Séance 8

Plasticité en petites transformations

Programme indicatif

Séance 7: Comportement des alliages métalliques: élastoplasticité

Séance 8: Elastoplasticité en petites transformations
Etude de cas de calcul de structures en élastoplasticité en petites transformations

Séance 9: Elastoplasticité en grandes transformations
Etude de cas de calcul de structures en élastoplasticité en grandes transformations

Rapport sur l'étude de cas ou devoir

Séance 10: Entrainement à l'examen final

Séance 11: Examen final

Séance 12: Etude thermodynamique de la progression d'une fissure:
taux de relaxation d'énergie

Hypothèses de la mécanique linéaire de la rupture, ténacité, loi de Paris, limite d'endurance.

Séance 13: Etude de cas de structures fissurées

Rapport sur l'étude de cas

Les quatre échelles de la plasticité

Echelle atomique

Défaut linéaire dans l 'empilement

Echelle de la dislocation

Milieu continu élastique, ligne en tension dans un champ de forces

Echelle du cristal

Milieu continu, glissements plastiques sur les plans du cristal

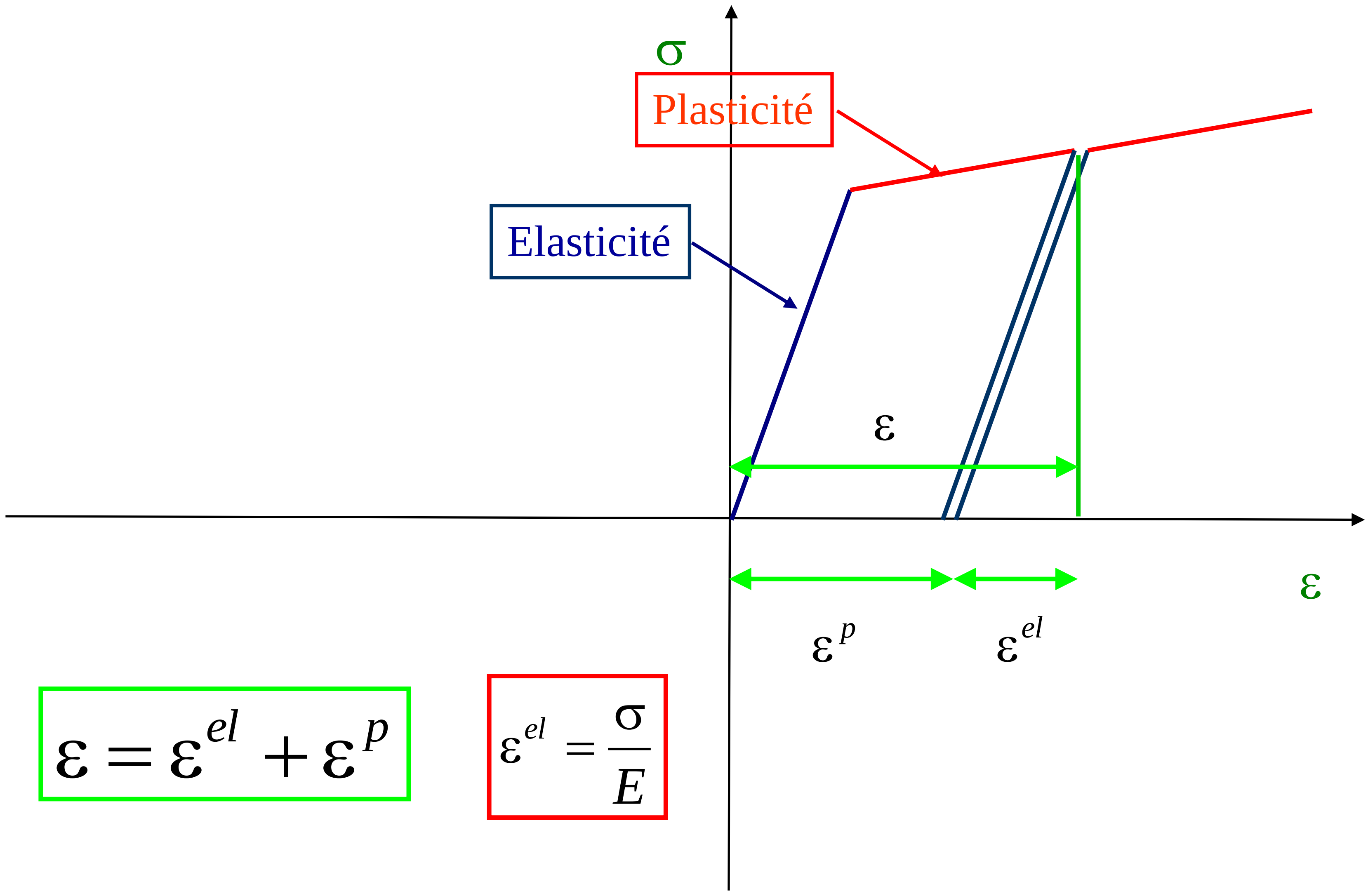
Echelle du polycristal

Milieu continu élastoplastique

Loi de comportement « macro »

