

# Gonflement d'un ballon sphérique à paroi épaisse constituée d'un matériau élastoplastique de Von Mises, totalement isotrope (Elasticité et écrouissage)

## Introduction

Cet exercice a pour objectif de vous faire utiliser les équations de l'élastoplasticité classique en grandes transformations, dans le cas d'une structure très simple, afin que vous ayez une meilleure vision de l'articulation des différentes équations.

Pour cela nous considérons un ballon sphérique à paroi épaisse.

Nous nous intéressons aux évolutions isothermes.

On verra que, pour cette structure, deux champs scalaires principaux, fonctions de la seule variable scalaire  $R$ , vont s'imposer comme inconnues principales.

L'objectif de l'exercice sera d'établir deux équations, la première différentielle, la seconde algébrique, portant sur ce couple de champs scalaires.

**Nous n'essaierons pas de résoudre ces équations fortement non linéaires.**

Bien sûr, la structure comprendra une zone « extérieure » en évolution élastique et une zone « intérieure » en évolution plastique. La frontière entre ces deux zones est donnée par un rayon  $R^p$  qui évoluera avec le chargement.

Le couple d'équations sera bien sûr différent dans ces deux zones.

Nous verrons que l'équation différentielle dans chacune des zones est du deuxième degré. Il nous faudra donc préciser les conditions aux limites ou d'interface entre les deux zones qui permettront de déterminer 2 « constantes d'intégration » par zone. Il nous faudra déterminer aussi le « rayon plastique »  $R^p$ . Nous aurons donc besoin, outre les systèmes d'équations ci-dessus, de 5 équations complémentaires issues des conditions aux limites du problème et des conditions d'interface.

Ci-dessous je rappelle tout d'abord les équations écrites en cours pour le comportement classique élastoplastique en grandes transformations. A vous de les écrire dans l'hypothèse de symétrie sphérique de la solution.

Je précise ensuite la géométrie de la structure, puis je présente le chargement.

On passe ensuite aux questions avec comme premier objectif de vous faire réaliser que dans ce problème seuls deux champs scalaires, fonctions d'une seule variable d'espace, sont à déterminer.

Je vous tiens un peu la main pour que tout le monde ait les mêmes notations.

Bon courage.

## Comportement

Le matériau constitutif du ballon est élastoplastique de Von Mises, totalement isotrope (Elasticité et écrouissage). Rappelons les équations établies dans le cours

La position  $\underline{x}$  de la particule  $\underline{X}$  à l'instant  $t$  est donnée par la transformation  $\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X}, t)$ .

Avec les notations habituelles du cours, nous notons le gradient de la transformation

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{Grad}}(\underline{\Phi}(\underline{X}, t))$$

On a la décomposition multiplicative du gradient de la transformation en une partie plastique et une partie élastique :  $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{E}}(\underline{X}, t) \bullet \underline{\underline{P}}(\underline{X}, t)$  ; ( $\underline{\underline{E}}(\underline{X}, t)$  symétrique)

L'évolution plastique se fait sans variation de volume :  $J = \det(\underline{\underline{F}}) = \det(\underline{\underline{E}})$  ;  $\det(\underline{\underline{P}}) = 1$  donc

$$tr(\underline{\underline{\dot{P}}} \underline{\underline{P}}^{-1}) = 0.$$

La partie élastique du comportement est donnée par la densité massique d'énergie libre

$$\Psi(\underline{\underline{E}}) = \frac{1}{2\rho_{Rel}} \left( \mu_0 (\bar{I}_1 - 3) + k_0 (J - 1)^2 \right) \text{ où } \bar{I}_1 = tr \left( {}^t \underline{\underline{E}} \underline{\underline{E}} \right) \text{ avec } \underline{\underline{E}} = J^{-\frac{1}{3}} \underline{\underline{E}}.$$

La partie plastique du comportement est donnée par la puissance massique dissipée dans une

évolution plastique  $D = \frac{k(P_{cum}) \dot{P}_{cum}}{\rho_{Rel}}$  où  $\dot{P}_{cum} = \sqrt{\frac{2}{3} d^p : d^p}$  est le taux de déformation plastique

cumulée, avec  $\underline{\underline{d}}^p = \frac{1}{2}(\dot{\underline{\underline{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} + {}^t\underline{\underline{P}}^{-1} \cdot {}^t\dot{\underline{\underline{P}}})$  et  $\rho_{Rel}$  est la masse volumique dans la configuration relâchée (égale à la masse volumique initiale car  $\det(\underline{\underline{P}}) = 1$ )

Nous avons vu en cours que l'équation des bilans thermodynamiques **valable pour toutes les évolutions possibles** permet alors d'établir les équations du comportement suivantes :

