

Bureau d'étude sur le comportement des élastomères : Gonflement d'un ballon sphérique

Dans ce bureau d'étude, nous allons étudier le gonflement d'un ballon sphérique dont le matériau est hyperélastique.

Dans la figure ci-dessous sont données les principales notations.

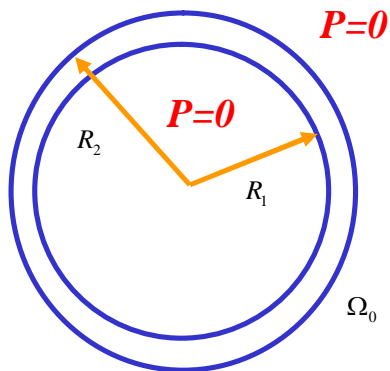
La pression extérieure reste égale à la pression atmosphérique.

$P(t)$ est la différence de pression à l'intérieur du ballon, par rapport à la pression atmosphérique (dont la valeur n'intervient pas dans cet exercice).

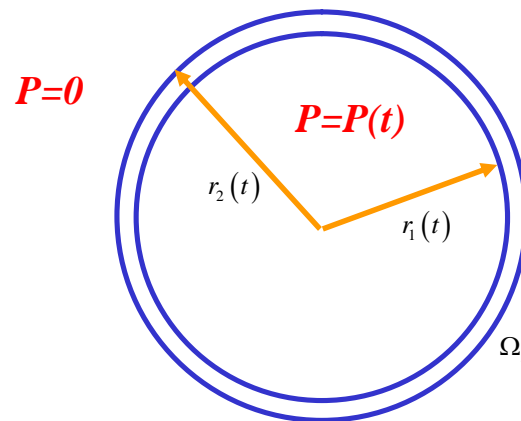
À l'instant initial la pression intérieure est égale à la pression atmosphérique, ainsi $P(0) = 0$.

On prend cette configuration initiale comme configuration de référence.

Elle est dans un état naturel (sans contrainte).



Configuration de référence



Configuration actuelle

On note R_1 le rayon initial intérieur, R_2 le rayon initial extérieur, $r_1(t)$ le rayon intérieur dans la configuration actuelle à l'instant t , $r_2(t)$ le rayon extérieur dans la configuration actuelle à l'instant t .

$\lambda(t) = \frac{r_1(t)}{R_1}$ est appelé élongation principale de la matière. La suite dira pourquoi.

Le but du bureau d'étude est de proposer une modélisation qui permette de déterminer une relation entre $P(t)$ et $\lambda(t)$.

Nous verrons qu'il sera commode de l'exprimer sous la forme $P(\lambda)$ (plutôt que $\lambda(P)$)

Hypothèses de modélisation

Plusieurs choix de modélisation sont possibles avec des hypothèses simplificatrices plus ou moins fortes.

Le premier choix concerne la compressibilité de l'élastomère.

À titre d'exercice complémentaire facultatif à la maison, vous pouvez écrire les équations du problème dans le cas d'une prise en compte de la compressibilité du matériau. Cela donne des équations dont il est difficile de tirer une solution analytique. Comme nous sommes à peu près synchronisés avec le cours ABAQUS, vous pouvez chercher la solution sous la forme $P(\lambda)$ à l'aide d'une modélisation ABAQUS.

Dans ce bureau d'étude pour simplifier notre travail nous ferons l'hypothèse que le comportement du matériau peut être approché par un modèle de **matériau homogène hyperélastique incompressible isotrope**.

De plus nous ferons l'hypothèse que le processus de déformation peut être approché par un processus **isotherme**.

Nous savons qu'alors le comportement est déterminé (à la partie sphérique du tenseur de contrainte de Cauchy près) par la densité massique d'énergie libre du matériau $\Psi(I_1, I_2)$ où $I_1 = \text{tr}(\underline{\underline{C}})$ et $I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{C}}))$.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho_0 \left[\left(2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + 2 I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \right] + c \underline{\underline{I}} \text{ avec } c \text{ quelconque.}$$

La deuxième hypothèse simplificatrice est en relation avec l'épaisseur de la paroi du ballon

Si cette épaisseur est faible devant le rayon intérieure, c'est-à-dire si

$R_2 - R_1 = E \ll R_1$, $r_2(t) - r_1(t) = e(t) \ll r_1(t)$, les principales composantes du champ de contrainte de Cauchy vont pouvoir être approximées par des valeurs uniformes dans l'épaisseur.

Nous appellerons cette hypothèse « Hypothèse de paroi mince ».

Le BE va comprendre deux parties.

Dans la première nous ferons l'hypothèse de « Paroi mince » pour aboutir très rapidement à une première approximation de la relation **$P(\lambda)$** .

Dans la deuxième partie nous abandonnerons cette hypothèse et nous traiterons donc rigoureusement le cas du « Gonflement d'un ballon à paroi épaisse constituée d'un matériau hyperélastique incompressible isotrope »

Nous pourrons alors comparer les deux solutions, ce qui nous permettra de bien cerner le domaine de validité de l'hypothèse « Paroi mince ».