En HPP

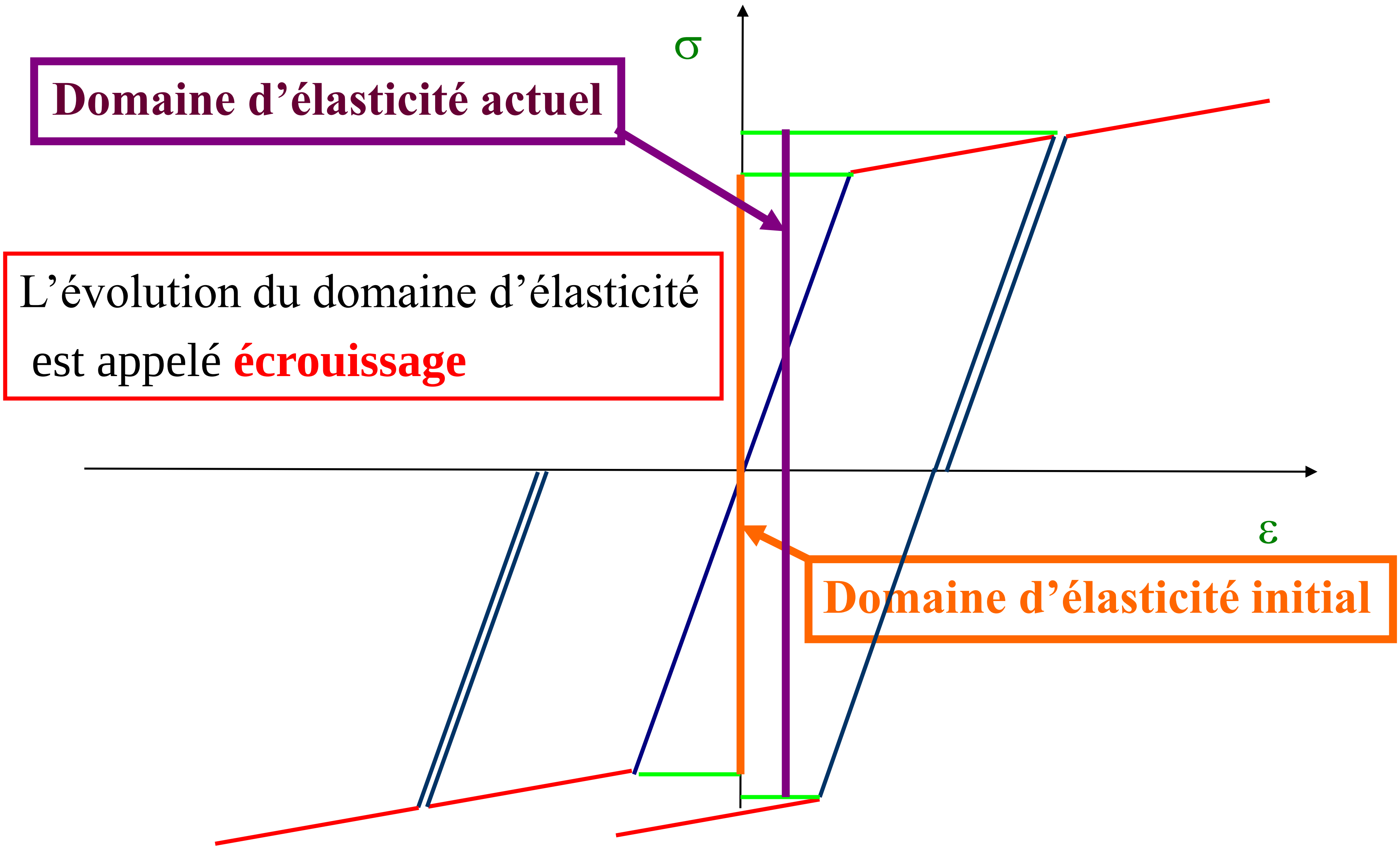
Essai de traction compression simple (uniaxial) sur un métal



