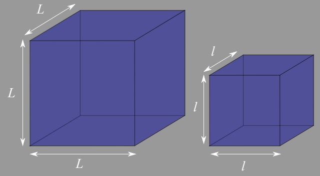
- Gradient

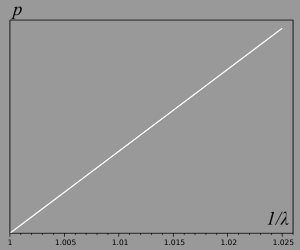
$$\underline{\underline{F}} = \lambda \underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- Invariants ($\underline{\underline{\bar{F}}} = \underline{\underline{1}}$)

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_2 = 3 \mid J = \lambda^3$$

Compression isotrope





Balayage de l'espace $\bar{I}_1, \bar{I}_2, J$

Variations de volume faibles

- Contraintes

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

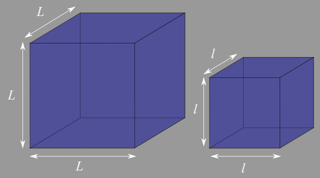
- Comportement

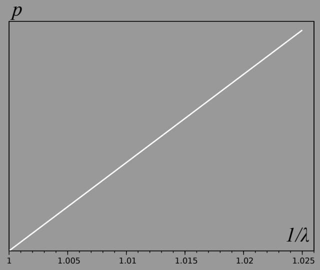
$$p = -\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial J}$$

- Souvent

$$\Psi(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) = \boxed{\Psi_{\mathtt{iso}}(J)} + \Psi_{\mathtt{dev}}(\bar{I}_1, \bar{I}_2)$$

Compression isotrope





Balayage de l'espace $\overline{I}_1, \overline{I}_2, J$

Variations de volume négligées

- ☐ Gradient

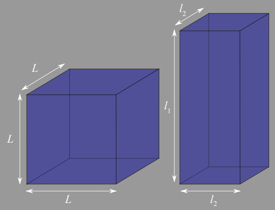
$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

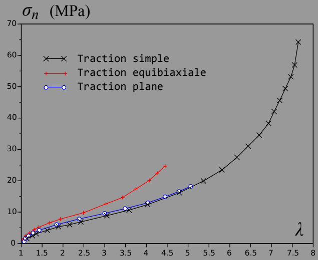
- ☐ Invariants

$$\overline{I}_1 = \lambda^2 + 2\lambda^{-1} \mid \overline{I}_2 = \lambda^{-2} + 2\lambda$$

- ☐ Contrainte : $\frac{F}{S_0}$ en fonction de λ

Traction simple





Balayage de l'espace $\bar{I}_1, \bar{I}_2, J$

Variations de volume négligées

- ☐ Gradient

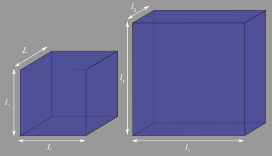
$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2} \end{pmatrix}$$

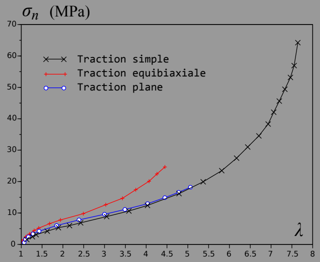
- ☐ Invariants

$$\bar{I}_1 = 2\lambda^2 + \lambda^{-4} \mid \bar{I}_2 = 2\lambda^{-2} + \lambda^4$$

- ☐ Contrainte : $\frac{F}{S_0}$ en fonction de λ

Traction équibiaxiale





Balayage de l'espace $\bar{I}_1, \bar{I}_2, J$

Variations de volume négligées

- Gradient

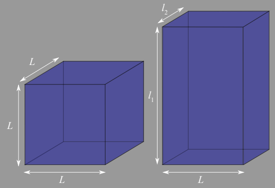
$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

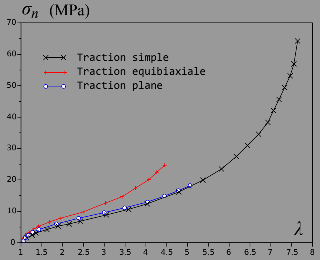
- Invariants

$$\bar{I}_1 = \lambda^2 + \lambda^{-2} + 1 \mid \bar{I}_2 = \lambda^2 + \lambda^{-2} + 1$$

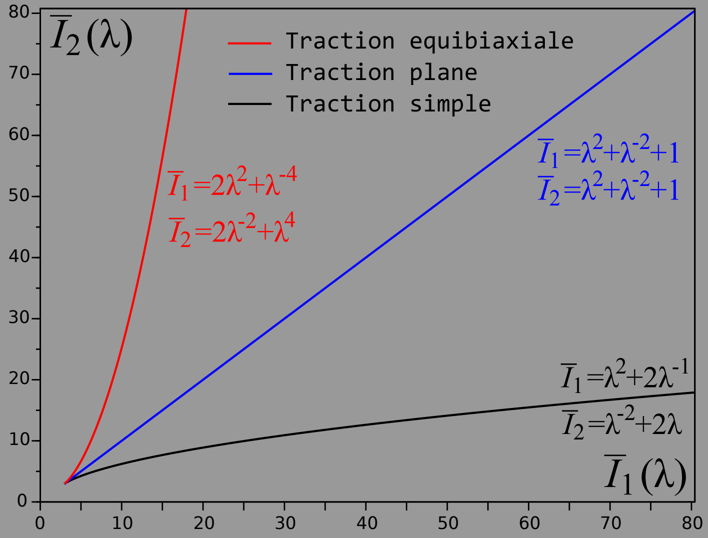
- Contrainte : $\frac{F}{S_0}$ en fonction de λ

Traction plane





Balayage de l'espace $\bar{I}_1, \bar{I}_2, J$



Balayage de l'espace $\bar{I}_1, \bar{I}_2, J$

Variations de volume négligées

- Dans un certain repère

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1} \end{pmatrix}$$

- $\underbrace{\lambda_1}_{\lambda} \geq \underbrace{\lambda_2}_{\lambda^\alpha} \geq \underbrace{\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}}_{\lambda^{-(\alpha+1)}}$

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-(\alpha+1)} \end{pmatrix}$$

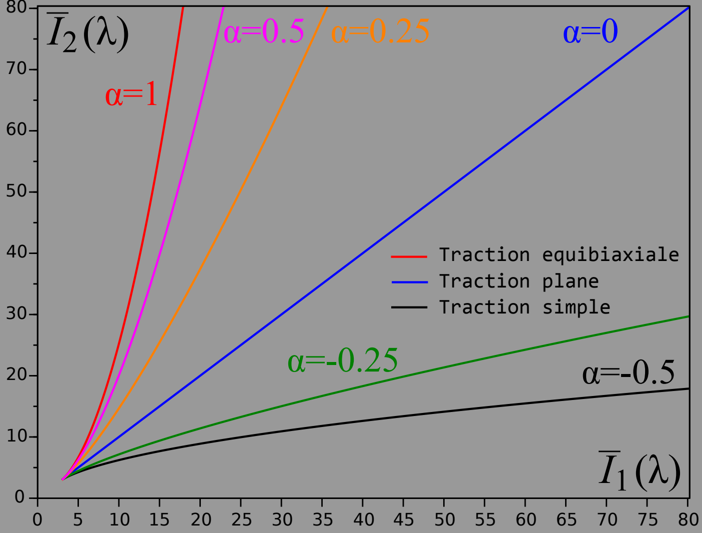
- Domaine possible α

$$1 \geq \alpha \geq -(\alpha+1)$$
$$\Rightarrow \boxed{\alpha \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]}$$