**Cas particulier du comportement isotrope (élasticité et écoulement)**

$$\underline{\underline{F}}(\underline{\underline{X}}, t) = \underline{\underline{E}}(\underline{\underline{X}}, t) \bullet \underline{\underline{P}}(\underline{\underline{X}}, t) \quad J = \det(\underline{\underline{F}}) = \det(\underline{\underline{E}}) \quad \det(\underline{\underline{P}}) = 1$$

$$tr(\dot{\underline{\underline{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}) = 0 \quad \underline{\underline{d}}^p = \frac{1}{2}(\dot{\underline{\underline{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} + {}^t\underline{\underline{P}}^{-1} \cdot {}^t\dot{\underline{\underline{P}}}) \quad p_{cum} = \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{d}}^p : \underline{\underline{d}}^p} dt$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\mu_0}{J^{\frac{5}{3}}} \underline{\underline{E}} \cdot {}^t \underline{\underline{E}} + \left( k_0 (J - 1) - \frac{\mu_0}{J^{\frac{5}{3}}} \frac{tr(\underline{\underline{E}} \cdot {}^t \underline{\underline{E}})}{3} \right) \underline{\underline{I}} \quad \underline{\underline{\psi}}_{Rel} = J \underline{\underline{\sigma}}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{\psi}}_{Rel}^{d,s} : \underline{\underline{\psi}}_{Rel}^{d,s}} \leq k(p_{cum}) \quad \underline{\underline{d}}^p = \frac{3}{2} \frac{\dot{p}_{cum}}{k(p_{cum})} \underline{\underline{\psi}}_{Rel}^{d,s}$$

$\dot{p}_{cum} = 0$  en cas d'évolution élastique

Le comportement est donc donné par  $\mu_0, k_0, k(p_{cum})$

**Géométrie et conditions initiales**

Notons  $R_1$  le rayon intérieur et  $R_2$  le rayon extérieur dans la configuration de référence. La configuration de référence est un état naturel (contraintes initiales nulles).

Le champ  $\underline{\underline{P}}(\underline{\underline{X}}, t = 0) = \underline{\underline{I}}$

Notons  $r_1(t)$  le rayon intérieur et  $r_2(t)$  le rayon extérieur dans la configuration actuelle.



**Configuration de référence**

**Configuration actuelle**

**Chargement**

La pression extérieure reste nulle.

La pression intérieure évolue de manière croissante et est égale à  $Q(t)$  à l'instant  $t$ .

(On note  $Q(t)$  la pression pour garder la liberté d'utiliser  $P(R, t)$  comme variable de plasticité, voir plus loin)

**Question 1 :**

Nous recherchons les solutions du problème d'évolution à symétrie sphérique.

Ainsi en notant  $\underline{X} = R\underline{e}_r(\theta, \varphi)$  on cherche  $\underline{\Phi}(\underline{X}, t)$  sous la forme  $\underline{\Phi}(\underline{X}, t) = \Phi_r(R, t)\underline{e}_r(\theta, \varphi)$ .

Seul le champ scalaire  $\Phi_r(R, t)$  intervient donc

On rappelle que, en coordonnées sphériques :

$$\underline{\underline{Grad}}(\underline{\Phi}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_r}{\partial R} & \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial \Phi_r}{\partial \varphi} - \Phi_\varphi \right] & \frac{1}{R} \left[ \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \Phi_r}{\partial \theta} - \Phi_\theta \right] \\ \frac{\partial \Phi_\varphi}{\partial R} & \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial \Phi_\varphi}{\partial \varphi} + \Phi_r \right] & \frac{1}{R} \left[ \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \Phi_\varphi}{\partial \theta} - \Phi_\theta \cot \varphi \right] \\ \frac{\partial \Phi_\theta}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi_\theta}{\partial \varphi} & \frac{1}{R} \left[ \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \Phi_\theta}{\partial \theta} + \Phi_\varphi \cot \varphi + \Phi_r \right] \end{bmatrix}$$

Donnez la matrice des composantes du tenseur gradient de la transformation dans la base  $(\underline{e}_r(\theta, \varphi), \underline{e}_\theta(\theta, \varphi), \underline{e}_\varphi(\theta, \varphi))$ , puis l'expression de  $J = \det(\underline{\underline{F}})$  en fonction des champs

scalaires  $\Phi_r(R, t)$  et  $\frac{\partial \Phi_r}{\partial R}(R, t)$  (et de  $R$ )

**Question 2 :**

La symétrie sphérique implique que la matrice des composantes du tenseur de transformation plastique  $\underline{\underline{P}}$  dans la base  $(\underline{e}_r(\theta, \varphi), \underline{e}_\theta(\theta, \varphi), \underline{e}_\varphi(\theta, \varphi))$  est un tenseur diagonal. Chacune des composantes ne dépend que de  $R$ . De plus  $P_{\theta\theta} = P_{\varphi\varphi}$ . Enfin  $\det(\underline{\underline{P}}) = 1$ .