$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{p}}$$

$$\boxed{\varepsilon^{el} = \frac{\sigma}{E}}$$

Essai de traction compression simple (uniaxial) sur un métal



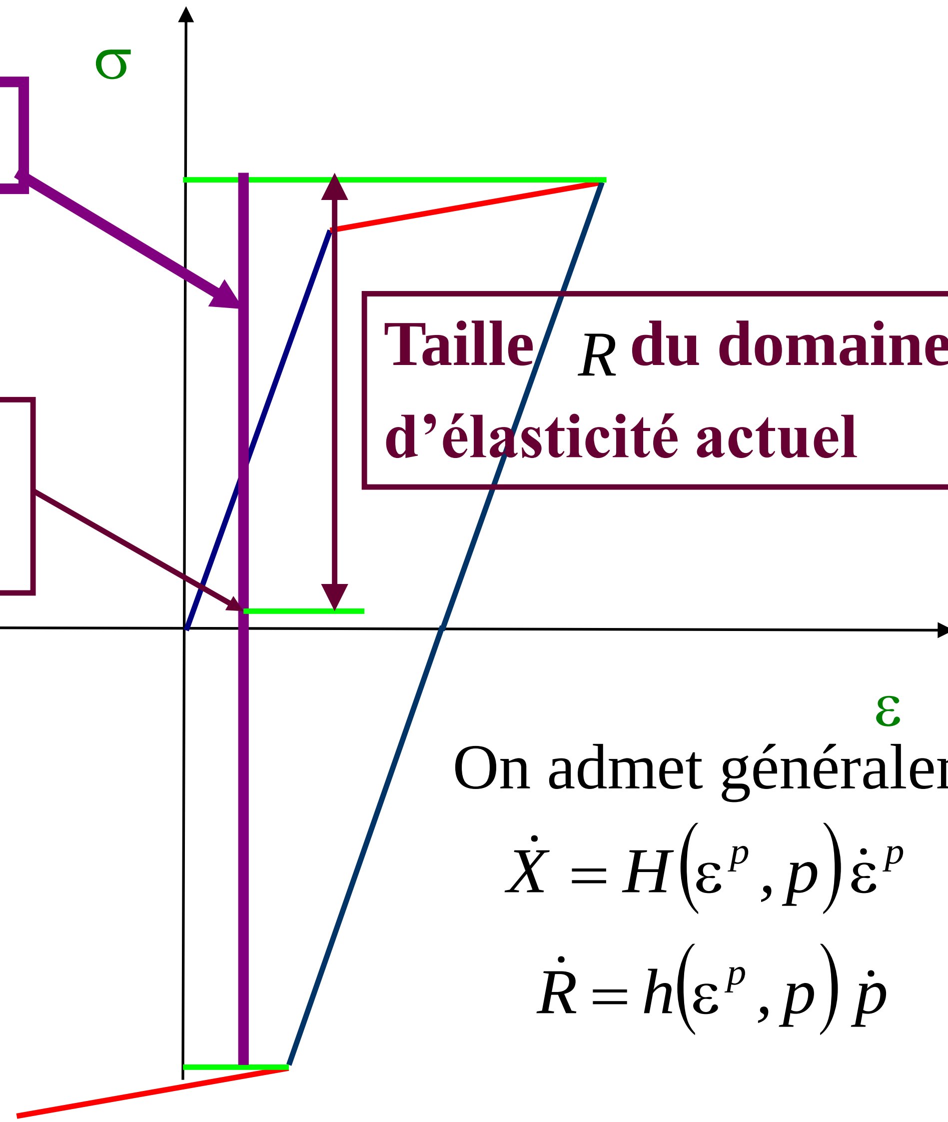
Essai de traction compression simple (uniaxial) sur un métal