- Invariants

$$\bar{I}_1 = \lambda^2 + \lambda^{2\alpha} + \lambda^{-2(\alpha+1)}$$
$$\bar{I}_2 = \lambda^{-2} + \lambda^{-2\alpha} + \lambda^{2(\alpha+1)}$$

Balayage de l'espace $\bar{I}_1, \bar{I}_2, J$



$\bar{I}_1 = \lambda^2 + 2\lambda^{2\alpha} + \lambda^{-2(\alpha+1)}$ $\bar{I}_2 = \lambda^{-2} + 2\lambda^{-2\alpha} + \lambda^{2(\alpha+1)}$

Identification élastomères faiblement compressibles

- Différents essais
- Balayage de l'espace $\bar{I}_1, \bar{I}_2, J$
- Intégration de Ψ

Intégration de Ψ

Variations de volume négligées

- Gradient

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

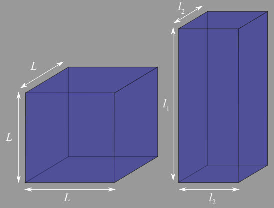
- Invariants

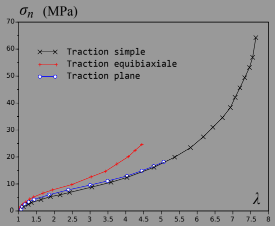
$$\bar{I}_1 = \lambda^2 + 2\lambda^{-1} \mid \bar{I}_2 = \lambda^{-2} + 2\lambda$$

- Section actuelle $S = \dfrac{S_0}{\lambda}$
- Contrainte de Cauchy

$$\sigma_{11} = \frac{F}{S} = \lambda \frac{F}{S_0} \mid \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$$

Traction simple





Intégration de Ψ

Traction simple

- Comportement hyperélastique incrompressible

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\rho\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial\Psi}{\partial I_2}\right)\underline{\underline{F}}.{}^t\underline{\underline{F}} - \frac{\partial\Psi}{\partial I_2}\underline{\underline{F}}.{}^t\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}}.{}^t\underline{\underline{F}}\right] + c\underline{\underline{1}}$$

- D'où

$$\sigma_{11} = \lambda\frac{F}{S_0} = 2\rho_0\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{I}_1} + \left(\lambda^2 + \frac{2}{\lambda}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{I}_2}\right)\lambda^2 - \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{I}_2}\lambda^4\right] + c$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0 = 2\rho_0\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{I}_1} + \left(\lambda^2 + \frac{2}{\lambda}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{I}_2}\right)\lambda^{-1} - \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{I}_2}\lambda^{-2}\right] + c$$

- Elimination de c

$$\boxed{\lambda\frac{F}{S_0} = 2\rho_0\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{I}_1} + \left(\lambda^2 + \frac{2}{\lambda}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{I}_2}\right)(\lambda^2 - \lambda^{-1}) - \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{I}_2}(\lambda^4 - \lambda^{-2})\right]}$$

Intégration de Ψ

Traction simple

- On a montré

$$\lambda \frac{F}{S_0} = 2\rho_0 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_1} + \left(\lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_2} \right) (\lambda^2 - \lambda^{-1}) - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_2} (\lambda^4 - \lambda^{-2}) \right]$$

- Simplification

$$\frac{F}{S_0} = 2\rho_0 (1 - \lambda^{-3}) \left(\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_2} \right)$$

- Invariants

$$\bar{I}_1 = \lambda^2 + 2\lambda^{-1} \mid \bar{I}_2 = \lambda^{-2} + 2\lambda$$

- Dérivation

$$\frac{d\Psi}{d\lambda} = \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_1} + \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_2} = 2(1 - \lambda^{-3}) \left(\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_2} \right)$$

Intégration de Ψ

Traction simple

- ☐ Trajectoires

$$\bar{I}_1 = \lambda^2 + 2\lambda^{-1} \mid \bar{I}_2 = \lambda^{-2} + 2\lambda$$

- ☐ On a montré

$$\boxed{\frac{F}{S_0} = \rho_0 \frac{d\Psi}{d\lambda}}$$

- ☐ Très facile à intégrer

$$\Psi(\lambda) = \int_1^\lambda \frac{F(\lambda)}{\rho_0\, S_0} \mathrm{d}\lambda$$

Intégration de Ψ

Variations de volume négligées

- Gradient

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2} \end{pmatrix}$$

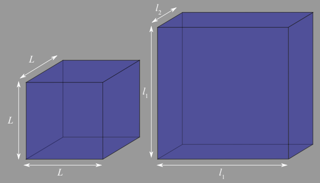
- Invariants

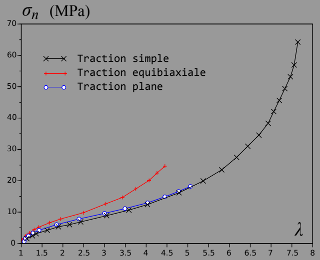
$$\bar{I}_1 = 2\lambda^2 + \lambda^{-4} \mid \bar{I}_2 = 2\lambda^{-2} + \lambda^4$$

- Section actuelle $S = \frac{S_0}{\lambda}$
- Contrainte de Cauchy

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{F}{S} = \lambda \frac{F}{S_0} \mid \sigma_{33} = 0$$

Traction équibiaxiale





Intégration de Ψ

Traction équibiaxiale

- Comportement hyperélastique incrompressible

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\rho\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial\Psi}{\partial I_2}\right)\underline{\underline{F}}.{}^t\underline{\underline{F}} - \frac{\partial\Psi}{\partial I_2}\underline{\underline{F}}.{}^t\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}}.{}^t\underline{\underline{F}}\right] + c\underline{\underline{1}}$$

- D'où

$$\sigma_{11} = \lambda\frac{F}{S_0} = 2\rho_0\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{I}_1} + \left(2\lambda^2+\lambda^{-4}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{I}_2}\right)\lambda^2 - \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{I}_2}\lambda^4\right] + c$$
$$\sigma_{33} = 0 = 2\rho_0\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{I}_1} + \left(2\lambda^2+\lambda^{-4}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{I}_2}\right)\lambda^{-4} - \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{I}_2}\lambda^{-8}\right] + c$$

- Elimination de c

$$\boxed{\lambda\frac{F}{S_0} = 2\rho_0\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{I}_1} + \left(2\lambda^2+\lambda^{-4}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{I}_2}\right)(\lambda^2-\lambda^{-4}) - \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{I}_2}(\lambda^4-\lambda^{-8})\right]}$$

Intégration de Ψ

Traction équibiaxiale

- On a montré

$$\lambda \frac{F}{S_0} = 2\rho_0 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_1} + \left(2\lambda^2 + \lambda^{-4}\right) \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_2} \right) (\lambda^2 - \lambda^{-4}) - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_2} (\lambda^4 - \lambda^{-8}) \right]$$

- Simplification

$$\frac{F}{S_0} = 2\rho_0 (\lambda - \lambda^{-5}) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_1} + \lambda^2 \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_2} \right)$$

- Invariants

$$\bar{I}_1 = 2\lambda^2 + \lambda^{-4} \mid \bar{I}_2 = 2\lambda^{-2} + \lambda^4$$

- Dérivation

$$\frac{d\Psi}{d\lambda} = \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_1} + \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_2} = 4(\lambda - \lambda^{-5}) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_1} + \lambda^2 \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_2} \right)$$

