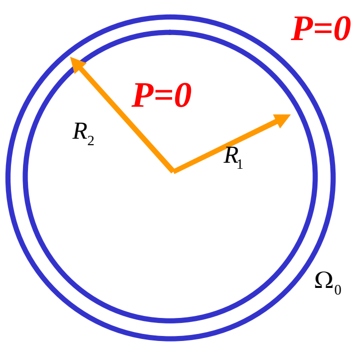
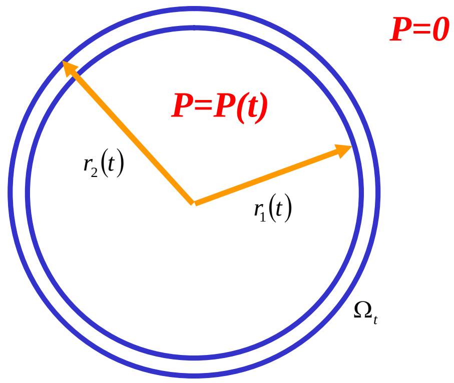
Gonflement d'un ballon cylindrique à paroi mince constituée d'un matériau hyperélastique incompressible isotrope

Nous considérons un ballon cylindrique à paroi mince.
Notons R_1 le rayon intérieur et R_2 le rayon extérieur et L la longueur dans la configuration de référence. On suppose que $L \gg R_1$
Le ballon est à paroi mince, c'est-à-dire que $R_2 - R_1 = E << R_1$
La configuration de référence est un état naturel (contraintes initiales nulles).
La pression extérieure reste nulle.
La pression intérieure évolue et est égale à $P(t)$ à l'instant t.
Notons $r_1(t)$ le rayon intérieur et $r_2(t)$ le rayon extérieur et $l(t)$ la longueur dans la configuration actuelle. $(l(t) \gg r_1(t))$
Le ballon est à paroi mince, c'est-à-dire que $r_2(t) - r_1(t) = e(t) << r_1(t)$
Nous nous intéressons aux évolutions isothermes.
Le matériau constitutif du ballon est hyperélastique incompressible isotrope et son comportement est donné par la densité massique d'énergie libre $\Psi(I_1, I_2)$, où $I_1 = tr(\underline{\underline{C}})$ et $I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - tr(\underline{\underline{C}}.\underline{\underline{C}}))$.

Nous souhaitons déterminer la relation entre $P(t)$ et $r_1(t)$.



Configuration de référence



Configuration actuelle

Nous recherchons les solutions du problème d'évolution à symétrie cylindrique.
Comme la longueur est grande par rapport au rayon, nous supposerons celle-ci infini et nous recherchons des solutions invariantes par translation parallèle à $\underline{e}_z$.
Ainsi en notant $\underline{X} = R\underline{e}_r(\theta) + Z\underline{e}_z$ on cherche la transformation $\underline{\Phi}(\underline{X},t)$ sous la forme :
$\underline{\Phi}(\underline{X},t) = \Phi_r(R,t)\underline{e}_r(\theta) + \lambda_z(t) Z\underline{e}_z$. (en considérant que la section $Z = 0$ n'est pas translatée suivant $\underline{e}_z$, ce qui ne change rien à la généralité)
$\lambda_z(t)$ est l'élongation suivant $\underline{e}_z$.
La contrainte de Cauchy sous l'hypothèse d'une solution à symétrie cylindrique et invariante par translation parallèle à $\underline{e}_z$ s'écrit : (en notant $\underline{x} = r\underline{e}_r(\theta) + z\underline{e}_z$)

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) = \sigma_{rr}(r,t)\underline{e}_r(\theta)\otimes\underline{e}_r(\theta) + \sigma_{\theta\theta}(r,t)\underline{e}_\theta(\theta)\otimes\underline{e}_\theta(\theta) + \sigma_{zz}(r,t)\underline{e}_z\otimes\underline{e}_z$$

Question 1 :
Justifier soigneusement les écritures de $\underline{\Phi}(\underline{X},t)$ et de $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)$ ci-dessus

Question 2 :

Nous allons dans un premier temps chercher une approximation de la contrainte de Cauchy dans la configuration actuelle qui tienne compte de l’hypothèse de paroi mince en ne nous préoccupant que de l’équilibre.