Domaine d'élasticité actuel

$$D^{el} : \quad |\sigma - X| \leq R$$

Centre X du domaine d'élasticité actuel

Taille R du domaine d'élasticité actuel



X et R sont fonctions de l'histoire $\left[\varepsilon^p\right]_t$

On note $\quad p(t) = \int_0^t \left|\dot{\varepsilon}^p(\tau)\right| d\tau$

$$\dot{p}(t) = \left|\dot{\varepsilon}^p(t)\right|$$

On admet généralement

$$\dot{X} = H\left(\varepsilon^p, p\right)\dot{\varepsilon}^p$$

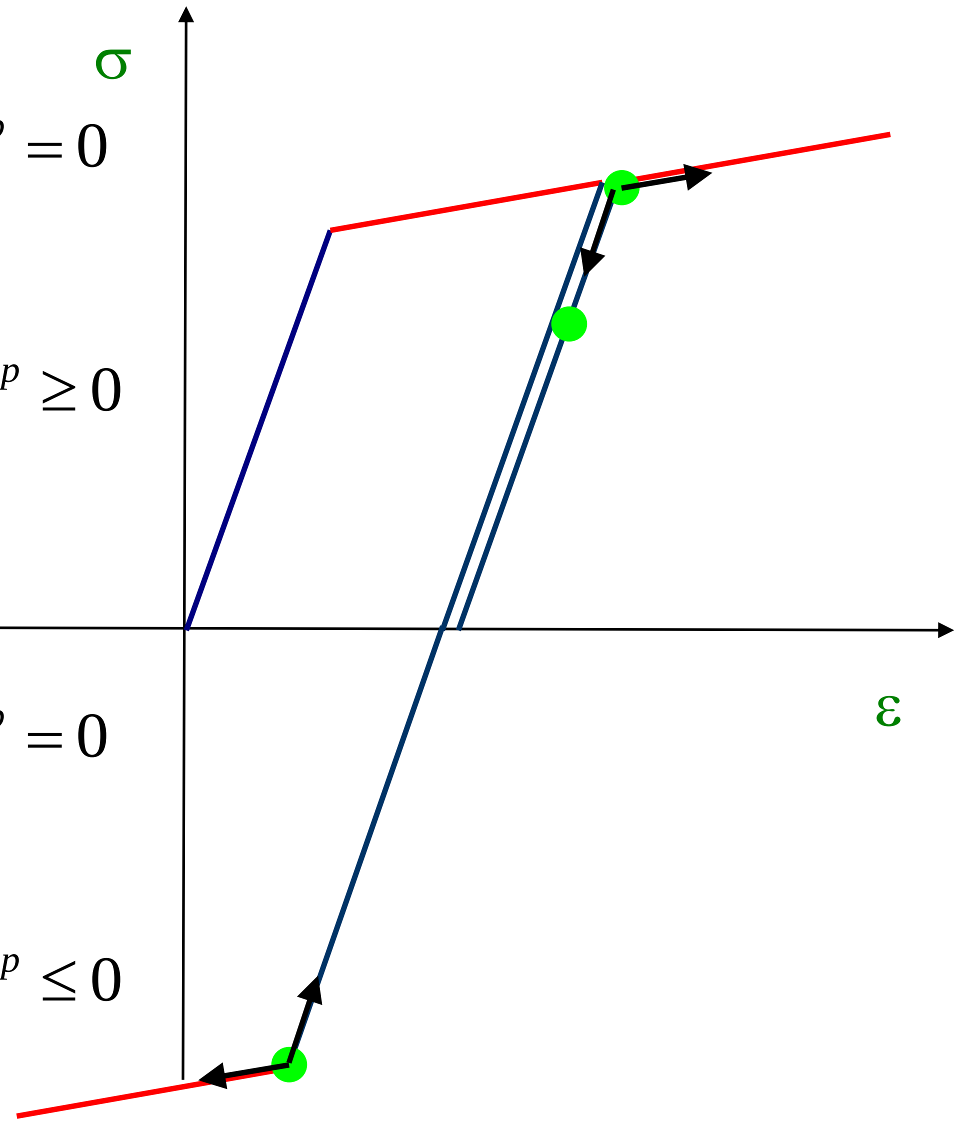
$$\dot{R} = h\left(\varepsilon^p, p\right)\dot{p}$$

Essai de traction compression simple (uniaxial) sur un métal

Si $\left|\sigma - X\right| < R \qquad \dot{\varepsilon}^p = 0$

Si $\sigma - X = R \quad \begin{cases} \dot{\sigma} < 0 & \dot{\varepsilon}^p = 0 \\ \dot{\sigma} \geq 0 & \dot{\varepsilon}^p \geq 0 \end{cases}$

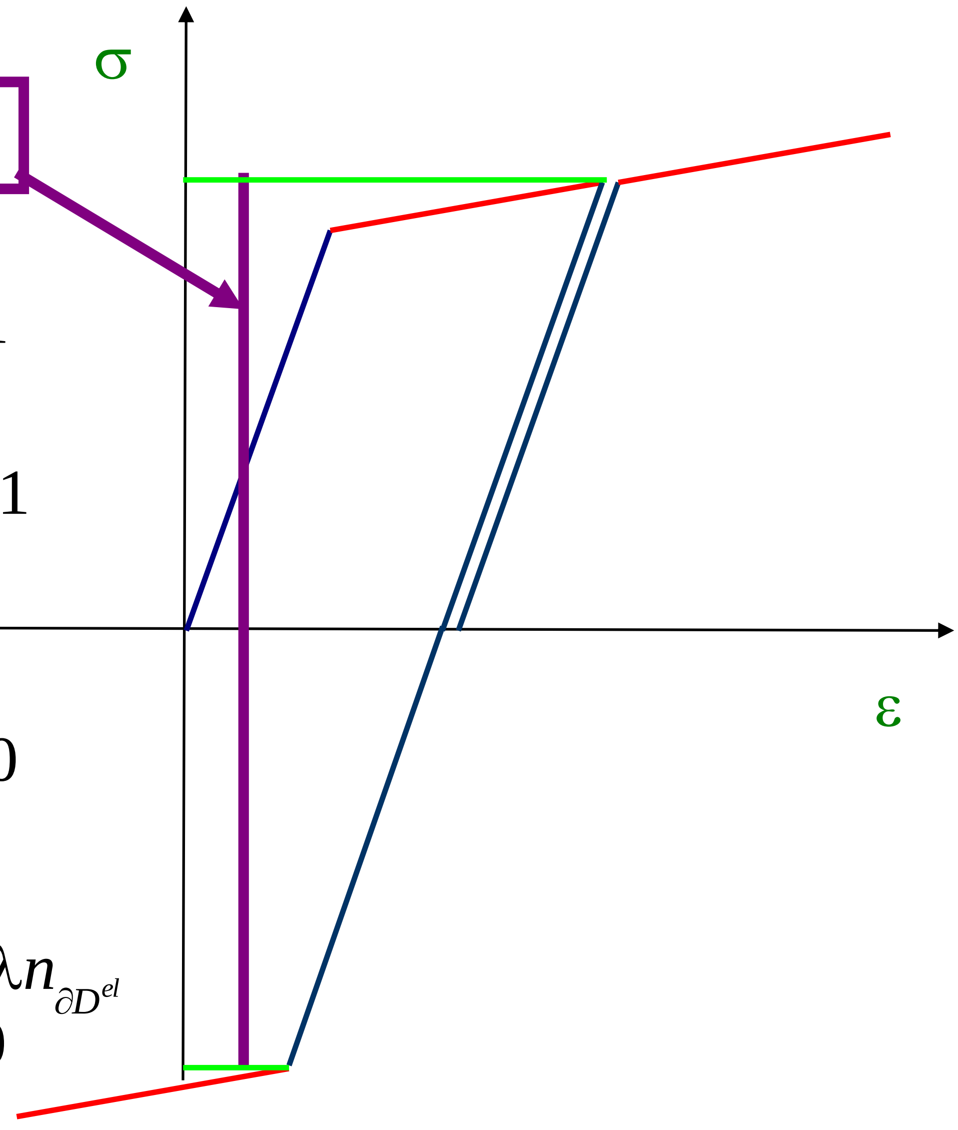
Si $\sigma - X = -R \quad \begin{cases} \dot{\sigma} > 0 & \dot{\varepsilon}^p = 0 \\ \dot{\sigma} \leq 0 & \dot{\varepsilon}^p \leq 0 \end{cases}$