Partie 1

Gonflement d'un ballon à paroi mince constituée d'un matériau hyperélastique incompressible isotrope

A/ Approximation du champ de contrainte de Cauchy par l'équilibre

Nous allons travailler en coordonnées sphériques (r, θ, φ) dans la configuration actuelle.

Localement la base sera $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi)_{(\theta, \varphi)}$

Un champ de contrainte de Cauchy très général s'écrit

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sigma}}(r, \theta, \varphi) = & \sigma_{rr}(r, \theta, \varphi) \underline{e}_r(\theta, \varphi) \otimes \underline{e}_r(\theta, \varphi) + \sigma_{\theta\theta}(r, \theta, \varphi) \underline{e}_\theta(\theta, \varphi) \otimes \underline{e}_\theta(\theta, \varphi) + \sigma_{\varphi\varphi}(r, \theta, \varphi) \underline{e}_\varphi(\theta, \varphi) \otimes \underline{e}_\varphi(\theta, \varphi) \\ & + \sigma_{r\theta}(r, \theta, \varphi) [\underline{e}_r(\theta, \varphi) \otimes \underline{e}_\theta(\theta, \varphi) + \underline{e}_\theta(\theta, \varphi) \otimes \underline{e}_r(\theta, \varphi)] \\ & + \sigma_{r\varphi}(r, \theta, \varphi) [\underline{e}_r(\theta, \varphi) \otimes \underline{e}_\varphi(\theta, \varphi) + \underline{e}_\varphi(\theta, \varphi) \otimes \underline{e}_r(\theta, \varphi)] \\ & + \sigma_{\theta\varphi}(r, \theta, \varphi) [\underline{e}_\theta(\theta, \varphi) \otimes \underline{e}_\varphi(\theta, \varphi) + \underline{e}_\varphi(\theta, \varphi) \otimes \underline{e}_\theta(\theta, \varphi)]\end{aligned}$$

Que nous écrirons aussi sous forme abrégée

$$\underline{\underline{\sigma}}(r, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{r\varphi} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta\varphi} \\ \sigma_{r\varphi} & \sigma_{\theta\varphi} & \sigma_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}_{(r, \theta, \varphi)}$$

Nous faisons l'hypothèse que, dans notre problème, ce champ est à symétrie sphérique.

Question 1 :

Donner les conséquences de cette hypothèse sur les composantes de $\underline{\underline{\sigma}}(r, \theta, \varphi)$.

(Il ne reste plus que 3 composantes non nulles dont deux indépendantes ne dépendant que d'une variable d'espace.)

Réponse 1 : $\underline{\underline{\sigma}}(r, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \sigma_{rr}(r) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta}(r) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\varphi\varphi}(r) \end{bmatrix}$

Question 2 :

Dans l'hypothèse de paroi mince, $\sigma_{\theta\theta}(r)$ peut être approximée par une constante que nous noterons $\sigma_{\theta\theta}$.

A l'aide de l'équilibre d'un demi ballon dans la configuration actuelle **donner** une expression approchée

simple de $\sigma_{\theta\theta}$ en fonction de P, r_1, e (négligez les termes en $\left(\frac{e}{r_1}\right)^2$ par rapport à ceux en $\left(\frac{e}{r_1}\right)$ dans vos

calculs).

Réponse 2 :

Equilibre d'un demi ballon $P\pi r_1^2 = \sigma_{\theta\theta} 2\pi r_1 e$

$$\text{Donc } \sigma_{\theta\theta} = \frac{Pr_1}{2e}$$

Question 3 :

À l'aide des conditions aux limites sur la paroi, à l'intérieur et à l'extérieur du ballon, **donner** les valeurs de $\sigma_{rr}(r_1)$ et $\sigma_{rr}(r_2)$ en fonction de la pression atmosphérique notée P_{atm} et de P .

On suppose que P est de l'ordre de P_{atm} . En déduire que, $\forall r$, $\sigma_{rr}(r)$ est négligeable devant $\sigma_{\theta\theta}$.

Réponse 3 :

En utilisant les conditions aux limites en contrainte sur la frontière de la paroi du ballon

$$\sigma_{rr}(r_1) = -P_{atm} - P ; \sigma_{rr}(r_2) = -P$$

Donc $\sigma_{rr}(r)$ est $\forall r$ de l'ordre de grandeur de P_{atm} .

En revanche $\sigma_{\theta\theta} = \frac{Pr_1}{2e}$ avec $\frac{r_1}{e} \gg 1$. $\sigma_{rr}(r)$ est donc négligeable par rapport à $\sigma_{\theta\theta}$.

$$\underline{\underline{\sigma}} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Pr_1}{2e} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Pr_1}{2e} \end{bmatrix}$$

En conclusion de cette analyse approchée, nous avons une approximation du champ de contrainte

de Cauchy sous la forme $\underline{\underline{\sigma}}(r, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix}$ **où $\sigma_{\theta\theta}$ est donné en fonction de P, r_1, e**

Remarque :

Une analyse dimensionnelle sommaire permet de dire que $\frac{\sigma_{\theta\theta}}{P} = f\left(\frac{r_1}{e}\right)$.

La question 2 donne la fonction $f\left(\frac{r_1}{e}\right)$. Elle est très simple.