La paroi étant mince, nous allons négliger la dépendance en r des composantes de $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)$.

(Cette hypothèse est souvent nommée « Hypothèse des champs uniformes dans l’épaisseur » et conduit à des expressions souvent nommées « Formules du chaudronnier » car ce sont ces formules qui servaient autrefois au dimensionnement des engins sous pression.)

2.a) Considérez l’équilibre d’un demi ballon coupé suivant le plan de symétrie $(O,\underline{e}_x,\underline{e}_z)$. On s’intéresse à la partie $y>0$.

Le long des deux bords coupés, la membrane extérieure au demi ballon considéré exerce une traction orientée suivant les $y<0$.

Donnez l’expression de l’effort linéique $f(t)$ exercé sur la partie $y>0$ du ballon par la partie $y<0$ en fonction de $\sigma_{\theta\theta}(t)$ et de $e(t)$ (Attention il y a deux bords)

Réponse : $f(t)=2\sigma_{\theta\theta}(t)e(t)$

La pression extérieure est nulle et la pression intérieure vaut $P(t)$. Cette pression exerce une force linéique $f'(t)$ sur la partie $y>0$, orientée suivant les $y>0$.

Donnez la valeur de cette force linéique en fonction de $P(t)$ et de $r_1(t)$.

Réponse : $f'(t)=2P(t)r_1(t)$

Le demi ballon étant en équilibre exprimez $\sigma_{\theta\theta}(t)$ en fonction de $P(t), r_1(t)$ et $e(t)$.

Réponse : $\sigma_{\theta\theta}(t)=P(t)\dfrac{r_1(t)}{e(t)}$

2.b) Considérez maintenant l’équilibre d’un demi ballon coupé suivant le plan de symétrie $(O,\underline{e}_x,\underline{e}_y)$ ou, ce qui revient au même suivant le plan $(O,\underline{e}_r,\underline{e}_\theta)$. On s’intéresse à la partie $z>0$.

Le long du bord coupé, la membrane extérieure au demi ballon considéré exerce une traction orientée suivant les $z<0$.

Donnez l’expression de l’effort $F(t)$ exercé sur la partie $z>0$ du ballon par la partie $z<0$ en fonction de $\sigma_{zz}(t)$, de $r_1(t)$ et de $r_2(t)$

Réponse : $F(t)=\pi\sigma_{zz}(t)\left(r_2(t)^2-r_1(t)^2\right)$

En notant que $r_2(t)=r_1(t)+e(t)$ et en se souvenant que $e(t)<<r_1(t)$, donnez l’expression de l’effort exercé sur la partie $z>0$ du ballon par la partie $z<0$ en fonction de $\sigma_{zz}(t)$, de $r_1(t)$ et de $e(t)$, approchée au premier ordre en $e(t)$.

Réponse : $F(t)=2\pi\sigma_{zz}(t)\left(e(t)r_1(t)\right)$

La pression extérieure est nulle et la pression intérieure vaut $P(t)$. Cette pression exerce une force $F'(t)$ sur la partie $z>0$, orientée suivant les $z>0$.

Donnez la valeur de cette force en fonction de $P(t)$ et de $r_1(t)$.

Réponse : $F'(t)=\pi P(t)\left(r_1(t)^2\right)$

Le demi ballon étant en équilibre exprimez $\sigma_{zz}(t)$ en fonction de $P(t), r_1(t)$ et $e(t)$.

Réponse : $\sigma_{zz}(t) = P(t)\dfrac{r_1(t)}{2e(t)}$

Notez la relation simple entre $\sigma_{\theta\theta}(t)$ et $\sigma_{zz}(t)$.

Réponse : $\sigma_{zz}(t) = \dfrac{\sigma_{\theta\theta}(t)}{2}$

2.c) Considérons un instant le problème sans lőapproximation des champs uniformes dans lőépaisseur.

Que vaut $\sigma_{rr}(r_1(t),t)$ (Attention au signe)

Réponse : $\sigma_{rr}(r_1(t),t) = -P(t)$

Que vaut $\sigma_{rr}(r_2(t),t)$

Réponse : $\sigma_{rr}(r_2(t),t) = 0$

Nous supposerons que $\sigma_{rr}(r,t)$ évolue de façon monotone entre $r_1(t)$ et $r_2(t)$.