Essai de traction compression simple (uniaxial) sur un métal

Si $\sigma \in \overset{\circ}{D}^{el}$ $\quad \dot{\varepsilon}^p = 0$

Domaine d'élasticité actuel



Si $\sigma - X = R \qquad n_{\partial D^{el}} = 1$

Si $\sigma - X = -R \qquad n_{\partial D^{el}} = -1$

$$\text{Si } \sigma \in \partial D^{el} \begin{cases} \dot{\sigma} n_{\partial D^{el}} < 0 & \dot{\varepsilon}^p = 0 \\ \dot{\sigma} n_{\partial D^{el}} \geq 0 & \dot{\varepsilon}^p = \lambda n_{\partial D^{el}} \\ & \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Essai de traction compression simple (uniaxial) sur un métal

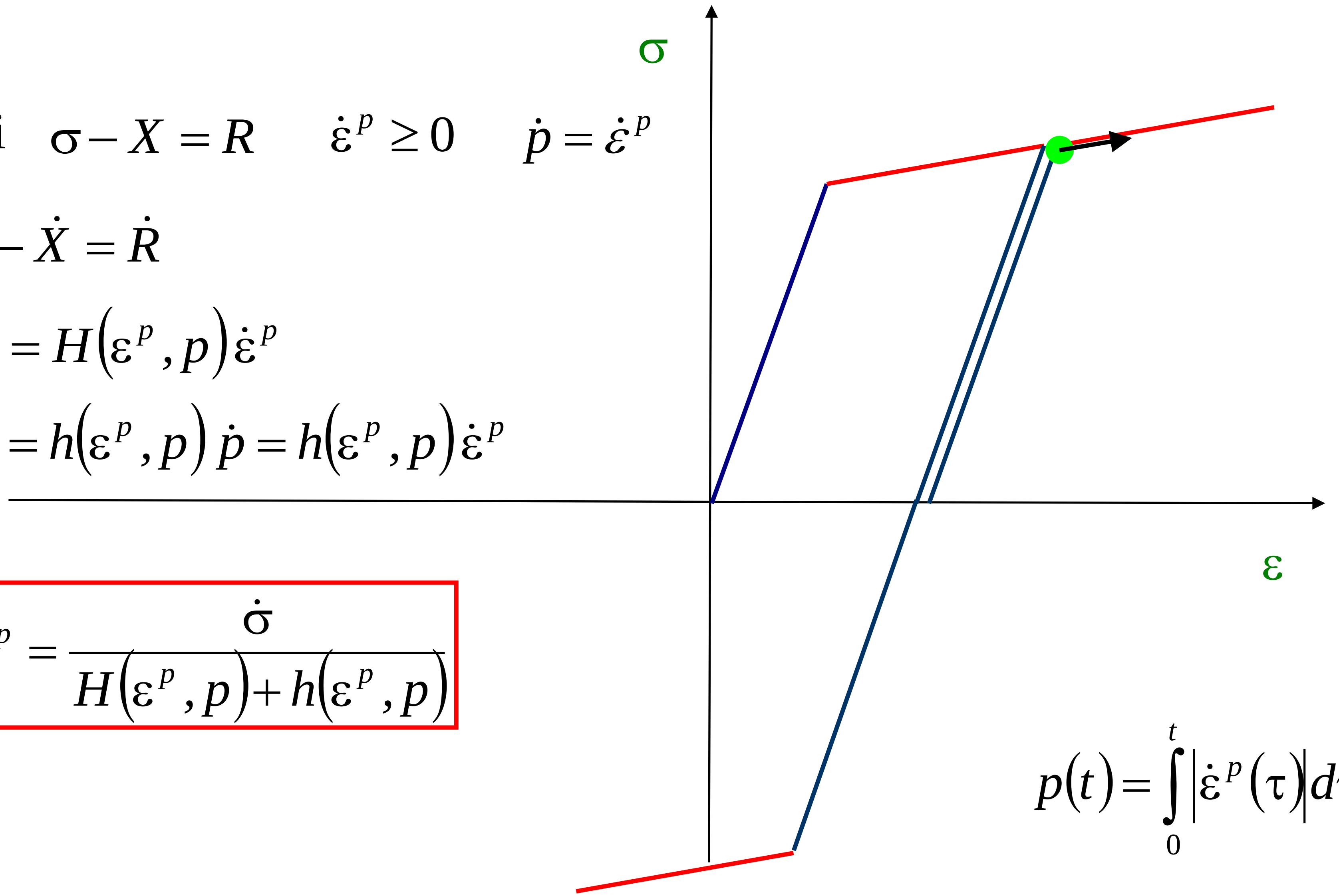
Si $\sigma - X = R \qquad \dot{\varepsilon}^p \geq 0 \qquad \dot{p} = \dot{\varepsilon}^p$