B/ Approximation du gradient de la transformation

Rappelons que nous avons noté $\lambda = \frac{r_1}{R_1}$.

Dans l'hypothèse de paroi mince nous voyons bien que $\frac{r_2}{R_2} \approx \lambda$ et plus généralement que $\frac{r}{R} \approx \lambda$ où r est

la première coordonnée sphérique, dans la configuration actuelle, de la position des particules dont la première coordonnée sphérique, dans la configuration de référence, était R .

On résume cela en disant que les élongations sont quasiment homogènes dans la paroi mince.

Question 4 :

On note $\underline{\underline{F}}$ le gradient de la transformation qui permet de transformer la configuration initiale du ballon en la configuration actuelle.

Donner la matrice des composantes approchées de $\underline{\underline{F}}$ dans la base la base sera $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi)_{(\theta, \varphi)}$ sous les

hypothèses du B. Toutes ces composantes s'expriment bien sûr à l'aide de λ .

(N'oubliez pas l'hypothèse de symétrie sphérique et que votre matériau est incompressible).

Réponse 4 :

$$r_1 = \lambda R_1 \text{ donc } e = \frac{E}{\lambda^2}.$$

$$\text{Ainsi } \underline{\underline{F}} \approx \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

C/ Retour sur l'approximation du champ de contrainte de Cauchy par l'équilibre

Dans la question 3 nous avons écrit une approximation uniforme des composantes du tenseur de contrainte de Cauchy dans le repère local $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi)_{(\theta, \varphi)}$ en fonction de P et des valeurs caractérisant la géométrie

actuelle $r_1(t), e(t)$

Question 5 :

Utiliser les résultats de la question 4 pour **récrire** les composantes du tenseur de contrainte de Cauchy dans le repère local $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi)_{(\theta, \varphi)}$ en fonction de P , des valeurs caractérisant la géométrie initiale R_1 ,

E et de la valeur de l'élongation principale de la paroi $\lambda(t)$.

Réponse 5 :

$$r_1 = \lambda R_1, e = \frac{E}{\lambda^2}, \underline{\underline{\sigma}} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Pr_1}{2e} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Pr_1}{2e} \end{bmatrix} \text{ donc}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^3 \frac{PR_1}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \frac{PR_1}{2E} \end{bmatrix}$$

D/ Approximation du champ de contrainte de Cauchy par le comportement

Rappelons que nous savons qu'alors le comportement est déterminé (à la partie sphérique du tenseur de contrainte de Cauchy près) par la densité massique d'énergie libre du matériau $\Psi(I_1, I_2)$ où $I_1 = tr(\underline{\underline{C}})$ et

$$I_2 = \frac{1}{2} (I_1^2 - tr(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{C}})).$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho_0 \left[\left(2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + 2I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \underline{\underline{F}} \cdot {}^t \underline{\underline{F}} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \underline{\underline{F}} \cdot {}^t \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot {}^t \underline{\underline{F}} \right] + c \underline{\underline{I}} \text{ avec } c \text{ quelconque.}$$

Question 6 :

Utilisez l'approximation de $\underline{\underline{F}}$ trouvée à la question 4 en fonction de λ pour **écrire** la matrice des composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction de λ .

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho_0 \left[\left(2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + 2 I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \right] + c \underline{\underline{I}} \text{ avec } c \text{ quelconque}$$

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, I_1 = \text{tr}(\underline{\underline{C}}) = \lambda^{-4} + 2\lambda^2, I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{C}})) = \lambda^4 + 2\lambda^{-2} \text{ donc}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho_0 \begin{bmatrix} \frac{2}{\lambda^4} \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} + c & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda^2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \left(\frac{2}{\lambda^2} + 2\lambda^4 \right) \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} + c & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda^2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \left(\frac{2}{\lambda^2} + 2\lambda^4 \right) \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} + c \end{bmatrix}$$

E/ Détermination de $P(\lambda)$

Question 7 :

En comparant l'approximation de $\underline{\underline{\sigma}}$ par l'équilibre (question 5) et l'approximation de $\underline{\underline{\sigma}}$ par le comportement (question 6), **déterminer** c puis **déterminer** $P(\lambda)$

(C'est l'objectif assigné à ce BE).

Réponse 7 :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho_0 \begin{bmatrix} \frac{2}{\lambda^4} \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} + c & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda^2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \left(\frac{2}{\lambda^2} + 2\lambda^4 \right) \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} + c & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda^2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \left(\frac{2}{\lambda^2} + 2\lambda^4 \right) \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} + c \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^3 \frac{PR_1}{2E} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \frac{PR_1}{2E} \end{bmatrix}$$

Les deux composantes 11 étant égales, on a tout d'abord

$$\frac{2}{\lambda^4} \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} + c = 0 \text{ donc } c = - \left[\frac{2}{\lambda^4} \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right]$$

Les deux composantes 22 étant égales, on a

$$2\lambda^2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \left(\frac{2}{\lambda^2} + 2\lambda^4 \right) \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} + c = \lambda^3 \frac{PR_1}{2E\rho_0}$$

$$\text{Donc } \left(2\lambda^2 - \frac{2}{\lambda^4}\right) \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \left(-\frac{2}{\lambda^2} + 2\lambda^4\right) \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} = \lambda^3 \frac{P(\lambda) R_1}{2E\rho_0}$$