Intégration de Ψ

Traction équibiaxiale

- Trajectoires

$$\bar{I}_1 = 2\lambda^2 + \lambda^{-4} \;\Big|\; \bar{I}_2 = 2\lambda^{-2} + \lambda^4$$

- On a montré

$$\boxed{\frac{F}{S_0} = \frac{1}{2}\rho_0 \frac{d\Psi}{d\lambda}}$$

- Très facile à intégrer

$$\Psi(\lambda) = 2\int_1^\lambda \frac{F(\lambda)}{\rho_0\, S_0}\mathsf{d}\lambda$$

Intégration de Ψ

Variations de volume négligées

- Gradient

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

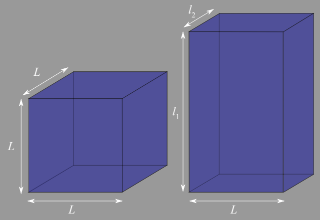
- Invariants

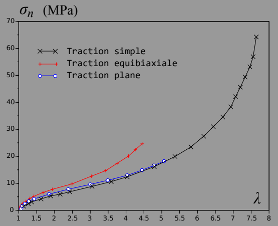
$$\bar{I}_1 = \lambda^2 + \lambda^{-2} + 1 \mid \bar{I}_2 = \lambda^2 + \lambda^{-2} + 1$$

- Section actuelle $S = \frac{S_0}{\lambda}$
- Contrainte de Cauchy

$$\sigma_{11} = \frac{F}{S} = \lambda \frac{F}{S_0} \mid \sigma_{33} = 0 \mid \sigma_{22} = ?$$

Traction plane





Intégration de Ψ

Traction plane

- Comportement hyperélastique incrompressible

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\rho\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial\Psi}{\partial I_2}\right)\underline{\underline{F}}.{}^t\underline{\underline{F}} - \frac{\partial\Psi}{\partial I_2}\underline{\underline{F}}.{}^t\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}}.{}^t\underline{\underline{F}}\right] + c\underline{\underline{1}}$$

- D'où

$$\sigma_{11} = \lambda\frac{F}{S_0} = 2\rho_0\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{I}_1} + \left(\lambda^2+\lambda^{-2}+1\right)\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{I}_2}\right)\lambda^2 - \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{I}_2}\lambda^4\right] + c$$
$$\sigma_{33} = 0 = 2\rho_0\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{I}_1} + \left(\lambda^2+\lambda^{-2}+1\right)\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{I}_2}\right)\lambda^{-2} - \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{I}_2}\lambda^{-4}\right] + c$$

- Elimination de c

$$\boxed{\lambda\frac{F}{S_0} = 2\rho_0\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{I}_1} + \left(\lambda^2+\lambda^{-2}+1\right)\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{I}_2}\right)(\lambda^2-\lambda^{-2}) - \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{I}_2}(\lambda^4-\lambda^{-4})\right]}$$

Intégration de Ψ

Traction plane

- On a montré

$$\lambda \frac{F}{S_0} = 2\rho_0 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_1} + \left(\lambda^2 + \lambda^{-2} + 1 \right) \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_2} \right) (\lambda^2 - \lambda^{-2}) - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_2} (\lambda^4 - \lambda^{-4}) \right]$$

- Simplification

$$\frac{F}{S_0} = 2\rho_0 (\lambda - \lambda^{-3}) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_2} \right)$$

- Invariants

$$\bar{I}_1 = \lambda^2 + \lambda^{-2} + 1 \;\Big|\; \bar{I}_2 = \lambda^2 + \lambda^{-2} + 1$$

- Dérivation

$$\frac{d\Psi}{d\lambda} = \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_1} + \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_2} = 2(\lambda - \lambda^{-3}) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{I}_2} \right)$$

Intégration de Ψ

Traction plane

- Trajectoires

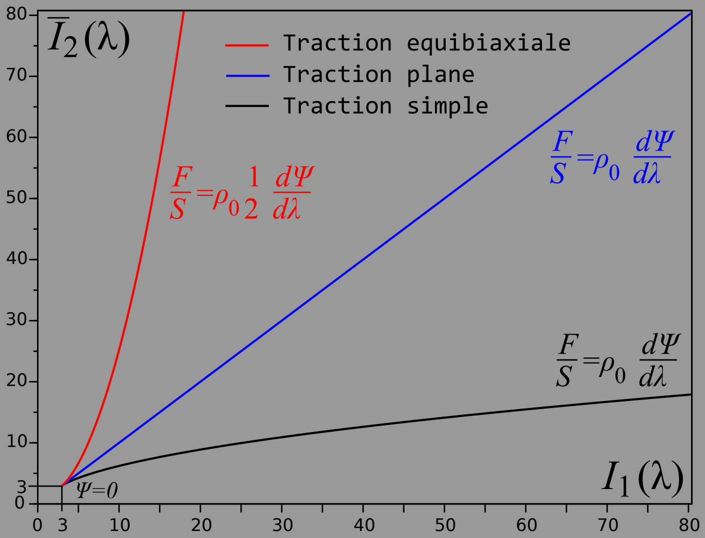
$$\bar{I}_1 = \lambda^2 + \lambda^{-2} + 1 \;\Big|\; \bar{I}_2 = \lambda^2 + \lambda^{-2} + 1$$

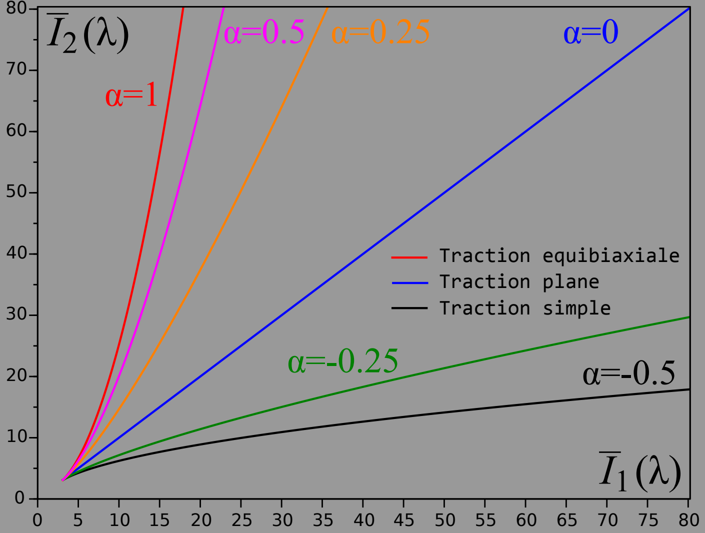
- On a montré

$$\boxed{\frac{F}{S_0} = \rho_0 \frac{d\Psi}{d\lambda}}$$

- Très facile à intégrer

$$\Psi(\lambda) = \int_1^\lambda \frac{F(\lambda)}{\rho_0\, S_0} \mathrm{d}\lambda$$


$\bar{I}_2(\lambda)$
Traction equibiaxiale
Traction plane
Traction simple
$\frac{F}{S} = \rho_0 \frac{1}{2} \frac{d\Psi}{d\lambda}$
$\frac{F}{S} = \rho_0 \frac{d\Psi}{d\lambda}$
$\frac{F}{S} = \rho_0 \frac{d\Psi}{d\lambda}$
$\Psi = 0$
$I_1(\lambda)$
0 3 10 20 30 40 50 60 70 80
0 3 10 20 30 40 50 60 70 80



$\overline{I}_1=\lambda^2+2\lambda^{2\alpha}+\lambda^{-2(\alpha+1)}$ $\overline{I}_2=\lambda^{-2}+2\lambda^{-2\alpha}+\lambda^{2(\alpha+1)}$

Identification élastomères faiblement compressibles

Ces essais sont, à l'évidence, insuffisants pour déterminer le comportement si l'on ne fait pas d'hypothèses complémentaires.