$$\dot{\sigma} - \dot{X} = \dot{R}$$

$$\dot{X} = H(\varepsilon^p, p)\,\dot{\varepsilon}^p$$

$$\dot{R} = h(\varepsilon^p, p)\,\dot{p} = h(\varepsilon^p, p)\,\dot{\varepsilon}^p$$

$$\boxed{\dot{\varepsilon}^p = \frac{\dot{\sigma}}{H(\varepsilon^p, p) + h(\varepsilon^p, p)}}$$



$$p(t) = \int_0^t \left|\dot{\varepsilon}^p(\tau)\right| d\tau$$

Essai de traction compression simple (uniaxial) sur un métal

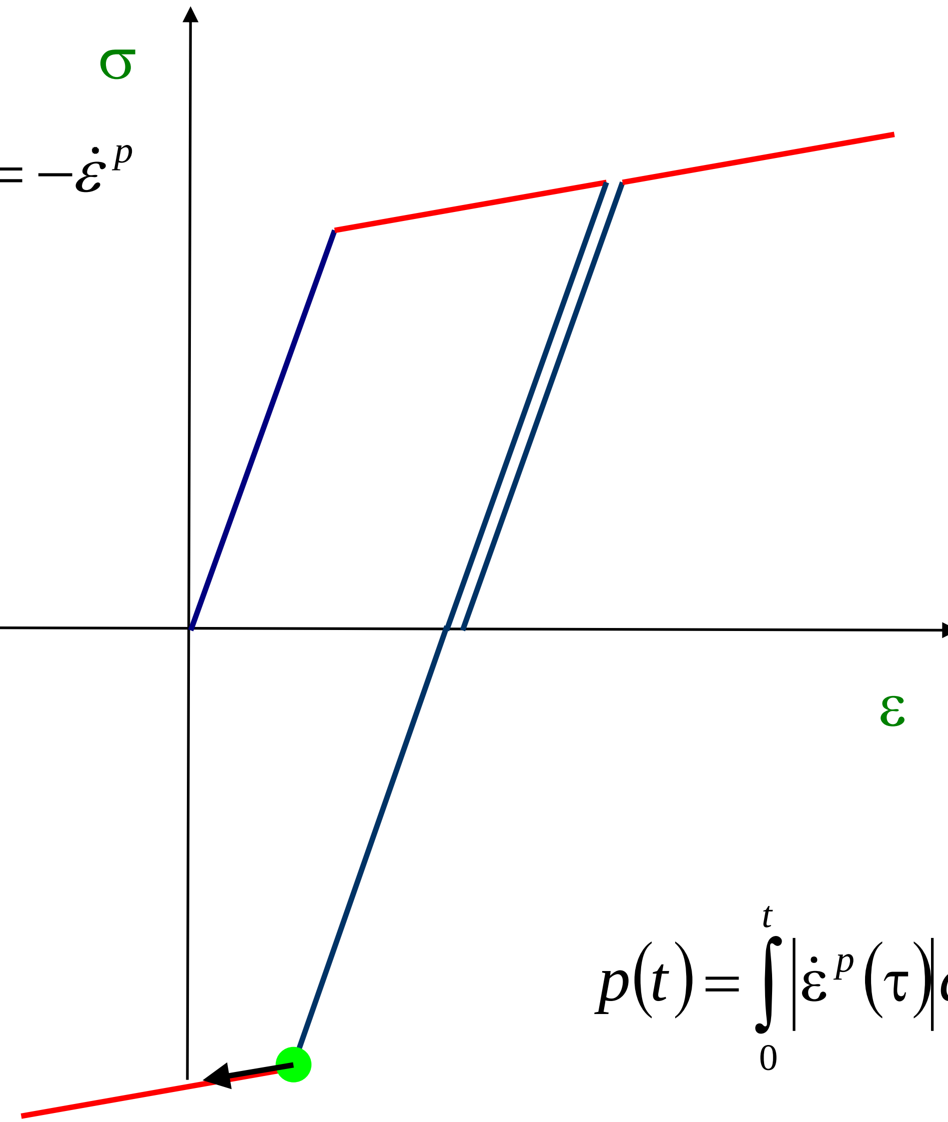
Si $\sigma - X = -R \quad \dot{\varepsilon}^p \leq 0 \quad \dot{p} = -\dot{\varepsilon}^p$