Ainsi on a la forme suivante pour la matrice des composantes du tenseur de transformation plastique dans la base  $(\underline{e}_r(\theta, \varphi), \underline{e}_\theta(\theta, \varphi), \underline{e}_\varphi(\theta, \varphi))$

$$\underline{\underline{P}}(R, t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{P^2(R, t)} & 0 & 0 \\ 0 & P(R, t) & 0 \\ 0 & 0 & P(R, t) \end{bmatrix},$$

Seul le champ scalaire  $P(R, t)$  intervient donc.

$\Phi_r(R, t)$  et  $P(R, t)$  seront les deux champs scalaires, inconnues principales, dans notre problème.

Donnez la matrice des composantes du tenseur de transformation élastique  $\underline{\underline{E}}$  dans la base

$(\underline{e}_r(\theta, \varphi), \underline{e}_\theta(\theta, \varphi), \underline{e}_\varphi(\theta, \varphi))$  en fonction des champs scalaires  $\Phi_r(R, t)$ ,  $\frac{\partial \Phi_r}{\partial R}(R, t)$  et  $P(R, t)$  (et de  $R$ )

**Question 3 :**

Nous avons vu en cours que pour ce comportement  $\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\mu_0}{J^{\frac{5}{3}}} \underline{\underline{E}} \cdot {}^t \underline{\underline{E}} + \left( k_0 (J-1) - \frac{\mu_0}{J^{\frac{5}{3}}} \frac{\text{tr}(\underline{\underline{E}} \cdot {}^t \underline{\underline{E}})}{3} \right) \underline{\underline{I}}$ .

Le tenseur de contrainte de Cauchy est donc diagonal dans la base  $(\underline{e}_r(\theta, \varphi), \underline{e}_\theta(\theta, \varphi), \underline{e}_\varphi(\theta, \varphi))$ . De plus les composantes ne dépendent que de  $R$  et  $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$ .

Donnez l'expression des composantes  $\sigma_{rr}(R, t)$  et  $\sigma_{\theta\theta}(R, t)$  en fonction des champs

scalaires  $\Phi_r(R, t)$ ,  $\frac{\partial \Phi_r}{\partial R}(R, t)$  et  $P(R, t)$  (et de  $R$ )

Pour alléger l'écriture ne faites pas apparaître la dépendance en  $R$  et  $t$  des champs. Elle sera sous entendue.

Vérifiez vos calculs à l'aide de l'expression de  $\sigma_{rr}(R, t) + 2\sigma_{\theta\theta}(R, t)$  et de  $\sigma_{rr}(R, t) - \sigma_{\theta\theta}(R, t)$

**Question 4:**

On rappelle qu'en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} \underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) = & \left[ \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{r\varphi} \cot \varphi}{r} \right] \underline{e}_r \\ & + \left[ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta}) \cot \varphi + 3\sigma_{r\varphi}}{r} \right] \underline{e}_\varphi \\ & + \left[ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{3\sigma_{r\theta} + 2\sigma_{\varphi\theta} \cot \varphi}{r} \right] \underline{e}_\theta \end{aligned}$$

Que devient cette équation si l'on fait l'hypothèse de symétrie sphérique ?

**Question 5:**

A la question 3 on a donné des expressions de  $\sigma_{rr}(R,t)$  et  $\sigma_{\theta\theta}(R,t)$  (fonctions de  $R$  et non de  $r$ ) à l'aide des champs scalaires  $\Phi_r(R,t)$ ,  $\frac{\partial\Phi_r}{\partial R}(R,t)$  et  $P(R,t)$  (et de  $R$ )

Récrivez la seule équation scalaire d'équilibre non triviale en remplaçant les dérivées par rapport à  $r$  par des dérivées par rapport à  $R$  (changement de variable). Remplacer aussi  $r$  par  $\Phi_r(R,t)$

**Inutile de remplacer  $\sigma_{rr}(R,t)$  et  $\sigma_{\theta\theta}(R,t)$  par leurs expressions trouvées dans la question 3.**

Il suffit que vous ayez conscience que cette équation d'équilibre est une équation différentielle du deuxième degré qui porte sur le couple de champs inconnus  $(\Phi_r(R,t), P(R,t))$ .