D'où

$$P(\lambda) = \frac{4E}{R_1} \rho_0 \left[\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \left(-\frac{1}{\lambda^5} + \lambda \right) \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right]$$

F/ Illustration dans le cas d'un matériau néo-hookéen

Considérons un matériau néo-hookéen, donné par sa densité volumique d'énergie libre

$$\rho_0 \Psi(I_1, I_2) = C_{10} (I_1 - 3)$$

$$\text{(Dans ce cas } \underline{\underline{\sigma}} = \rho_0 \left[\left(2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + 2I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \right] + c \underline{\underline{I}} = \rho_0 \left[\left(2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \right) \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \right] + c \underline{\underline{I}},$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2C_{10} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} + c \underline{\underline{I}})$$

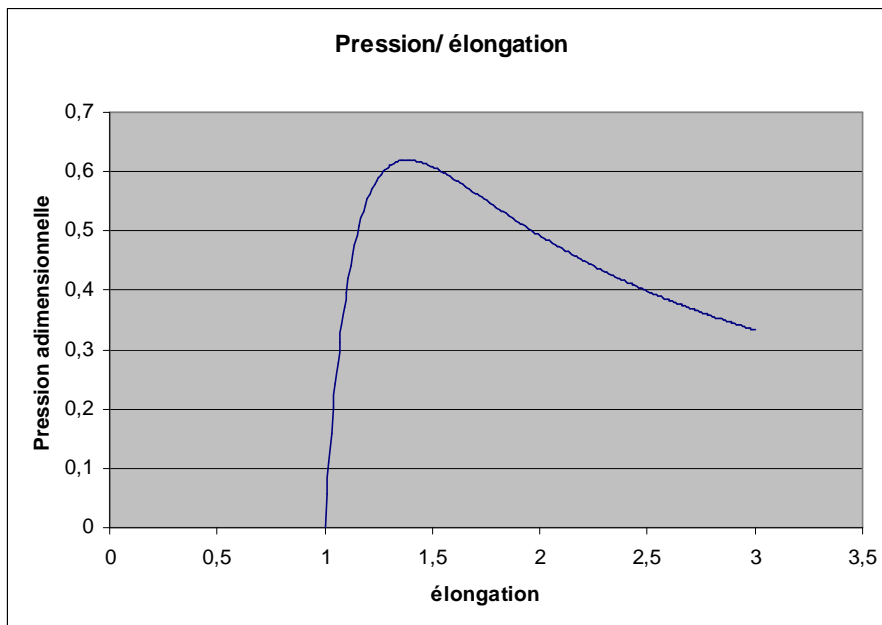
Question 8 :

Déterminer l'expression de $P(\lambda)$ dans ce cas et tracez la courbe correspondante.

Commenter

Réponse 8 :

$$P(\lambda) = \frac{4EC_{10}}{R_1} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right)$$



Question 9 :

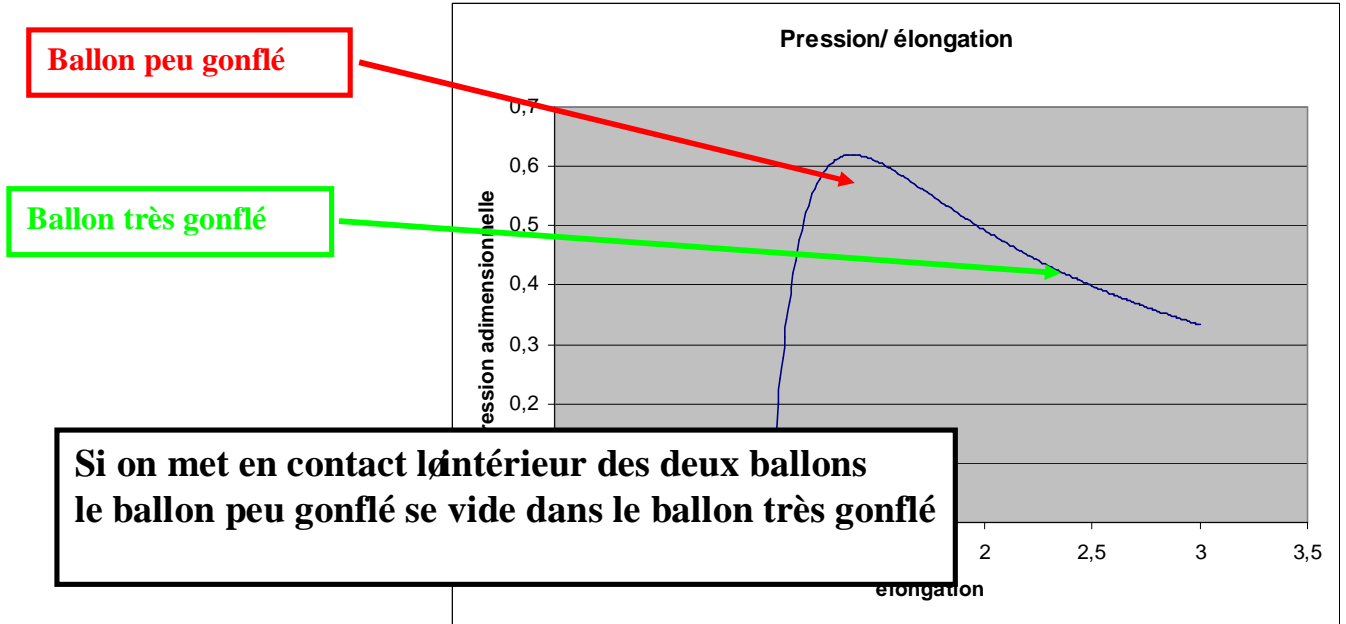
On imagine que l'on met en contact un ballon faiblement gonflé avec un ballon très gonflé. Les deux ballons n'étant pas à la même pression l'un d'eux se vide dans l'autre.