$$\dot{\sigma} - \dot{X} = -\dot{R}$$

$$\dot{X} = H\left(\varepsilon^p, p\right)\dot{\varepsilon}^p$$

$$\dot{R} = h\left(\varepsilon^p, p\right)\dot{p} = -h\left(\varepsilon^p, p\right)\dot{\varepsilon}^p$$

$$\boxed{\dot{\varepsilon}^p = \frac{\dot{\sigma}}{H\left(\varepsilon^p, p\right) + h\left(\varepsilon^p, p\right)}}$$



$$p(t) = \int_0^t \left|\dot{\varepsilon}^p(\tau)\right| d\tau$$

Essai de traction compression simple (uniaxial) sur un métal

Récapitulatif

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{p}} \qquad \boxed{\varepsilon^{el} = \frac{\sigma}{E}} \qquad p(t) = \int_0^t \left|\dot{\varepsilon}^p(\tau)\right| d\tau$$

Si $\left|\sigma - X\right| < R \qquad \dot{\varepsilon}^p = 0 \qquad \dot{X} = 0 \qquad \dot{R} = 0$

Si $\left|\sigma - X\right| = R$
$$\begin{cases} \dot{\sigma} n_{\partial D^{el}} < 0 & \dot{\varepsilon}^p = 0 \qquad \dot{X} = 0 \qquad \dot{R} = 0 \\ \dot{\sigma} n_{\partial D^{el}} \geq 0 & \dot{\varepsilon}^p = \dfrac{\dot{\sigma}}{H(\varepsilon^p, p) + h(\varepsilon^p, p)} \end{cases}$$

$$\dot{X} = H(\varepsilon^p, p)\,\dot{\varepsilon}^p \qquad \dot{R} = h(\varepsilon^p, p)\,\dot{p}$$

Essai de traction compression simple (uniaxial) sur un métal

Caractéristiques du matériau

Alors on peut se donner

Module d'Young E

$X\left(\varepsilon^{p}\right)$

Module d'écrouissage cinématique $H\left(\varepsilon^{p}, \cancel{p}\right)$

et

Module d'écrouissage isotrope $h\left(\cancel{\varepsilon^{p}}, p\right)$

$R\left(p\right)$

Conditions initiales

ε^{p} initial $\varepsilon^{p}(0)$ **=0**

Souvent

X initial $X(0)$ **=0**

R initial $R(0)$

Essai de traction compression simple (uniaxial) sur un métal

Caractéristiques du matériau **Plasticité parfaite**

Module d'Young E

Module d'écrouissage cinématique $H\left(\varepsilon^p, p\right)$ **=0**

Module d'écrouissage isotrope $h\left(\varepsilon^p, p\right)$ **=0**

Essai de traction compression simple (uniaxial) sur un métal

Plasticité parfaite

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{p}} \qquad \boxed{\varepsilon^{el} = \frac{\sigma}{E}}$$

Si $|\sigma - X| < R \qquad \dot{\varepsilon}^{p} = 0$

$$\text{Si} \quad |\sigma - X| = R \begin{cases} \dot{\sigma} n_{\partial D^{el}} < 0 & \dot{\varepsilon}^{p} = 0 \\ \dot{\sigma} n_{\partial D^{el}} \geq 0 & \dot{\varepsilon}^{p} = \lambda n_{\partial D^{el}} \end{cases}$$

$\lambda \geq 0$ indéterminé

Essai de traction compression simple (uniaxial) sur un métal

Exercice: Etudier l'évolution des déformations longitudinales dans un barreau métallique soumis au chargement de traction compression simple uniaxial suivant à partir de *t=0*:

$$\sigma = \frac{E}{500} sin(\omega t)$$

Caractéristiques du matériau

Module d'Young E

Ecrouissage cinématique $X(\varepsilon^p) = \frac{E}{10} \varepsilon^p$

Ecrouissage isotrope $R(p) = \frac{E}{1000}(1+10\,p)$

Conditions initiales

ε^p initial $\varepsilon^p(0)$ **=0**

Essai de traction compression simple (uniaxial) sur un métal

Éléments de solution

Première phase: $\sigma : 0 \rightarrow \dfrac{E}{1000}$ Comportement élastique

$$\varepsilon^p = 0 \qquad \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Etat final:

$$\varepsilon^p{}_1 = 0 \qquad p_1 = 0 \qquad X_1 = 0 \qquad R_1 = \frac{E}{1000} \qquad D^{el}{}_1 = \left[\frac{-E}{1000}, \frac{E}{1000}\right]$$