Considérez lőordre de grandeur de $\sigma_{rr}(r,t)$ par rapport à nos approximations ci-dessus de $\sigma_{\theta\theta}(t)$ et $\sigma_{zz}(t)$.

Quelle approximation très simple, uniforme en *r* peut on donner pour $\sigma_{rr}(r,t)$?

Réponse : $\sigma_{rr}(t) = 0$

Récapitulez tout cela en donnant la matrice des composantes du tenseur $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)$ sous les hypothèses ci-dessus dans le repère $(O,\underline{e}_r,\underline{e}_\theta,\underline{e}_z)$. (Attention à lőordre des composantes sur la diagonale).

Réponse : $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & P(t)\dfrac{r_1(t)}{e(t)} & 0 \\ 0 & 0 & P(t)\dfrac{r_1(t)}{2e(t)} \end{bmatrix}$

Question 3 :

Nous allons maintenant chercher une approximation du gradient de la transformation dans la configuration référence qui tienne compte de l'hypothèse de paroi mince.

Dans la suite nous notons $\lambda_\theta(t) = \frac{r_1(t)}{R_1}$.

Justifiez l'indice associé à cette « élongation ».

Rappelons que $\lambda_z(t)$ est l'élongation suivant $\underline{e}_z$, uniforme sur l'épaisseur.

Nous ferons l'hypothèse que le gradient $\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$ peut être correctement approché par un tenseur uniforme dans l'épaisseur à cause de l'hypothèse de paroi mince.

Donnez l'expression approchée de l'épaisseur actuelle $e(t)$ en fonction de l'épaisseur initiale E, de $\lambda_\theta(t) = \frac{r_1(t)}{R_1}$ et de $\lambda_z(t)$.

Réponse : $e(t) = \frac{E}{\lambda_\theta(t)\lambda_z(t)}$

Donnez la matrice des composantes de $\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$ dans le repère $(O,\underline{e}_r,\underline{e}_\theta,\underline{e}_z)$.

Réponse : $\underline{\underline{F}}(\underline{X},t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_\theta(t)\lambda_z(t)} & & 0 \\ 0 & \lambda_\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z(t) \end{bmatrix}$

Question 4 :

Ré exprimez la matrice des composantes approchées du tenseur de contrainte deCauchy (question2), à l'aide de E, R_1, $\lambda_\theta(t)$, $\lambda_z(t)$ et $P(t)$

Réponse : $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & P(t)\frac{R_1}{E}\lambda_\theta(t)^2\lambda_z(t) & 0 \\ 0 & 0 & P(t)\frac{R_1}{2E}\lambda_\theta(t)^2\lambda_z(t) \end{bmatrix}$

Question 5 :

Nous allons ici exprimer $\underline{\underline{\sigma}}$ à l'aide du comportement

Rappelons que le matériau constitutif du ballon est hyperélastique incompressible isotrope et son comportement est donné par la densité massique d'énergie libre $\Psi(I_1,I_2)$, où $I_1 = tr(\underline{\underline{C}})$ et $I_2 = \frac{1}{2}\left(I_1^2 - tr(\underline{\underline{C}}.\underline{\underline{C}})\right)$.

Nous supposons que le comportement est <u>**néo-hookéen incompressible**</u> (voir le cours)

Démontrez qu'alors $\underline{\underline{\sigma}} = 2C_{10}\underline{\underline{F}}.{}^t\underline{\underline{F}} + c\underline{\underline{I}}$, avec c indéterminé

Réponse : d'une manière générale :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho_0\left[\left(2\frac{\partial\Psi}{\partial I_1} + 2I_1\frac{\partial\Psi}{\partial I_2}\right)\underline{\underline{F}}.{}^t\underline{\underline{F}} - 2\frac{\partial\Psi}{\partial I_2}\underline{\underline{F}}.{}^t\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}}.{}^t\underline{\underline{F}}\right] + c\underline{\underline{I}}$$

Pour le matériau néo-hookéen $\frac{\partial\Psi}{\partial I_1} = C_{10}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial I_2} = 0$

Donnez lœxpression du tenseur de contrainte de Cauchy à lœaide du comportement et de lœxpression approchée de $\underline{\underline{F}}\left(\underline{X},t\right)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\lambda_\theta(t)\lambda_z(t)} & & 0 \\ 0 & \lambda_\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z(t) \end{bmatrix}$