Imaginer une situation qui peut donner un résultat surprenant.

Réponse 9 :

Matériau néo-hookéen incompressible

$$P(\lambda) = \frac{4EC_{10}}{R_1} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right)$$



Question 10 :

Vous avez tous constaté en gonflant des ballons en baudruche que le début du gonflage nécessite de « pousser » plus fort qu'ensuite. On peut dire que la courbe $P(\lambda)$ dessinée ci-dessus dans le cas néo-hookéen explique cette sensation. Par contre vous avez tous ressenti qu'au-delà d'une certaine taille de ballon il faut recommencer à « pousser » plus fort. Ceci n'est pas expliqué par la courbe ci-dessus car $P(\lambda)$ est décroissante. Peut-être s'agit-il d'un phénomène lié au fait que le matériau n'est pas néo-hookéen.

Reprenez l'expression générale de $P(\lambda)$ (question 7) dans laquelle le matériau n'est pas nécessairement néo-hookéen.

Essayer d'identifier le terme qui entraîne une rigidification de la paroi pour les grandes élongations. (Ce terme n'est pas présent pour les matériaux néo-hookéen).

Réponse 10 :

Rigidification

$$P(\lambda) = \frac{4E}{R_1} \left[\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \left(-\frac{1}{\lambda^5} - \lambda \right) \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right]$$

Question 11 :

Commencer par **exprimer** le volume de gaz dans le ballon en fonction de λ puis **déterminer** le nombre de mole de gaz dans le ballon en fonction de λ . (On fera l'hypothèse que le gaz est parfait).

Commenter en expliquant pourquoi il faut continuer à souffler après le pic de pression pour continuer à gonfler le ballon. (on se placera dans le cas du matériau néo-hookéen pour simplifier)

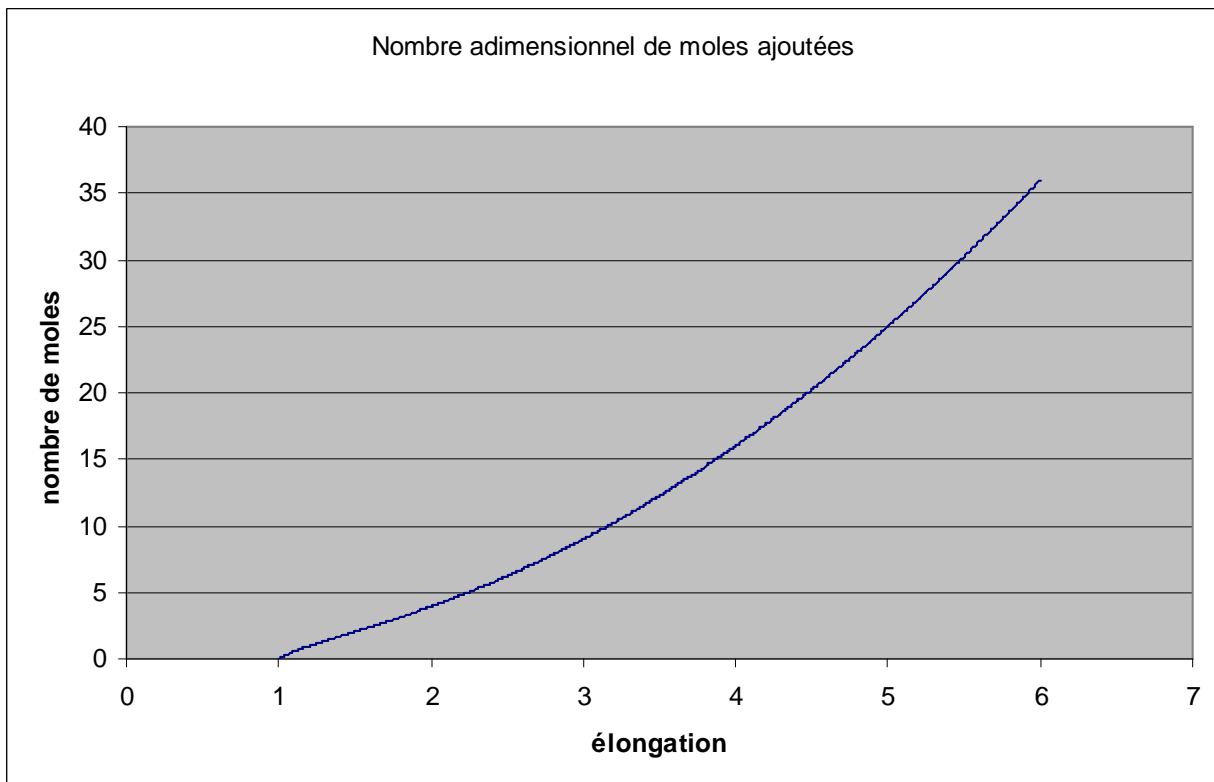
Réponse 11 :