Essai de traction compression simple (uniaxial) sur un métal

<u>Éléments de solution</u>

<u>Deuxième phase:</u> $\sigma : \frac{E}{1000} \to \frac{E}{500}$ Comportement plastique en traction

$$\sigma = X + R \qquad p = \varepsilon^p$$

$$X(\varepsilon^p) = \frac{E}{10}\varepsilon^p \qquad R(p) = \frac{E}{1000}(1+10p) \qquad \varepsilon^p = \left(\frac{\sigma}{E} - \frac{1}{1000}\right)\left(\frac{100}{11}\right)$$

$$\varepsilon = \left(\frac{\sigma}{E}\frac{111}{11} - \frac{1}{110}\right)$$

Etat final:

$$\varepsilon^p{}_2 = \left(\frac{1}{110}\right) \quad p_2 = \left(\frac{1}{110}\right) \quad X_2 = \frac{E}{1100} \quad R_2 = \frac{12E}{11000} \quad D^{el}{}_2 = \left[\frac{-2E}{11000}, \frac{E}{500}\right]$$

Essai de traction compression simple (uniaxial) sur un métal

Éléments de solution

<u>Troisième phase:</u> $\sigma : \dfrac{E}{500} \to \dfrac{-2E}{11000}$ Comportement élastique

$$\varepsilon^{p} = \varepsilon^{p}{}_{2} = \frac{1}{110}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{1}{110}$$

Etat final:

$$\varepsilon^{p}{}_{3} = \left(\frac{1}{110}\right) \quad p_3 = \left(\frac{1}{110}\right) \quad X_3 = \frac{E}{1100} \quad R_3 = \frac{12E}{11000} \quad D^{el}{}_{3} = \left[\frac{-2E}{11000}, \frac{E}{500}\right]$$

Essai de traction compression simple (uniaxial) sur un métal

Éléments de solution

Quatrième phase: $\sigma : \dfrac{-2E}{11000} \rightarrow \dfrac{-E}{500}$

Comportement plastique
en compression

$$\sigma = X - R \qquad p = p_3 + \varepsilon^p{}_3 - \varepsilon^p = \frac{2}{110} - \varepsilon^p$$

$$X(\varepsilon^p) = \frac{E}{10}\varepsilon^p \qquad R(p) = \frac{E}{1000}(1+10p) = \frac{E}{1000}\left(\frac{13}{11} - 10\varepsilon^p\right)$$

$$\varepsilon^p = \left(\frac{\sigma}{E} + \frac{13}{11000}\right)\left(\frac{100}{11}\right) \qquad \varepsilon = \left(\frac{\sigma}{E}\frac{111}{11} + \frac{13}{1210}\right)$$

Etat final:

$$\varepsilon^p{}_4 = \left(\frac{-9}{1210}\right) \quad p_4 = \left(\frac{31}{1210}\right) \quad X_4 = \frac{-90E}{121000} \quad R_4 = \frac{152E}{121000} \quad D^{el}{}_4 = \left[\frac{-E}{500}, \frac{62E}{121000}\right]$$

Essai de traction compression simple (uniaxial) sur un métal

Éléments de solution

Cinquième phase: $\sigma : \dfrac{-E}{500} \rightarrow \dfrac{62E}{121000}$ Comportement élastique

$$\varepsilon^{p} = \varepsilon^{p}{}_{4} = \frac{-9}{1210}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} - \frac{9}{1210}$$

Etat final:

$$\varepsilon^{p}{}_{5} = \left(\frac{-9}{1210}\right) \quad p_{5} = \left(\frac{31}{1210}\right) \quad X_{5} = \frac{-90E}{121000} \quad R_{5} = \frac{152E}{121000} \quad D^{el}{}_{5} = \left[\frac{-E}{500}, \frac{62E}{121000}\right]$$

Essai de traction compression simple (uniaxial) sur un métal

Éléments de solution

Sixième phase: $\sigma : \frac{62E}{121000} \to \frac{E}{500}$

Comportement plastique en traction

$$\sigma = X + R \qquad p = p_5 - \varepsilon^p{}_5 + \varepsilon^p = \frac{4}{121} + \varepsilon^p$$

$$X\left(\varepsilon^p\right) = \frac{E}{10}\varepsilon^p \qquad R(p) = \frac{E}{1000}(1+10p) = \frac{E}{1000}\left(\frac{161}{121} + 10\varepsilon^p\right)$$

$$\varepsilon^p = \left(\frac{\sigma}{E} - \frac{161}{121000}\right)\left(\frac{100}{11}\right) \qquad \varepsilon = \left(\frac{\sigma}{E}\frac{111}{11} - \frac{161}{13310}\right)$$

Etat final:

$$\varepsilon^p{}_6 = \left(\frac{81}{13310}\right) \qquad p_6 = \left(\frac{521}{13310}\right) \qquad X_6 = \frac{810E}{1331000} \qquad R_6 = \frac{1852E}{1331000} \qquad D^{el}{}_6 = \left[-\frac{1042E}{1331000}, \frac{E}{500}\right]$$

Essai de traction compression simple (uniaxial) sur un métal

Travail à faire

Simuler 4 cycles de chargement (16 ou 17 phases) et tracer la courbe $\sigma(\varepsilon)$

Commenter