Ces hypothèses portent sur la forme de $\Psi(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J)$.

Plan de le séance

Principaux modèles

Formes ne dépendant que du premier invariant

- Formes polynomiales réduites
  - $N = 1$: Néo-Hookéen
  - $N = 3$: Yeoh
- Modèle physique : Arruda-Boyce (1993)

Formes dépendant des deux invariants

- Formes polynomiales
  - $N = 1$: Mooney-Rivlin
- Modèle physique : Van Der Waals

Formes écrites à l'aide des élongations principales

- Ogden

Principaux modèles

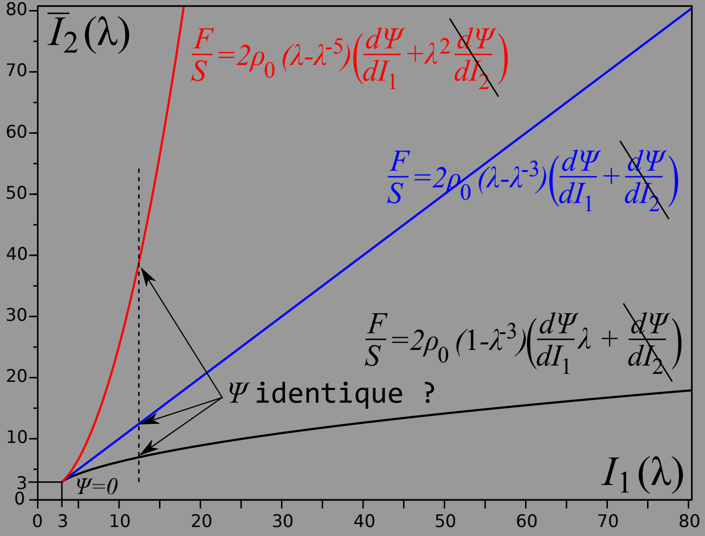
- Formes dépendant du premier invariant
- Formes dépendant des deux invariants
- Formes écrites à l’aide des élongations principales

Formes dépendant du premier invariant

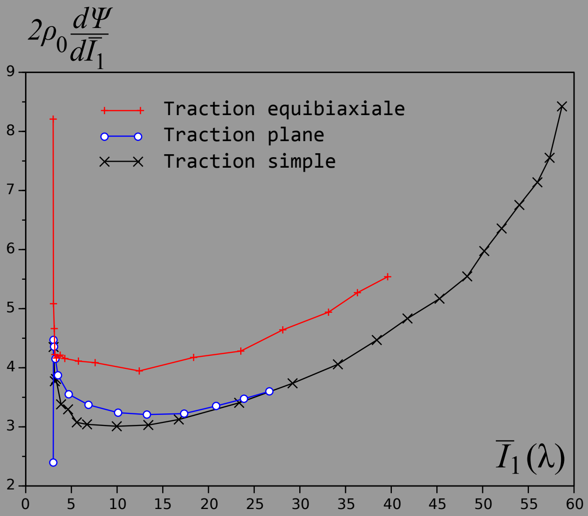
La dépendance par rapport au deuxième invariant est très faible par rapport à celle du premier et est de plus difficile à mesurer

YEOH (1993)

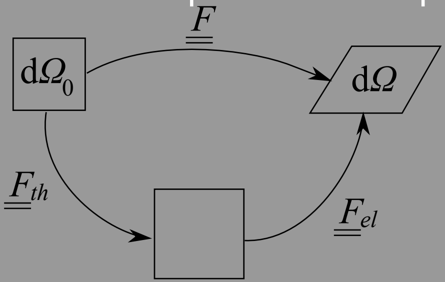
Formes dépendant du premier invariant



Formes dépendant du premier invariant



Formes dépendant du premier invariant



- Décomposition

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}_{el} . \underline{\underline{F}}_{th} \Rightarrow \boxed{J = J_{el}\, J_{th}}$$

Formes polynomiales réduites de degré N

$$\boxed{\rho_0 \Psi(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) = \sum_{k=1}^{N} C_{k0} \left(\bar{I}_1 - 3\right)^k + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{D_k} \left(J_{el} - 1\right)^{2k}}$$

- Module de cisaillement initial : $\mu_0 = 2\, C_{10}$
- Module de compressibilité initial : $k_0 = \frac{2}{D_1}$

Formes dépendant du premier invariant

Comportement Néo-Hookéen (N=1)

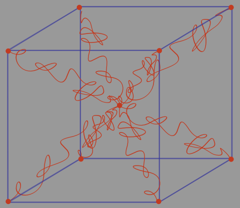
$$\boxed{\rho_0 \Psi(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) = C_{10}\left(\bar{I}_1 - 3\right) + \frac{1}{D_1}\left(J_{el} - 1\right)^2}$$

Comportement de Yeoh (N=3)

$$\boxed{\rho_0 \Psi(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) = \sum_{k=1}^{3} C_{k0}\left(\bar{I}_1 - 3\right)^k + \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{D_k}\left(J_{el} - 1\right)^{2k}}$$

Formes dépendant du premier invariant

Modèle physique : Arruda-Boyce



- Physique statistique
- VER cubique
- 8 chaînes
- Développement tronqué à l'ordre 5
- λ_m : élongation de blocage de chaine

$$\boxed{\rho_0 \Psi(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) = \mu_0 \sum_{k=1}^{5} \frac{C_k}{\lambda_m^{2(k-1)}} \left(\bar{I}_1^k - 3^k\right) + \frac{k_0}{2} \left[\frac{\left(J_{el}^2 - 1\right)}{2} - \ln\left(J_{el}\right) \right]}$$

$$C_1 = \frac{1}{2} \;\Big|\; C_2 = \frac{1}{20} \;\Big|\; C_3 = \frac{11}{1050} \;\Big|\; C_4 = \frac{19}{7050} \;\Big|\; C_5 = \frac{519}{673750}$$

Souvent le meilleur modèle de comportement si on ne dispose que d'essai de traction simple.

Principaux modèles

- Formes dépendant du premier invariant
- Formes dépendant des deux invariants
- Formes écrites à l'aide des élongations principales

Formes dépendant des deux invariants

Formes polynomiales réduites de degré N

$$\boxed{\rho_0 \Psi(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) = \sum_{j+k=1}^{N} C_{jk} \left(\bar{I}_1 - 3\right)^j \left(\bar{I}_2 - 3\right)^k + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{D_k} \left(J_{el} - 1\right)^{2k}}$$

- Module de cisaillement initial : $\mu_0 = 2\left(C_{10} + C_{01}\right)$
- Module de compressibilité initial : $k_0 = \frac{2}{D_1}$

Comportement de Mooney-Rivlin (N=1)

$$\boxed{\rho_0 \Psi(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) = C_{10} \left(\bar{I}_1 - 3\right) + C_{01} \left(\bar{I}_2 - 3\right) + \frac{1}{D_1} \left(J_{el} - 1\right)^2}$$