Bien évidemment $V(\lambda) = V_0\lambda^3$ et le nombre de moles de gaz $n(\lambda)$ est proportionnel à PV

Comme $P(\lambda) = \frac{4EC_{10}}{R_1} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right)$, $n(\lambda)$ est proportionnel à $\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right)$.

$n(\lambda)$ est donc croissant avec λ (voir figure ci-dessous). Il faut donc bien continuer à ajouter des moles pour faire grossir le ballon.

C'est-à-dire qu'il faut continuer à souffler, même si la pression nécessaire baisse.



Partie 2

Gonflement d'un ballon à paroi épaisse constituée d'un matériau hyperélastique incompressible isotrope

Nous considérons un ballon sphérique à paroi épaisse.

Notons R_1 le rayon intérieur et R_2 le rayon extérieur dans la configuration de référence.

La configuration de référence est un état naturel (contraintes initiales nulles).

La pression extérieure reste nulle.

La pression intérieure évolue et est égale à $P(t)$ à l'instant t .

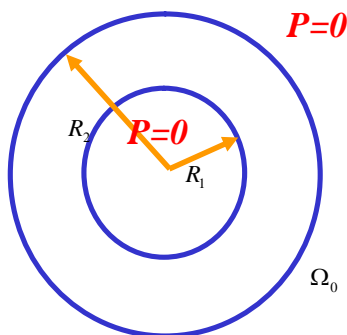
Notons $r_1(t)$ le rayon intérieur et $r_2(t)$ le rayon extérieur dans la configuration actuelle.

Nous nous intéressons aux évolutions isothermes.

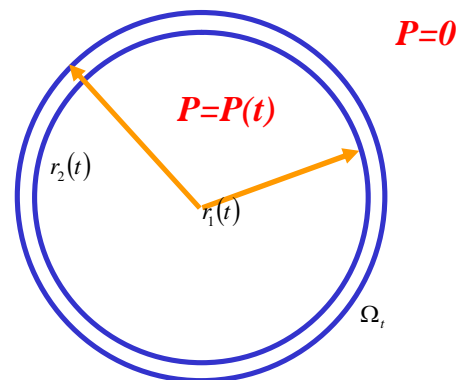
Le matériau constitutif du ballon est hyperélastique incompressible isotrope et son comportement est

donné par la densité massique d'énergie libre $\Psi(I_1, I_2)$, où $I_1 = \text{tr}(\underline{\underline{C}})$ et $I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{tr}(\underline{\underline{C}}\underline{\underline{C}}))$.

Nous souhaitons déterminer la relation entre $P(t)$ et $r_1(t)$.



Configuration de référence



Configuration actuelle

Question 1 :

Nous recherchons les solutions du problème d'évolution à symétrie sphérique.

Ainsi en notant $\underline{X} = R\underline{e}_r(\theta, \varphi)$ on cherche $\underline{\Phi}(\underline{X}, t)$ sous la forme $\underline{\Phi}(\underline{X}, t) = \Phi_r(R, t)\underline{e}_r(\theta, \varphi)$.

On rappelle que, en coordonnées sphériques :

$$\underline{\underline{Grad}}(\underline{\Phi}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_r}{\partial R} & \frac{1}{R} \left[\frac{\partial \Phi_r}{\partial \varphi} - \Phi_\varphi \right] & \frac{1}{R} \left[\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \Phi_r}{\partial \theta} - \Phi_\theta \right] \\ \frac{\partial \Phi_\varphi}{\partial R} & \frac{1}{R} \left[\frac{\partial \Phi_\varphi}{\partial \varphi} + \Phi_r \right] & \frac{1}{R} \left[\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \Phi_\varphi}{\partial \theta} - \Phi_\theta \cot \varphi \right] \\ \frac{\partial \Phi_\theta}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi_\theta}{\partial \varphi} & \frac{1}{R} \left[\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \Phi_\theta}{\partial \theta} + \Phi_\varphi \cot \varphi + \Phi_r \right] \end{bmatrix}$$

1.a) En exprimant l'incompressibilité du matériau, **établir** une équation différentielle sur $\Phi_r(R, t)$.