Cette équation différentielle est valable dans les deux zones. La différence entre ces zones intervient donc uniquement au niveau de l'équation algébrique qui complète le système d'équations

**Question 6:**

Considérons maintenant la zone extérieure  $R > R^p$  pour laquelle nous avons fait l'hypothèse que le comportement est élastique. Compte tenu du fait que en condition initiale  $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{I}}$  et qu'il n'y a pas encore eu d'évolution plastique dans cette zone, quelle est l'équation algébrique très simple qui complète l'équation différentielle ci-dessus dans cette zone ?

En déduire l'équation différentielle qui ne porte que sur le champ  $\Phi_r(R, t)$  dans cette zone.

Donnez-la sans chercher à la mettre dans une forme plus agréable. Ce n'est pas l'objet de cet exercice. Constatez seulement que c'est une équation différentielle du second degré fortement non linéaire qui ne porte que sur le champ inconnu  $\Phi_r(R, t)$ . Il nous faudra donc deux conditions aux limites sur les frontières de la zone élastique pour finir l'intégration dans cette zone. Remarquons cependant que nous ne connaissons pas la valeur de  $R^p$  qui dépend bien sûr du chargement  $Q(t)$ .

Notons que cette équation est valable dans toute la structure si le chargement n'a pas dépassé la valeur de première plastification ( $R^p = R_1$ ). C'est aussi l'équation que nous aurions eu si nous avions voulu traiter le problème d'un ballon à paroi épaisse constituée d'un matériau hyperélastique compressible.



### **Question 7:**

Intéressons nous maintenant à la zone intérieure  $R < R^p$  dont nous avons fait l'hypothèse qu'elle évolue de manière plastique.

Nous devons compléter l'équation différentielle dans cette zone par une équation algébrique comme je vous l'ai dit plus haut.

Bien évidemment cette équation sera obtenue à l'aide du critère de plasticité sur la contrainte.

$\sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^{d,s} : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^{d,s}} = k(p_{cum})$  où, compte tenu de l'isotropie  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}} = J \underline{\underline{\sigma}}$  et  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^{d,s}$  est la partie déviatorique symétrique de  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}$ .

On peut donc réécrire ce critère  $\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} = \frac{k^2(p_{cum})}{J^2}$  avec  $p_{cum} = \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{d}}^p : \underline{\underline{d}}^p} dt$  et  $\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{tr(\underline{\underline{\sigma}})}{3} \underline{\underline{I}}$

Commencez par calculer  $p_{cum}(R, t)$  en fonction de  $P(R, t)$ .

Déduisez ensuite l'équation qui relie les champs  $\Phi_r(R, t)$  et  $P(R, t)$  dans la zone intérieure.

**Question 8:**

Choisissons, comme dans le cours

$$k(\text{Log}(P^2)) = \sigma_0(1 + \alpha(P^2 - 1))$$

Montrez que l'équation algébrique ci-dessus est un polynôme de degré 6 en  $P$ .

**Commentaire**

**Attention, cet exercice pourrait donner l'illusion qu'en général avec l'équilibre et le critère on peut déterminer les champs dans la zone plastique.**

**Ceci est faux en général. Il faut y ajouter la loi d'écoulement plastique. Il se trouve que dans cet exercice la symétrie sphérique est tellement contraignante que la loi d'écoulement normal est automatiquement vérifiée, ce qui dispense de la considérer dans le traitement des équations.**

De ce point de vue cet exercice est un peu faible pédagogiquement. Il est cependant difficile de mettre au point un exercice plus complet pédagogiquement sans entrer dans des complications d'expressions au delà de ce que l'on considère comme « supportable » par des élèves en deuxième cycle.

**Question 9:**

Nous avons donc ci-dessus établi dans chaque zone un système différentiel du deuxième degré pour nos deux champs  $\Phi_r(R,t)$  et  $P(R,t)$  qui sont les inconnues principales de notre problème de calcul de structure.

Par ailleurs nous ne connaissons pas  $R^p$

Il nous faut donc, en complément de ces systèmes d'équations, 5 équations complémentaires tirées des conditions aux limites en  $R_1$  et  $R_2$  et des conditions d'interface en  $R^p$ .

Donnez ces 5 équations sans forcément vous astreindre à les exprimer à l'aide des champs  $\Phi_r(R,t)$  et  $P(R,t)$ .

(Par exemple CL en  $R = R_2$  il suffit de dire que  $\sigma_{rr}(R_2,t) = 0$  sans revenir à l'expression de  $\sigma_{rr}$  en fonction des champs  $\Phi_r(R,t)$  et  $P(R,t)$ )