Formes dépendant des deux invariants

Modèle physique : Van Der Waals

$$\boxed{\begin{aligned}\rho_0\Psi(\bar{I}_1,\bar{I}_2,J) = \quad & \mu_0\left[-(\lambda_m^2-3)(\ln(1-\eta)+\eta)-\frac{2}{3}a\left(\frac{\widetilde{I}-3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right] \\ & +\frac{k_0}{2}\left[\frac{(J_{el}^2-1)}{2}-\ln\left(J_{el}\right)\right]\end{aligned}}$$

$$\widetilde{I} = (1-\beta)\bar{I}_1+\beta\bar{I}_2, \quad \beta\in[0,1]$$

$$\eta = \left(\frac{\widetilde{I}-3}{\lambda_m^2-3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

- λ_m : élongation de blocage de chaine
- a : paramètre d'interaction

Principaux modèles

- Formes dépendant du premier invariant
- Formes dépendant des deux invariants
- Formes écrites à l'aide des élongations principales

Formes écrites à l'aide des élongations principales

Modèle d'Ogden

- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$: élongations principales et $\overline{\lambda}_k = J^{-\frac{1}{3}} \lambda_k$

$$\boxed{\rho_0 \Psi(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) = \sum_{k=1}^{N} \frac{2\mu_k}{\alpha_k^2} \left(\overline{\lambda}_1^{\alpha_k} + \overline{\lambda}_2^{\alpha_k} + \overline{\lambda}_3^{\alpha_k} - 3\right) + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{D_k} (J_{el} - 1)^{2k}}$$

- Module de cisaillement initial : $\mu_0 = \sum_{k=1}^{N} \mu_k$
- Module de compressibilité initial : $k_0 = \dfrac{2}{D_1}$
- $N = 2,\ \alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = -2 \Rightarrow$ Mooney-Rivlin
- $N = 1,\ \alpha_1 = 2 \Rightarrow$ Néo-Hookéen

Plan de le séance

Procédure d'identification

- Méthode inverse
- Identification à partir de la traction simple
- Identification à partir de tous les essais

Méthode inverse

Mesures

- ☐ Elongations mesurées : $(\lambda_i^m)_{i\in\{1,\cdots,I\}}$
- ☐ Forces mesurées : $(F_i^m)_{i\in\{1,\cdots,I\}}$

Calculs

- ☐ Paramètres du modèle : $P = (P_1,\cdots,P_N)$
- ☐ Invariants calculés : $\overline{I}_1^c(\lambda_i^m)$, $\overline{I}_2^c(\lambda_i^m)$, $J(\lambda_i^m)$
- ☐ Traction simple, équibiaxiale, plane $F_i^c(P) = F(\lambda_i^m, P) = \rho_0 S_0 \frac{d\Psi}{d\lambda}(\lambda_i^m, P)$

Ecart quadratique aux mesures (pondéré)

$$E(P) = \sum_{i=1}^{I} p_i \left(F_i^m - F_i^c(P)\right)^2$$

Méthode inverse

Identification des paramètres modèles

$$\boxed{P = \underset{P^* \in \mathcal{P}}{\texttt{argmin}}\, E(P^*) = \sum_{i=1}^{I} p_i \left(F_i^m - F_i^c(P^*)\right)^2}$$

- ☐ Poids p_i : permet de discriminer les mesures.

$$\forall k \in \{1, \cdots, N\}\,,\ \frac{\partial E(P^*)}{\partial P_k} = 0 \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{I} p_i \left(F_i^m - F_i^c(P^*)\right) \frac{\partial F_i^c(P^*)}{\partial P_k} = 0}$$

- ☐ Si la relation $F_i^c(P^*)$ est linéaire

$$F_i^c(P^*) = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} P_j^* \qquad \frac{\partial F_i^c(P^*)}{\partial P_k} = A_{ik}$$

Méthode inverse

Identification des paramètres modèles

- Minimisation

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{N} A_{ik}\, p_i\, A_{ij}\, P_j^* = \sum_{i=1}^{I} A_{ik}\, p_i\, F_i^m$$

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{N} \underbrace{\sqrt{p_i}\, A_{ik}}_{B_{ik}}\, \underbrace{\sqrt{p_i}\, A_{ij}}_{B_{ij}}\, P_j^* = \sum_{i=1}^{I} \underbrace{\sqrt{p_i}\, A_{ik}}_{B_{ik}}\, \underbrace{\sqrt{p_i}\, F_i^m}_{\underline{F}_p^m}$$

- D'où :

$$\boxed{{}^t\underline{\underline{B}}.\underline{\underline{B}}.\underline{P}^* = {}^t\underline{\underline{B}}.\underline{F}_p^m}$$

- Autre vision (cas linéaire uniquement)

$$\forall i \in \{1, \cdots, I\},\ \sqrt{p_i}\, F_i^m = \sqrt{p_i}\, F_i^c(P^*) = \sum_{j=1}^{N} \sqrt{p_i}\, A_{ij} P_j^*$$

Méthode inverse

Identification des paramètres modèles

- ☐ Autre vision (cas linéaire uniquement) $\forall i \in \{1, \cdots, I\}$

$$\boxed{\underline{\underline{B}}.\underline{P}^* = \underline{F}_p^m}$$

- ☐ Opérateur $\underline{\underline{B}}$: non carré (I lignes et N colonnes)
- ☐ Solution approchée : identique à minimiser l'écart quadratique

$$\underbrace{{}^t\underline{\underline{B}}.\underline{\underline{B}}}_{\text{carré}}.\underline{P}^* = {}^t\underline{\underline{B}}.\underline{F}_p^m$$

- ☐ Inversion

$$\boxed{\underline{P}^* = \left({}^t\underline{\underline{B}}.\underline{\underline{B}}\right)^{-1}.{}^t\underline{\underline{B}}.\underline{F}_p^m}$$

Méthode inverse

Identification des paramètres modèles

- Valeurs propres de ${}^t\underline{\underline{B}}.\underline{\underline{B}}$: $(\gamma_1^2 \geq \cdots \geq \gamma_N^2 \geq 0)$
- Valeurs singulières de $\underline{\underline{B}}$: $(\gamma_1 \geq \cdots \geq \gamma_N \geq 0)$
- Notion de conditionnement

$$\boxed{\text{cond}\left(\underline{\underline{B}}\right) = \frac{\gamma_1}{\gamma_N} \geq 1}$$

- Problème linéaire $\underline{\underline{B}}.\underline{x} = \underline{y}$
- Erreur $\underline{y} + \underline{y}_\epsilon$ tel que $\left\|\underline{y}_\epsilon\right\| / \left\|\underline{y}\right\| = \epsilon \ll 1$

$$\underline{x}_\epsilon = \left({}^t\underline{\underline{B}}.\underline{\underline{B}}\right)^{-1} . {}^t\underline{\underline{B}}.\underline{y}_\epsilon$$

Méthode inverse

Identification des paramètres modèles

- ☐ Dans le pire des cas

$$\underline{x}_\epsilon = \frac{\left\|\underline{y}_\epsilon\right\|}{\gamma_N} \text{ et } \underline{x} = \frac{\left\|\underline{y}\right\|}{\gamma_1}$$

- ☐ Conditionnement

$$\boxed{\frac{\|\underline{x}_\epsilon\|}{\|\underline{x}\|} = \text{cond}\left(\underline{\underline{B}}\right)\frac{\left\|\underline{y}_\epsilon\right\|}{\left\|\underline{y}\right\|}}$$

Méthode inverse

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \quad \texttt{avec cond}\left(\underline{\underline{A}}\right) = 2984$$

$$\lambda_1 = 30.29, \lambda_2 = 3.86, \lambda_3 = 0.84, \lambda_4 = 0.01$$

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \quad \texttt{et} \quad \underline{y}_\epsilon = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \texttt{et} \quad \underline{x} + \underline{x}_\epsilon = \begin{pmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -1.1 \end{pmatrix}$$