Réponse 1.a)

En tenant compte de la symétrie sphérique (champs ne dépendant que de R , $\Phi_\theta = \Phi_\varphi = 0$), il vient

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_r}{\partial R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Phi_r}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Phi_r}{R} \end{bmatrix}$$

Loi de comportement hyperélastique incompressible implique $\det \underline{\underline{F}} = \frac{\partial \Phi_r}{\partial R} \left(\frac{\Phi_r}{R} \right)^2 = 1$

1.b) En intégrant cette équation **exprimer** $r(t) = \Phi_r(R, t)$ en fonction de $(R, R_1, r_1(t))$

Réponse 1.b)

$$\Phi_r(R, t) = \left(R^3 + (r_1(t))^3 - R_1^3 \right)^{\frac{1}{3}} = r(t)$$

1.c) **Vérifier** ce résultat en calculant le volume de matériau compris entre les rayons R_1 et R dans la configuration de référence et entre les rayons $r_1(t)$ et $r(t) = \Phi_r(R, t)$ dans la configuration actuelle.

Réponse 1.c)

$$\frac{4\pi}{3} \left[(r(t))^3 - (r_1(t))^3 \right] = \frac{4\pi}{3} (R^3 - R_1^3)$$

1.d) **Montrer** que $\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \left[\frac{r(t)}{R} \right]^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \left[\frac{r(t)}{R} \right] & 0 \\ 0 & 0 & \left[\frac{r(t)}{R} \right] \end{bmatrix}$

1.d) **Montrer** que $\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \left[\frac{r(t)}{R} \right]^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \left[\frac{r(t)}{R} \right] & 0 \\ 0 & 0 & \left[\frac{r(t)}{R} \right] \end{bmatrix}$

Réponse 1.c)

trivial

Question 2 :

Nous supposons que le matériau est néo-hookéen incompressible isotrope, c'est-à-dire que

$$\rho_0 \Psi(I_1, I_2) = C_{10}(I_1 - 3).$$

2.a) **Montrez** que le champ de contrainte de Cauchy s'exprime à l'aide du comportement sous la forme

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 2C_{10} \left[\frac{r(t)}{R} \right]^{-4} + c(R,t) & 0 & 0 \\ 0 & 2C_{10} \left[\frac{r(t)}{R} \right]^2 + c(R,t) & 0 \\ 0 & 0 & 2C_{10} \left[\frac{r(t)}{R} \right]^2 + c(R,t) \end{bmatrix}$$

Où $c(R,t)$ est un champ scalaire indéterminé.

Réponse 2.a)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho_0 \left[\left(2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + 2I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} \right] + c \underline{\underline{I}}, \text{ } c \text{ quelconque}$$

Avec $\rho_0 \Psi(I_1, I_2) = C_{10}(I_1 - 3)$, il vient $\underline{\underline{\sigma}} = 2C_{10} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} + c \underline{\underline{I}}$.

$$\text{Comme } \underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \left[\frac{r(t)}{R} \right]^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \left[\frac{r(t)}{R} \right] & 0 \\ 0 & 0 & \left[\frac{r(t)}{R} \right] \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 2C_{10} \left[\frac{r(t)}{R} \right]^{-4} + c(R,t) & 0 & 0 \\ 0 & 2C_{10} \left[\frac{r(t)}{R} \right]^2 + c(R,t) & 0 \\ 0 & 0 & 2C_{10} \left[\frac{r(t)}{R} \right]^2 + c(R,t) \end{bmatrix}$$

2.b) Nous avons noté $r(R,t) = (R^3 + (r_1(t))^3 - R_1^3)^{\frac{1}{3}}$.

En faisant le changement de variable $R \rightarrow r$, nous avons en inversant cette

relation $R(r,t) = (r^3 - (r_1(t))^3 + R_1^3)^{\frac{1}{3}}$.

Montrez que le champ de contrainte de Cauchy s'exprime à l'aide du comportement sous la forme

$$\underline{\underline{\sigma}}(r,t) = \begin{bmatrix} 2C_{10} \left[\frac{r}{R(r,t)} \right]^{-4} + \tilde{c}(r,t) & 0 & 0 \\ 0 & 2C_{10} \left[\frac{r}{R(r,t)} \right]^2 + \tilde{c}(r,t) & 0 \\ 0 & 0 & 2C_{10} \left[\frac{r}{R(r,t)} \right]^2 + \tilde{c}(r,t) \end{bmatrix}$$

Où $\tilde{c}(r,t)$ est un champ scalaire indéterminé.

Réponse 2.b)

trivial

2.c) On rappelle que en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} \underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) = & \left[\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{r\varphi} \cot \varphi}{r} \right] \underline{e}_r \\ & + \left[\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta}) \cot \varphi + 3\sigma_{r\varphi}}{r} \right] \underline{e}_\varphi \\ & + \left[\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{3\sigma_{r\theta} + 2\sigma_{\varphi\theta} \cot \varphi}{r} \right] \underline{e}_\theta \end{aligned}$$

Déterminer $\frac{\partial \tilde{c}}{\partial r}$ à l'aide de l'équilibre en fonction de $\left(C_{10}, \left[\frac{r}{R(r,t)} \right], \frac{\partial}{\partial r} \left(\left[\frac{r}{R(r,t)} \right]^{-4} \right) \right)$

Réponse 2.c)

En tenant compte de la symétrie sphérique

(champs ne dépendant que de r , $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{r\theta} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\theta\varphi} = 0$) l'équilibre se réécrit :

$$\underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \left[\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{rr} - 2\sigma_{\theta\theta}}{r} \right] \underline{e}_r = \underline{0}$$

$$\text{Cela donne : } \frac{\partial \tilde{c}}{\partial r} = 2C_{10} \left[-\frac{2}{r} \left[\frac{r}{R(r,t)} \right]^{-4} + \frac{2}{r} \left[\frac{r}{R(r,t)} \right]^2 - \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r}{R(r,t)} \right]^{-4} \right]$$

$\tilde{c}(r,t)$ est déterminé par intégration à une constante (fonction du temps) près.