Réponse : $\underline{\underline{\sigma}}\left(\underline{X},t\right)=\begin{bmatrix} 2C_{10}\left(\dfrac{1}{\lambda_\theta(t)\lambda_z(t)}\right)^2+c & & 0 \\ 0 & 2C_{10}\left(\lambda_\theta(t)\right)^2+c & 0 \\ 0 & 0 & 2C_{10}\left(\lambda_z(t)\right)^2+c \end{bmatrix}$

Question 6 :

Nous avons deux expressions de $\underline{\underline{\sigma}}$, la première obtenue à lœaide de lœéquilibre (nous prendrons lœxpression de la question 4), la seconde obtenue par le comportement.

A lœaide de ces deux expressions donnez la valeur de c indéterminé par le comportement en fonction de $C_{10}, \lambda_\theta(t), \lambda_z(t)$

Réponse $c=-2C_{10}\left(\dfrac{1}{\lambda_\theta(t)\lambda_z(t)}\right)^2$

En éliminant c, donnez les deux relations reliant C_{10} $E, R_1, \lambda_\theta(t), \lambda_z(t)$ et $P(t)$

Réponse

$$2C_{10}\left(\lambda_\theta(t)\right)^2-2C_{10}\left(\frac{1}{\lambda_\theta(t)\lambda_z(t)}\right)^2=P(t)\frac{R_1}{E}\lambda_\theta(t)^2\lambda_z(t)$$

$$2C_{10}\left(\lambda_z(t)\right)^2-2C_{10}\left(\frac{1}{\lambda_\theta(t)\lambda_z(t)}\right)^2=P(t)\frac{R_1}{2E}\lambda_\theta(t)^2\lambda_z(t)$$

En déduire une relation ne portant que sur $\lambda_\theta(t)$ et $\lambda_z(t)$.

Réponse

$$\left(\lambda_\theta(t)\right)^2-\left(\frac{1}{\lambda_\theta(t)\lambda_z(t)}\right)^2=2\left[\left(\lambda_z(t)\right)^2-\left(\frac{1}{\lambda_\theta(t)\lambda_z(t)}\right)^2\right]$$

En posant $X=\left(\lambda_\theta(t)\right)^2$ et $Y=\left(\lambda_z(t)\right)^2$, réécrivez cette relation sous la forme dœun polynôme en (X,Y) qui doit être nul. (Ecrivez le sous la forme dœun trinôme en Y)

Réponse

$2XY^2-X^2Y-1=0$

En déduire deux expressions de $Y=\left(\lambda_z(t)\right)^2$ en fonction de $X=\left(\lambda_\theta(t)\right)^2$. En éliminer une en indiquant pourquoi.

Réponse

$Y = \frac{X^2 \pm \sqrt{X^4 + 8X}}{4X}$, $Y = \left(\lambda_z(t)\right)^2$ doit être positif donc $Y = \frac{X^2 + \sqrt{X^4 + 8X}}{4X}$

En déduire lœexpression de $P(t)$ en fonction de C_{10}, $\frac{E}{R_1}$ et $\lambda_\theta(t)$.

Réponse

$$P(t) = \frac{2EC_{10}}{R_1}\left[\frac{1}{\lambda_z(t)} - \left(\frac{1}{\left(\lambda_\theta(t)\right)^3\left(\lambda_z(t)\right)^2}\right)\right] \text{ où } \lambda_z(t) = \sqrt{\frac{\left(\lambda_\theta(t)\right)^4 + \sqrt{\left(\lambda_\theta(t)\right)^8 + 8\left(\lambda_\theta(t)\right)^2}}{4\left(\lambda_\theta(t)\right)^2}}$$

<u>Question 7 :</u>

Tracez la courbe adimensionnelle avec $\frac{R_1 P}{2EC_{10}}$ en ordonnée et $\lambda_\theta = \frac{r_1}{R_1}$ en abscisse

<u>et commentez</u>

En particulier, avez-vous observé un phénomène que lœon peut mettre en relation avec lœallure de votre courbe lorsque vous avez gonflé des ballons cylindriques ?

Lorsque lœon gonfle une baudruche cylindrique, on observe deux zones cylindriques de rayon différent.