Méthode inverse

Identification des paramètres modèles

- Si la relation $F_i^c(P^*)$ est non-linéaire
- Algorithmes de minimisation

$$E(P) = \sum_{i=1}^{I} p_i \left(F_i^m - F_i^c(P)\right)^2$$

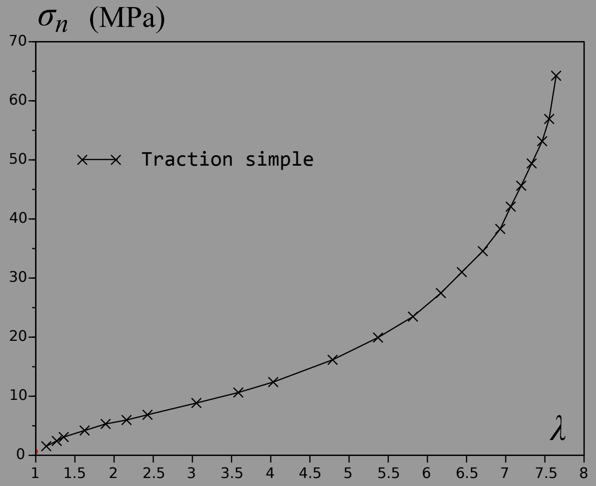
- Algorithmes sans gradient
  - Simplex
- Algorithmes avec gradient
  - Quasi-newtonnien
  - Gradient conjugué
  - ...
- Calcul du gradient
  - Etat adjoint

Procédure d'identification

- Méthode inverse
- Identification à partir de la traction simple
- Identification à partir de tous les essais

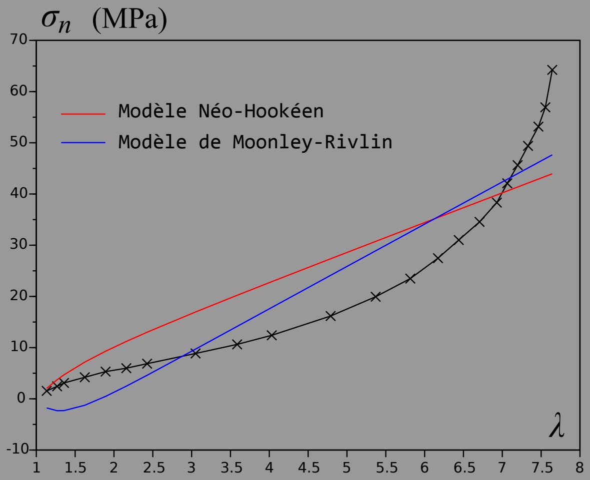
Identification à partir de la traction simple

Essais de Treloar (1944)



Identification à partir de la traction simple

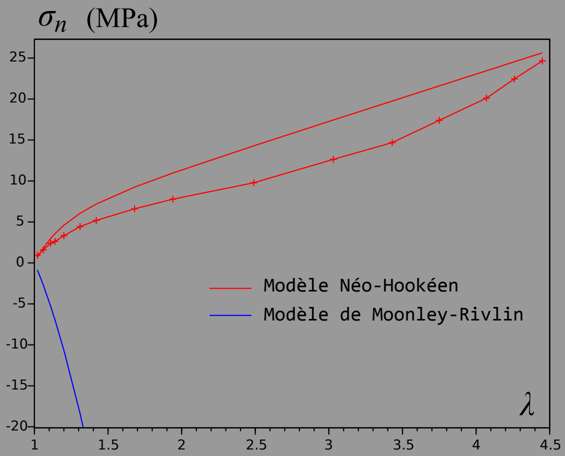
Néo-Hookéen et Moonley-Rivlin



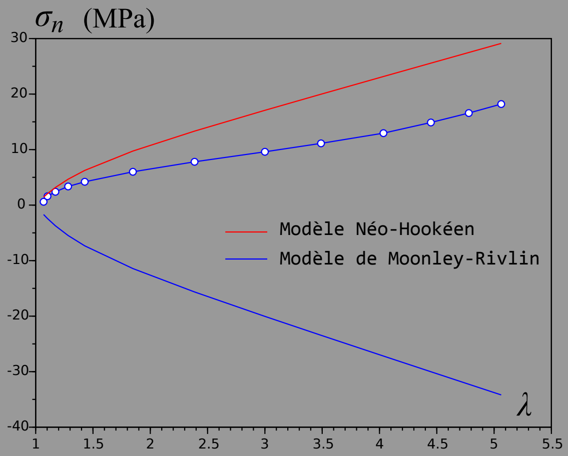
Identification à partir de la traction simple

Néo-Hookéen et Moonley-Rivlin

Traction équibiaxiale

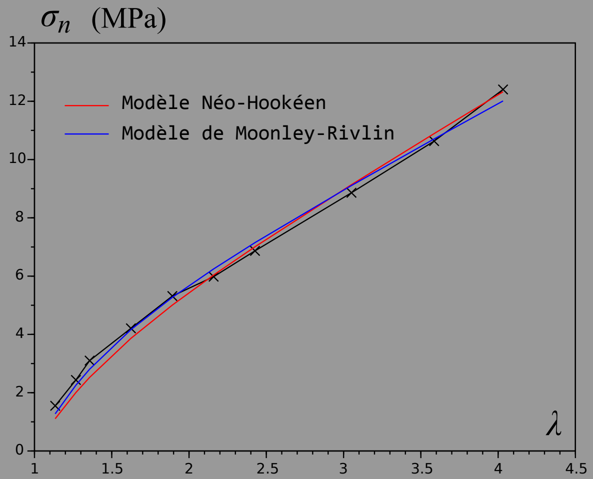


Traction plane



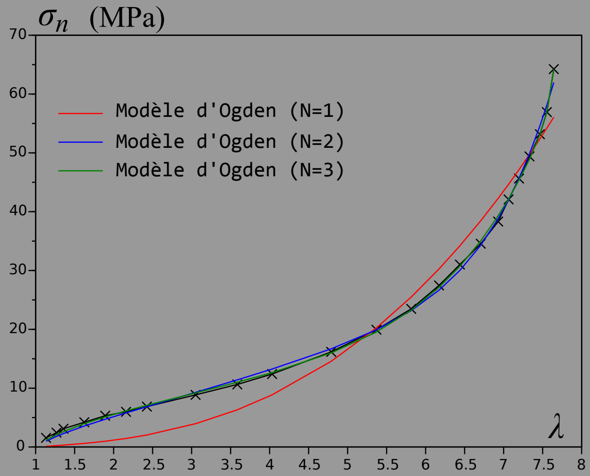
Identification à partir de la traction simple