La constante est choisie pour que $\sigma_{rr}(r_2, t) = 0$

Question 3 :

Pour déterminer $\tilde{c}(r,t)$ on peut utiliser la condition aux limites $\sigma_{rr}(r_2, t) = 0$ en intégrant l'équation ci dessus.

Ensuite, la relation recherchée entre $P(t)$ et $r_1(t)$ serait donnée par $\sigma_{rr}(r_1, t) = -P(t)$.

Ces calculs sont lourds, aussi nous allons utiliser une méthode plus astucieuse.

En remarquant que $\sigma_{rr}(r_2) = 0$ et $\sigma_{rr}(r_1) = -P$ on a $P = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} dr$.

3.a) En utilisant l'équation d'équilibre, **exprimer** $P = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} dr$ à l'aide d'une intégrale ne faisant pas

intervenir $\tilde{c}(r,t)$.

Réponse 3.a)

$$\text{L'équilibre se réécrit } \underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \left[\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{rr} - 2\sigma_{\theta\theta}}{r} \right] \underline{e}_r = \underline{0}$$

$$\text{Ainsi } P = \int_{r_1}^{r_2} \frac{2(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})}{r} dr$$

$$\text{Or } \underline{\underline{\sigma}}(r,t) = \begin{bmatrix} 2C_{10} \left[\frac{r}{R(r,t)} \right]^{-4} + \tilde{c}(r,t) & 0 & 0 \\ 0 & 2C_{10} \left[\frac{r}{R(r,t)} \right]^2 + \tilde{c}(r,t) & 0 \\ 0 & 0 & 2C_{10} \left[\frac{r}{R(r,t)} \right]^2 + \tilde{c}(r,t) \end{bmatrix}$$

$$\text{Donc } P = \int_{r_1}^{r_2} 2C_{10} \left[-\frac{2}{r} \left[\frac{r}{R(r)} \right]^{-4} + \frac{2}{r} \left[\frac{r}{R(r)} \right]^2 \right] dr, \text{ avec } r_2 = \left(R_2^3 + (r_1)^3 - R_1^3 \right)^{\frac{1}{3}} \text{ et } R(r) = \left(r^3 - (r_1)^3 + R_1^3 \right)^{\frac{1}{3}}$$

3.b) En **déduire** P exprimé à l'aide d'une intégrale de $\lambda_1 = \frac{r_1}{R_1}$ à $\lambda_2(\lambda_1) = \frac{r_2}{R_1} = \frac{\left(R_2^3 + (r_1)^3 - R_1^3 \right)^{\frac{1}{3}}}{R_1}$, d'une grandeur fonction de $\left(C_{10}, \lambda = \frac{r}{R_1}, \rho(\lambda) \right)$ où $\rho(\lambda) = \left(\lambda^3 - (\lambda_1)^3 + 1 \right)^{\frac{1}{3}}$

Réponse 3.b)

Evident avec le changement de variable $\lambda = \frac{r}{R_1}$, dans l'intégrale.

3.c) Lorsque l'on fait l'approximation de paroi mince, on montre (cf. partie 1) que

$$P(\lambda_1) = \frac{4(R_2 - R_1)C_{10}}{R_1} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1^7} \right) \text{ avec } \lambda_1 = \frac{r_1}{R_1}. \text{ **Véifier** que le résultat de la question 3.b est cohérent}$$

avec cette approximation.

Réponse 3.c)

En notant $\frac{r}{R} = \lambda$ et $r_2 - r_1 = e = \frac{E}{\lambda^2}$, nous avons $r \approx \lambda R_1$

En approchant la fonction à intégrer par une constante on a

$$P(\lambda_1) \approx (r_2 - r_1) 2C_{10} \left[-\frac{2}{r} \left[\frac{r}{R(r)} \right]^{-4} + \frac{2}{r} \left[\frac{r}{R(r)} \right]^2 \right] \approx \frac{4EC_{10}}{R_1} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right)$$

Les résultats sont cohérents

3.d) On revient aux ballons à paroi épaisse. **Tracer** les courbes

$$P(r_1) = \int_{r_1}^{r_2(r_1)} 2C_{10} \left[-\frac{2}{r} \left[\frac{r}{R(r)} \right]^{-4} + \frac{2}{r} \left[\frac{r}{R(r)} \right]^2 \right] dr \text{ avec les valeurs suivantes de } \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = 2, \frac{R_2}{R_1} = 1,5, \frac{R_2}{R_1} = 1,1 \text{ et } \frac{R_2}{R_1} = 1,01.$$

Comparer avec l'approximation de paroi mince et **commenter**.

Je ne l'ai pas fait.