Néo-Hookéen et Moonley-Rivlin



Identification à partir de la traction simple

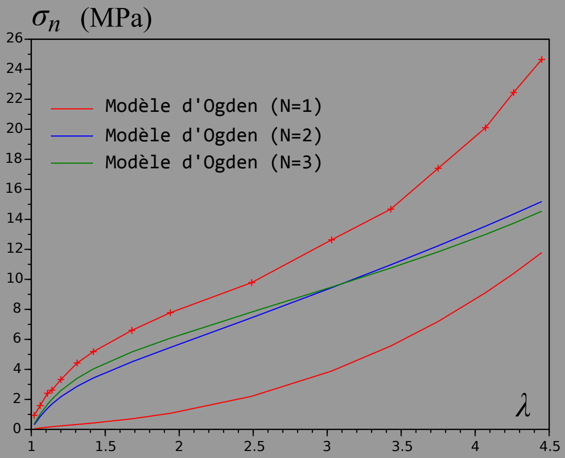
Ogden



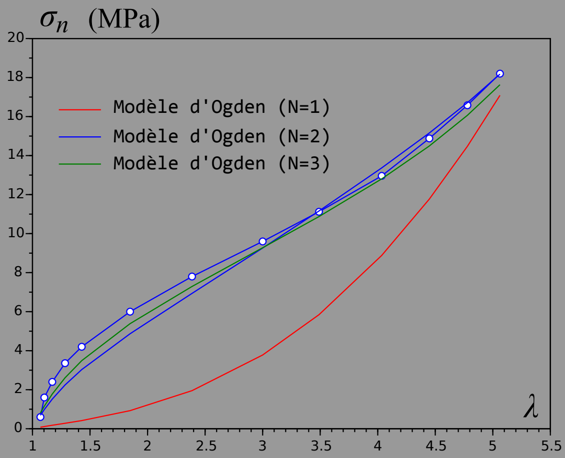
Identification à partir de la traction simple

Ogden

Traction équibiaxiale

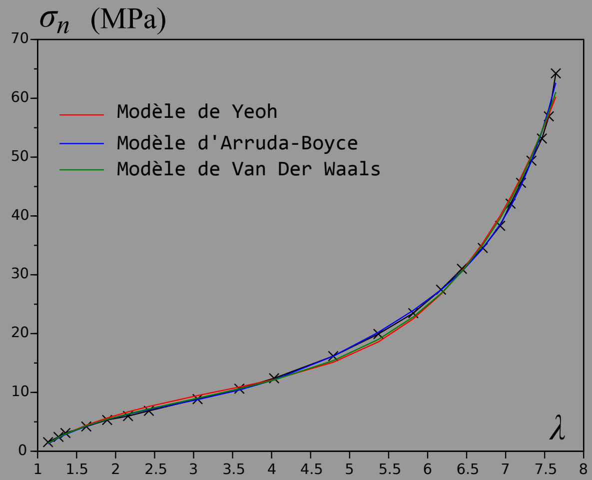


Traction plane



Identification à partir de la traction simple

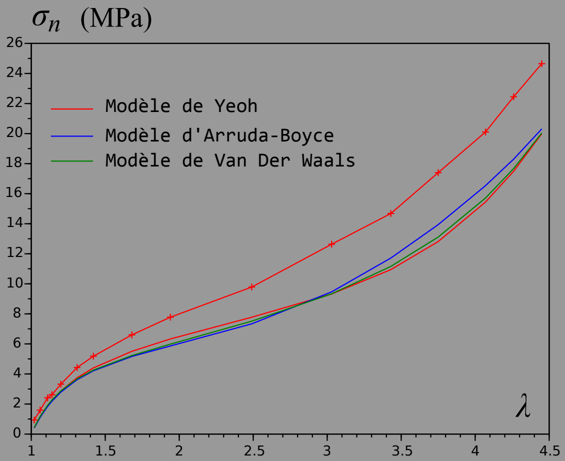
Arruda-Boyce, Van Der Waals et Yeoh



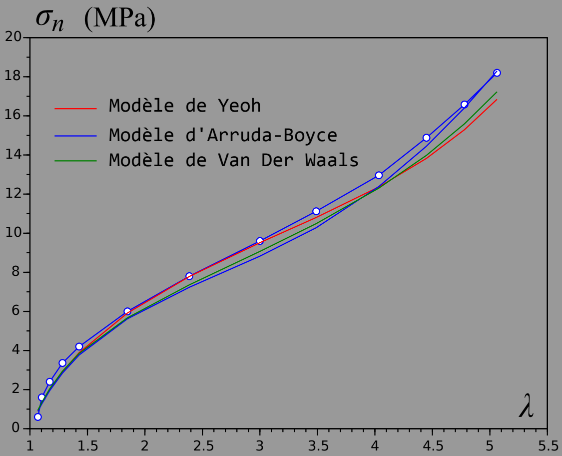
Identification à partir de la traction simple

Arruda-Boyce, Van Der Waals et Yeoh

Traction équibiaxiale



Traction plane



Identification à partir de la traction simple

Bilan

- Peu d'impact de $\bar{I}_2$

- Identification sur un essai
  $\Rightarrow$Ne garantit pas d'être précis sur d'autres essais

- Modèles simples
  $\Rightarrow$Identification sur une faible plage d'élongations

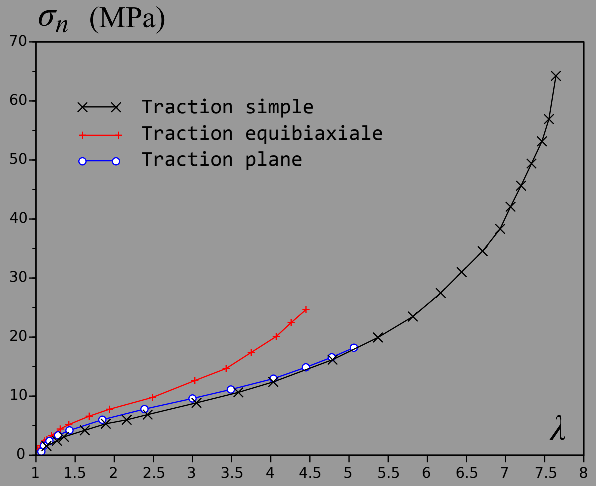
- Attention : ne pas extrapoler hors des zones identifiées

Procédure d’identification

- Méthode inverse
- Identification à partir de la traction simple
- Identification à partir de tous les essais

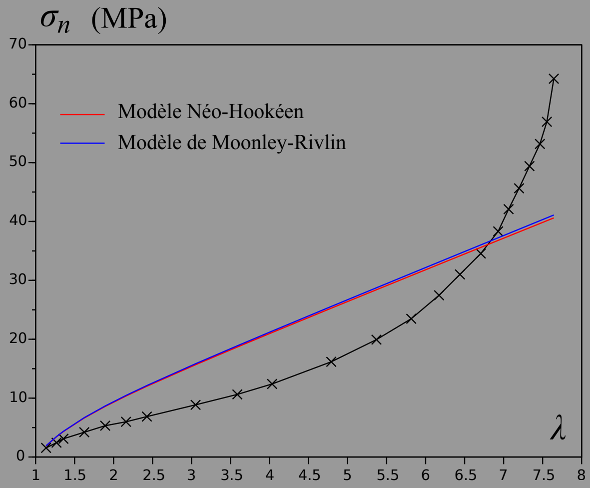
Identification à partir de tous les essais

Essais de Treloar (1944)



Identification à partir de tous les essais

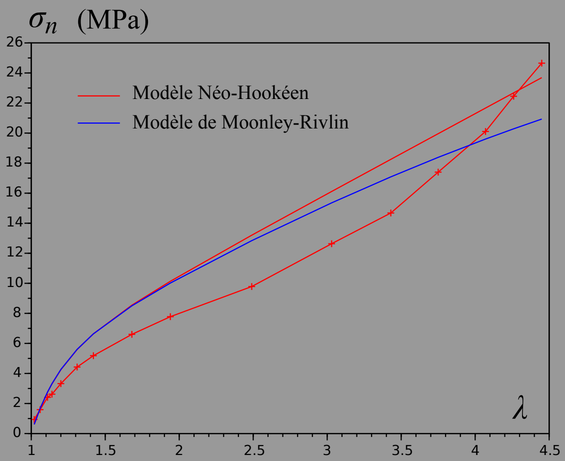
Néo-Hookéen et Moonley-Rivlin



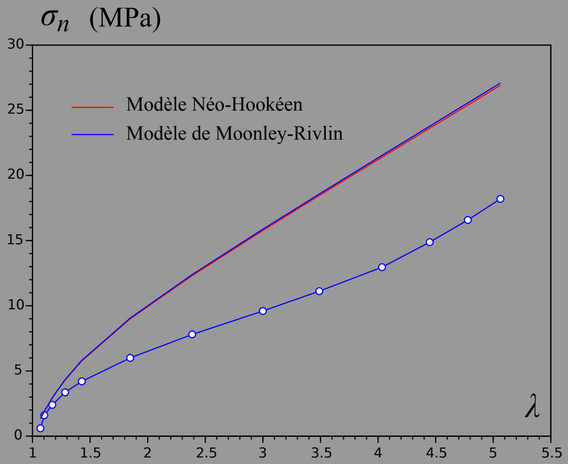
Identification à partir de tous les essais

Néo-Hookéen et Moonley-Rivlin

Traction équibiaxiale

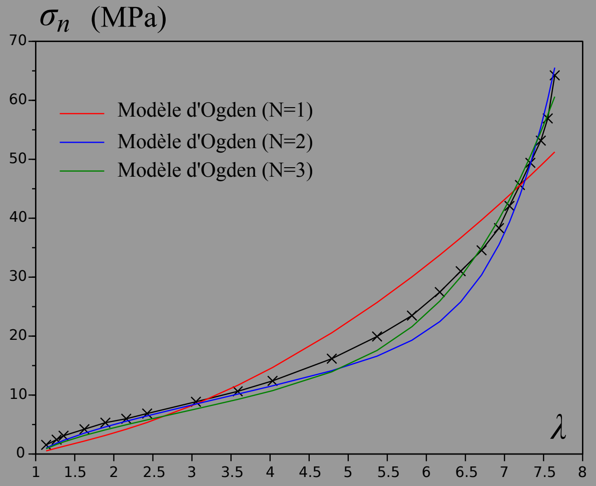


Traction plane



Identification à partir de tous les essais

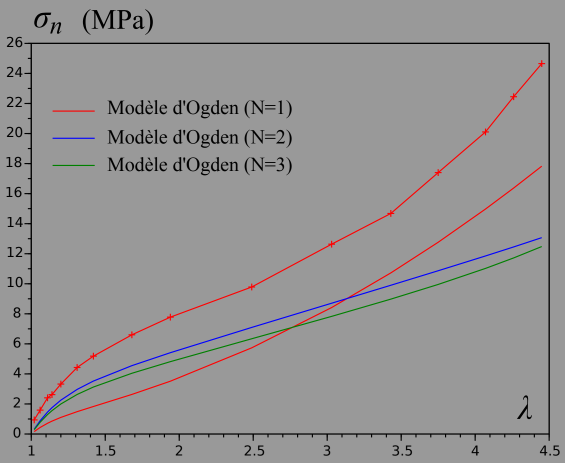
Ogden



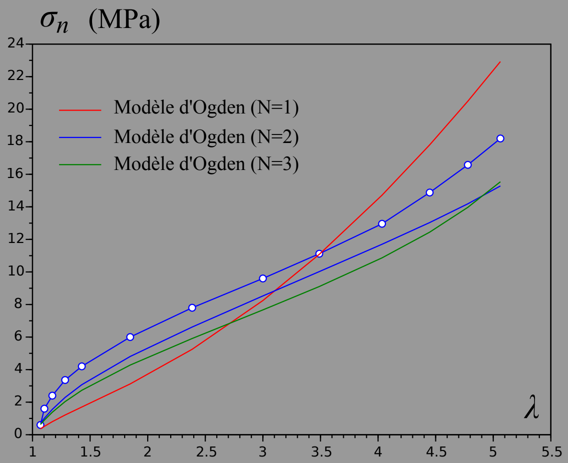
Identification à partir de tous les essais

Ogden

Traction équibiaxiale

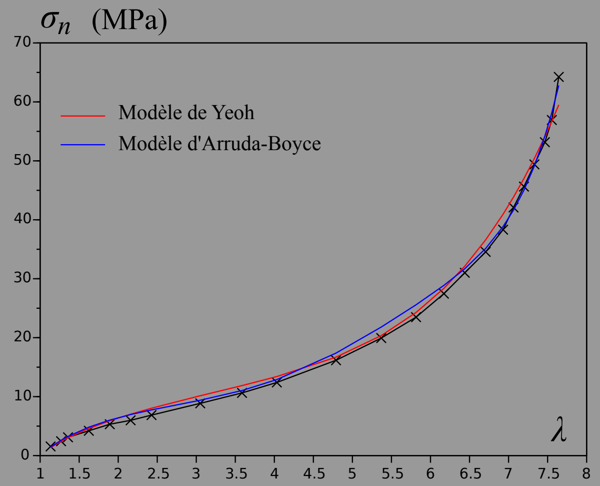


Traction plane



Identification à partir de tous les essais

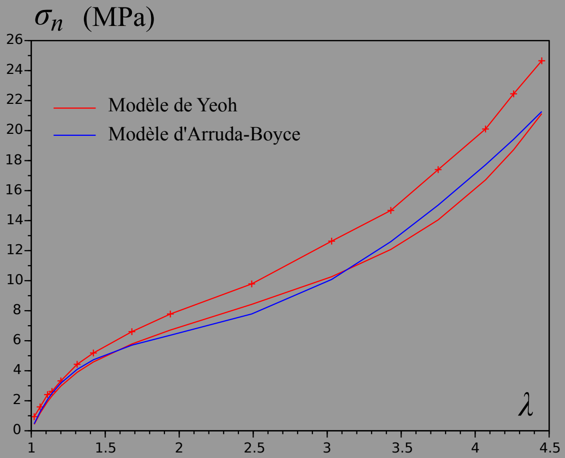
Arruda-Boyce, Van Der Waals et Yeoh



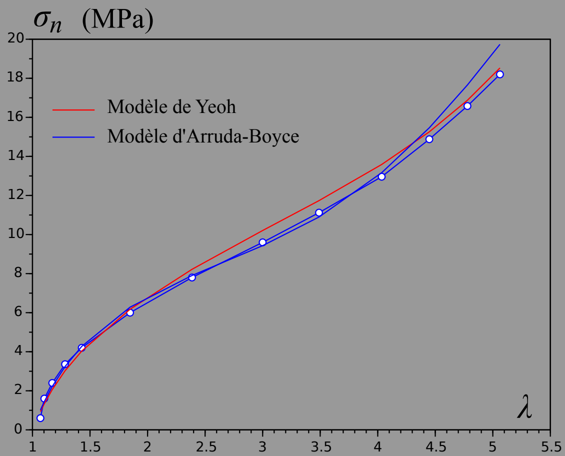
Identification à partir de tous les essais

Arruda-Boyce, Van Der Waals et Yeoh

Traction équibiaxiale



Traction plane



Identification à partir de tous les essais

Bilan

- Peu d'impact de $\bar{I}_2$
- Identification sur tous les essais
  ⇒Moins précis sur chaque essai mais globalement meilleur
- Valider la procédure
  ⇒Simulation des essais et comparaison à d'autres essais
- Discriminer : entre différents modèles
- Attention : ne pas extrapoler hors des zones identifiées